MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. univ. emerit ing. **ALEXANDRU GHEORGHIU**

STATICA
STABILITATEA ȘI DINAMICA
CONSTRUCȚIILOR

EDIȚIA A II-A

PARTEA ÎNTÎI

REZOLVAREA STRUCTURILOR STATIC DETERMINATE

CAPITOLUL I

ELEMENTE INTRODUCTIVE

A. GENERALITĂȚI

1. Preliminarii

Proiectarea construcțiilor constituie un proces complex de creație, în care se îmbină preocupări multiple referitoare la numeroase probleme tehnice și economice. O construcție trebuie să fie cît mai bine adaptată destinației sale și modului cum va fi folosită în timp, să prezinte suficientă rezistență și stabilitate în exploatare, să poată fi realizată în condiții economice și la termenele prevăzute, să dovedească sub toate aspectele o calitate corespunzătoare. Aceste cerințe, precum și modul concret de realizare, se prevăd și se stabilesc prin proiect, care devine astfel în mod necesar o operă colectivă, elaborată cu participarea mai multor persoane de specialități diferite.

Una dintre problemele de bază ale proiectării unei construcții se referă la realizarea structurii sale de rezistență, pentru care trebuie alese soluțiile constructive cele mai potrivite cazului considerat, cît și dimensionarea justă a elementelor componente, astfel încît să fie asigurate cerințele de rezistență și stabilitate, în condiții de economicitate rațional înțeleasă. Capacitatea de a proiecta în bune condiții structuri de rezistență constituie o componentă esențială a calificării de inginer constructor.

Realizarea siguranței construcției în condiții economice implică un studiu științific al modului cum se comportă structura de rezistență sub acțiunea încărcărilor ce-i revin, pornind de la cunoașterea fenomenelor și de la generalizarea datelor practicii. Un asemenea studiu oferă proiectantului posibilitatea de a urmări în formă schematizată comportarea construcției reale și de a controla prin calcul, cu suficientă exactitate, mărimile eforturilor și ale deformațiilor care se produc pentru diferite situații de încărcare ce pot interveni în timpul exploatării.

Cercetarea prin calcul și prin experimentări pe modele a comportării structurilor de rezistență formează obiectul Mecanicii construcțiilor. Această știință s-a închegat, în decursul timpului, drept consecință a lărgirii continue a activității practice în domeniul construcțiilor, determinată de dezvoltarea necontenită a forțelor de producție, care a impus realizarea unui volum tot mai mare și mai variat de construcții în toate domeniile de activitate. Dacă la început Mecanica construcțiilor se confunda cu Mecanica teoretică, folosind metodele și rezultatele acesteia pentru dimensionarea elementelor de construcții, extinderea de mai tîrziu a utilizării metalului și — după anul 1900 — a betonului armat la cele mai variate categorii de construcții, a ridicat mereu probleme noi, cerînd să se calculeze structuri tot mai complicate și în condiții mai diferite.

Aceasta a determinat, în special începînd din a doua jumătate a secolului trecut, o dezvoltare deosebită a metodelor de calculul construcţiilor. Numeroase generaţii de oameni de ştiinţă au izbutit, pe cale teoretică şi experimentală, să sintetizeze principii şi metode de calcul ce fac obiectul unei literaturi vaste de specialitate.

Lărgirea continuă a domeniului de probleme ce trebuiau studiate, cît şi specificul variat al acestora, au condus în mod firesc la accentuarea treptată a cerinţei de specializare, astfel că prin gruparea problemelor a rezultat o împărţire a Mecanicii construcţiilor în mai multe discipline, care pot fi cuprinse în principal — din punct de vedere didactic — în două ramuri: Statica, stabilitatea şi dinamica construcţiilor; Rezistenţa materialelor, teoria elasticităţii şi a plasticităţii. Specificul acestora apare urmărind etapele esenţiale ale proiectării unei structuri de rezistenţă şi anume:

— stabilirea alcătuirii constructive, ţinînd seama atît de cerinţele impuse de natura şi destinaţia construcţiei, cît şi de condiţiile specifice amplasamentului, urmărind obţinerea unei soluţii raţionale şi economice pentru suportarea sarcinilor şi transmiterea lor la baza de sprijinire;

— studierea acţiunii sarcinilor asupra structurii de rezistenţă, pentru precizarea caracteristicilor de comportare ale alcătuirii constructive adoptate, determinarea eforturilor produse în diferitele elemente ale structurii, precum şi verificarea stabilităţii;

— dimensionarea elementelor componente, pe baza cunoaşterii proprietăţilor materialelor folosite, astfel încît eforturile care se dezvoltă şi deformabilitatea structurii să fie menţinute în limite admisibile.

Primele două etape corespund în general domeniului de preocupări al Staticii construcţiilor, iar cea de a treia — problemelor ce fac obiectul Rezistenţei materialelor. Aceste două discipline se împletesc în multe cazuri, deşi au linii de preocupări diferite. Prima etapă a proiectării se bazează pe o cunoaştere de sinteză a principiilor şi concluziilor generale ale calculului construcţiilor, implicînd valorificarea cunoştinţelor şi experienţei celui ce proiectează.

În ultimele decenii, ramurile Mecanicii construcţiilor au luat o mare dezvoltare şi în ţara noastră. Preocupări în această direcţie au existat şi mai înainte, legate de numele a numeroşi ingineri şi profesori, cum au fost Constantin Mănescu, Anghel Saligny, Elie Radu, Andrei Ioachimescu, Ion Ionescu şi în special Gh. Em. Filipescu, care a predat mulţi ani cursul de Statică şi Rezistenţă. Cartea sa *Statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor*, publicată în anul 1935, este remarcabilă prin nivelul ştiinţific ridicat, de asemenea prin anumite contribuţii şi linii de orientare proprii, care se regăsesc în dezvoltarea de mai tîrziu a cercetărilor româneşti. Aceste preocupări au avut totuşi în mare parte caracter izolat, lipsind pe atunci premisele necesare unei activităţi ştiinţifice organizate.

Instaurarea relaţiilor de producţie socialiste a dus la o creştere considerabilă a ritmului de dezvoltare a economiei naţionale, impunînd înfăptuirea unui program de construcţii în creştere accentuată de la an la an, pe baza unei planificări judicioase a cerinţelor viitorului. În aceste condiţii, dezvoltarea organizată a cercetării ştiinţifice a devenit o problemă de Stat şi a fost încredinţată

institutelor de cercetare și de proiectare, precum și catedrelor de specialitate din instituțiile de învățămînt superior.

Dezvoltarea preocupărilor privitoare la calculul structurilor a fost favorizată și de separarea, începută din anul 1948, a celor două ramuri principale ale Mecanicii construcțiilor, ca discipline independente în cadrul învățămîntului superior de construcții, permițînd adîncirea domeniilor respective prin concentrarea eforturilor. Contribuții merituoase au fost aduse de Cr. Mateescu, Șt. Bălan, P. Mazilu, C. Avram, A. Șesan și alții, cărora li s-a adăugat o pleiadă de elemente valoroase mai tinere, ce își consacră preocupările didactice și științifice domeniului calculului structurilor.

Dotările mai recente cu echipament electronic de calcul impulsionează, de asemenea, dezvoltarea cercetărilor în acest domeniu, permițînd proiectanților să atace probleme care pînă acum păreau inabordabile datorită complexității lor. Introducerea calculului automat aduce schimbări substanțiale în modul de a privi metodele de calculul structurilor și impune noi forme de prelucrare și sistematizare a acestora.

Datorită specificului său, calculul structurilor are un rol important în formarea gîndirii inginerului constructor, contribuind esențial la închegarea capacității de a alege soluții constructive adecvate și de a stabili corect prin calcul datele necesare pentru o dimensionare justă.

2. Echilibrul construcțiilor sub acțiunea sarcinilor

Trăsătura caracteristică a Staticii construcțiilor și instrumentul său de investigație constau în cercetarea *stării de echilibru* a construcției sub acțiunea sarcinilor. Spre deosebire de situația întîlnită în Mecanica teoretică, unde corpurile se consideră perfect rigide, aici trebuie ținut seama că materialele folosite la realizarea structurilor sînt deformabile. În consecință, *starea reală de echilibru a unei construcții se stabilește în poziția deformată produsă de aplicarea sarcinilor*. Ceea ce trebuie determinat sînt eforturile și deplasările care caracterizează trecerea din poziția inițială în poziția deformată.

O cercetare completă a echilibrului în poziția deformată implică considerarea diferitelor aspecte care definesc această stare și anume:

(1) Situația de echilibru în care trebuie să se găsească totalitatea forțelor exterioare și interioare ce acționează în sistemul considerat; aceasta este *condiția de echilibru static*.

(2) Respectarea în poziția deformată a totalității legăturilor din rezemări sau din alte puncte ale structurii, precum și continuitatea de material a elementelor componente; aceasta este *condiția de compatibilitate* (continuitate).

(3) Adoptarea unei alcătuiri și dimensionări a elementelor care asigură că în nici o secțiune solicitarea efectivă nu depășește o anumită limită; dacă se consideră comportarea perfect elastică a materialului, aceasta este *condiția de elasticitate*.

Prima condiție — în care intervine numai ansamblul forțelor existente în sistem — are *caracter static*, în timp ce a doua condiție — care privește numai

configurația structurii în poziția deformată — are *caracter geometric*. Cea de-a treia condiție se referă la *datele fizice* ale structurii (natura materialului, dimensiunile elementelor) și stabilește legătura între forțele care acționează și deformarea care se produce. Aceste trei condiții caracterizează starea de echilibru în poziția deformată (echilibru elastic). Utilizarea lor reprezintă instrumentul cu care se pot determina efectele date de sarcini, și anume eforturile și deplasările din diferite secțiuni.

Starea reală de echilibru a unei construcții reprezintă un fenomen complex și considerarea integrală în calcul a tuturor particularităților sale se dovedește deosebit de dificilă. Nevoia unor simplificări apare inevitabilă. Este necesar să se admită diferite schematizări privind alcătuirea structurii de rezistență, sarcinile care o acționează, modul de comportare a materialului. În mod voit se neglijează unele efecte de importanță secundară, spre a se obține o transpunere mai simplă și mai clară a fenomenelor în calcul. Totodată, la baza calculului se admit anumite ipoteze simplificatoare, care ușurează rezolvarea.

În fapt, calculul se aplică asupra unei imagini schematizate a realității, iar rezultatele capătă prin aceasta un anumit caracter convențional, în sensul că valabilitatea lor este condiționată de măsura în care ipotezele de plecare pot fi considerate ca justificate. Prin aceasta, calculul construcțiilor apare ca un *calcul aproximativ*, deoarece imaginea schematică a realității pe care operează reprezintă o aproximație față de realitatea însăși. Metodele de calcul utilizate în practică, bazate pe ipoteze simplificatoare și schematizări, își găsesc justificarea tocmai în concordanța satisfăcătoare care se constată între rezultatele găsite prin calcul și datele obținute din încercări.

Tendința de continuu progres în domeniul metodelor de calcul este caracterizată prin perfecționarea schematizărilor, spre a încadra cît mai strîns fenomenele reale. Aceasta duce la necesitatea unor continue confruntări cu comportarea efectivă a construcțiilor, folosindu-se atît experimentări pe modele în laboratoare, cît și încercări efectuate pe construcții sau părți de construcții executate la scară naturală. Verificarea experimentală este astfel complementul necesar al cercetării teoretice. Datele experimentale și limitele lor de concordanță cu rezultatele calculelor sînt singurele criterii care pot justifica ipotezele simplificatoare și schematizările ce se folosesc. Totodată, rezultatele experimentale generează și orientează cercetări teoretice noi, care urmăresc să îmbunătățească ipotezele și metodele de calcul.

3. Ipoteze simplificatoare

În vederea simplificării calculelor, pe baza schematizării fenomenelor, se admit de la început anumite premise referitoare la caracterul deformării materialelor folosite obișnuit în construcții (oțel, beton, lemn):

— Materialele sînt puțin deformabile și dimensionarea elementelor are loc astfel încît, în condiții normale de exploatare, poziția deformată este foarte

apropiată de cea inițială. În consecință, deplasările[1] diferitelor secțiuni sînt foarte mici și la determinarea lor se pot aplica regulile geometriei infiniților mici. Se înțelege aceasta spunînd că pozițiile deformate se încadrează în *domeniul micilor deplasări*.

— Pentru a asigura calculelor generalitatea necesară se admite că toate materialele au o comportare asemănătoare, reținînd esențialul și neglijînd deosebirile care se oglindesc în curbele lor caracteristice. Se consideră astfel un material oarecum convențional, cu proprietăți simple; acest material este continuu, omogen și izotrop, iar proprietățile sale nu variază în timp. Se admite totodată că materialul se comportă *perfect elastic* în condiții de exploatare a construcțiilor, satisfăcînd legea de proporționalitate între eforturi unitare și deformații specifice (legea lui Hooke).

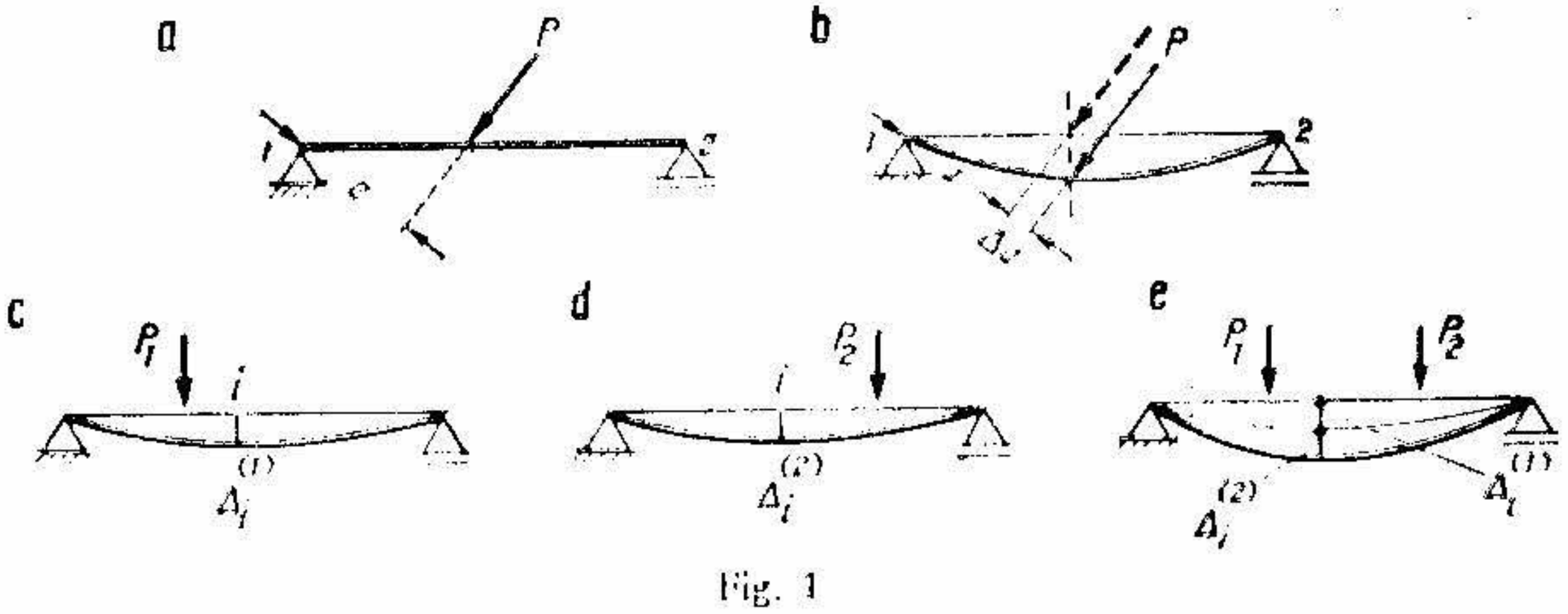


Fig. 1

În aceste condiții, se pot stabili *ipotezele simplificatoare ale Staticii construcțiilor* după cum urmează:

(1) Dacă poziția deformată se menține în domeniul micilor deplasări, *condiția de echilibru static se poate aplica raportînd forțele la poziția nedeformată a structurii*. Prin aceasta se ajunge la situația considerată în Mecanica corpurilor rigide, și deci se pot aplica metodele și rezultatele acestei discipline. Folosirea ipotezei simplificatoare duce la neglijarea, în ecuațiile de echilibru static, a unor mici corecții de distanțe sau unghiuri produse de trecerea în poziția deformată, de exemplu considerarea brațului de pîrghie a în loc de $a+\Delta a$ (fig. 1, *a* și *b*).

Avantajul acestei ipoteze este evident: în mod riguros, la aplicarea condiției de echilibru static forțele ar trebui raportate la poziția deformată, care reprezintă situația reală de echilibru, dar care nu este cunoscută inițial. Cît timp ecuațiile de echilibru static sînt suficiente pentru determinarea reacțiunilor și a eforturilor (structuri static determinate), problema poate fi rezolvată *fără considerarea poziției deformate*.

---

[1] Privitor la terminologie: prin *deplasări* se înțeleg efecte ale deformării ansamblului structurii, de exemplu translația și rotirea pe care o suferă o secțiune cînd structura trece din poziția inițială în poziția deformată. Prin *deformații* (specifice) se înțelege lungirea specifică ε sau lunecarea specifică γ, cunoscute din Rezistența materialelor.

(2) Dacă poziția deformată se menține în domeniul micilor deplasări și materialul se comportă perfect elastic, se poate admite proporționalitatea între sarcini și deplasările corespunzătoare. Aceasta înseamnă că efectele unei sarcini aplicate pe structură (eforturi, deplasări) depind direct de mărimea acelei sarcini și nu sînt influențate de efectele altor sarcini aplicate concomitent sau anterior.

Admiterea acestei ipoteze are consecințe însemnate, deoarece permite să se utilizeze *suprapunerea de efecte*, considerînd ca independente efectele diferitelor sarcini aplicate pe structură. Efectele totale se obțin prin suprapunerea efectelor parțiale (fig. 1, *c—e*). Eforturile și deplasările pot fi astfel exprimate prin relații liniare, în funcție de mărimile sarcinilor. Avantajele sînt evidente: o încărcare mai complicată se poate descompune în încărcări mai simple, se pot aprecia separat efectele diferitelor sarcini, se pot determina combinațiile de încărcări cele mai defavorabile.

Aceste două ipoteze simplificatoare trebuie cunoscute de la început, pentru a înțelege corect de ce la studiul structurilor static determinate reacțiunile și eforturile se pot calcula considerînd numai poziția nedeformată și aplicînd suprapunerea de efecte. Totodată, trebuie reținute[1] limitele lor de valabilitate.

4. Schematizări admise pentru calcul

Pentru simplificare, atît structurile de rezistență ale construcțiilor, cît și sarcinile care le acționează, sînt reprezentate în mod convențional folosind reducerea la scheme de calcul. Prin schematizarea fenomenelor se elimină deosebirile neesențiale, creînd posibilități de generalizare a categoriilor de cazuri particulare.

a. **Schematizarea sarcinilor.** Încărcările construcțiilor care pot fi reprezentate în schemele de calcul prin forțe concentrate sau distribuite, sînt numite generic *sarcini*. Sarcinile constituie *date* ale problemei, în funcție de care se determină eforturile și se dimensionează.

Evaluarea exactă a sarcinilor ce vor fi efectiv aplicate în decursul exploatării unei construcții este dificilă, atît datorită diversității lor, cît și modificării în timp (de exemplu, posibilitățile variate de încărcare a unui planșeu care susține un atelier, sau un depozit, varietatea mărimii și poziției vehiculelor ce pot trece pe un pod etc.). În calcul este deci necesar să se considere anumite mărimi aproximative pentru unele sarcini, stabilite pe bază de experiență și avînd caracter convențional.

Admiterea de sarcini convenționale are avantajul că permite schematizarea lor sub forme simple, de exemplu sarcini concentrate, sarcini distribuite după o anumită lege, sau sarcini uniform distribuite (fig. 2, *a—c*). Astfel, la clădiri civile sau industriale, sarcinile care provin din modul de folosință a încă-

[1] Asupra ipotezelor simplificatoare și a modului lor de aplicare la structuri static nedeterminate se revine la începutul capitolului VIII.

Situații în care una sau alta dintre ipotezele simplificatoare nu mai este aplicabilă sînt examinate în capitolele XV și XVI.

perilor se consideră sub forma convenţională a unor sarcini uniform distribuite pe suprafaţa planşeului. Pentru a se asigura unitatea necesară în proiectarea construcţiilor, evaluarea sarcinilor de calcul se face în fiecare ţară după prescripţii oficiale. În ţara noastră, asemenea prescripţii sînt cuprinse în standarde de stat.

Sarcinile în construcţii se pot împărţi în mai multe categorii: cu caracter *permanent*, care se datoresc existenţei materiale a construcţiei (greutatea diferitelor elemente); *utile*, care provin din modul de folosire a construcţiei (greu-

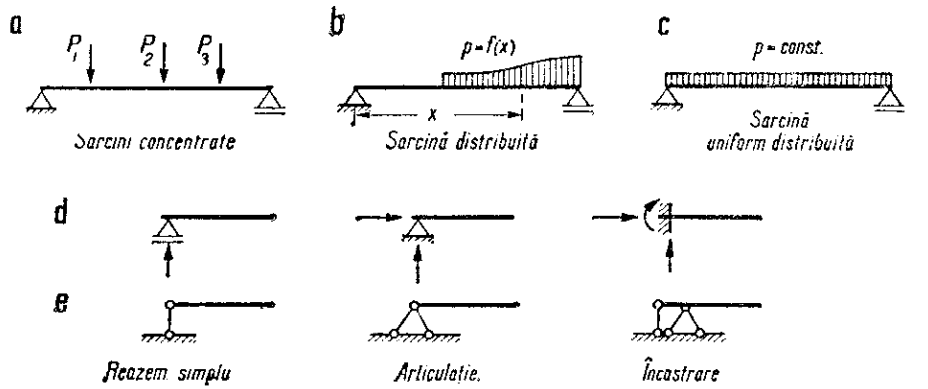


Fig. 2

tatea oamenilor, a produselor, a instalaţiilor şi maşinilor, a vehiculelor etc.); cu caracter *accidental*, cum sînt presiunea vîntului, greutatea zăpezii; *extraordinare*, ca acţiunea cutremurelor. O clasificare a acestora, precum şi o prezentare detaliată a evaluării şi utilizării lor vor fi date la cursurile de specialitate.

Pentru Statica construcţiilor interesează în primul rînd o clasificare a sarcinilor în două mari categorii: sarcini cu *poziţie fixă*, care provin din greutatea diferitelor elemente de construcţie, sau se evaluează pornind de la aceste greutăţi, şi sarcini cu *poziţie variabilă*, reprezentate în principal de sarcinile utile care se pot amplasa şi fragmenta în diferite moduri. Pentru determinarea eforturilor produse de aceste două categorii de sarcini se vor examina în capitolele următoare metode specifice de calcul.

Privitor la modul de acţionare, în Statica construcţiilor se admite că sarcinile se aplică *static*, în înţelesul că intensitatea lor variază lent în timpul aplicării, de la zero la valoarea finală. În consecinţă, la scrierea ecuaţiilor de echilibru nu este necesar să se introducă şi forţe de inerţie. Cazul cînd aplicarea sarcinilor are caracter *dinamic* este examinat în capitolul XVII.

b. **Schematizarea rezemărilor.** O construcţie sau un element de construcţie trebuie legat în anumite puncte de teren sau de alte elemente, pentru a se asigura o poziţie invariabilă. Dispozitivele de legătură poartă numele de rezemări şi sînt caracterizate de faptul că împiedică anumite tendinţe de deplasare în punctele respective. Alcătuirea rezemărilor reale este foarte variată, depinzînd de natura construcţiei, materialele din care sînt realizate etc. Pentru

calcul este necesar să se admită o schematizare, reținînd numai specificul dominant al rezemării respective. Se ajunge astfel la un număr restrîns de *tipuri de rezemări*[1].

Datorită aplicării sarcinilor, construcția transmite acțiuni asupra rezemărilor, care se pot schematiza sub formă de forțe și momente. Opunîndu-se deplasărilor pe care le pot împiedica, rezemările exercită la rîndul lor asupra construcției acțiuni egale și direct opuse celor dintîi, numite *reacțiuni*, asigurînd echilibrul. Cunoscînd sarcinile și natura rezemărilor, se pot astfel determina reacțiunile.

Pentru structuri *plane* se deosebesc următoarele tipuri de rezemări:

(1) *Reazemul simplu* (mobil), care împiedică numai deplasarea pe o anumită direcție, deplasarea pe direcția normală acesteia și rotirea rămînînd libere. Există deci o singură legătură, căreia îi corespunde o reacțiune-forță de direcție cunoscută, aplicată în punctul de rezemare.

(2) *Reazemul articulat* (fix), care împiedică deplasarea pe orice direcție din plan, rotirea rămînînd liberă. Există astfel două legături, și deci corespunde o reacțiune-forță de direcție oarecare (două componente), aplicată în punctul de rezemare.

(3) *Încastrarea*, care împiedică atît deplasarea pe orice direcție din plan, cît și rotirea. Sînt în total trei legături, cărora le corespund o reacțiune-forță de direcție oarecare și o reacțiune-moment, aplicate în punctul de rezemare.

În figura 2, *d* sînt arătate semnele convenționale uzuale pentru reprezentarea acestor tipuri de rezemări (s-au indicat și reacțiunile respective). O altă reprezentare este dată în figura 2, *e*, unde împiedicările de deplasări sînt figurate explicit prin numărul corespunzător de legături (fiecare legătură apare ca o mică bară articulată la ambele capete).

c. **Schematizarea structurilor.** Statica construcțiilor se ocupă de acele structuri de rezistență care sînt alcătuite din elemente ce au una dintre dimensiuni (lungimea) mult mai mare decît celelalte două. Pentru reprezentare în schemele de calcul, aceste elemente se consideră *reduse la axele lor* și poartă denumirea generică de *bare*, care pot fi drepte sau curbe. Se poate deci considera că Statica construcțiilor are ca obiect *studiul structurilor alcătuite din bare*.

Barele componente ale unei structuri sînt prinse între ele în *noduri*. Prinderea se poate face prin articulare sau prin asigurarea unei legături rigide a barelor în nod, caz în care barele pot fi considerate ca încastrate unele în altele. Pentru a putea suporta sarcini, structurile schematizate trebuie să aibă asigurată invariabilitatea configurației geometrice și fixarea în plan sau spațiu. Condițiile necesare pentru aceasta, care se referă la numărul și distribuția legăturilor, sînt examinate în paragraful următor.

În general, structurile de rezistență ale construcțiilor au alcătuire spațială, astfel că o schematizare riguroasă ar conduce de obicei la calculul unor structuri în spațiu. Deseori însă, prin neglijarea efectului unor legături de importanță secundară, se poate ajunge la separarea ansamblului în structuri plane, simplificînd astfel rezolvarea. Aceasta explică de ce în proiectare se folosește

[1] Rezemările sistemelor spațiale sînt examinate în capitolul VII.

pe scară întinsă calculul structurilor plane. Sînt însă şi situaţii cînd considerarea conlucrării spaţiale este impusă prin însuşi modul de alcătuire a structurii, astfel încît calculul trebuie făcut pentru structura în spaţiu.

Principalele categorii de structuri *plane* sînt:

(1) *Grinzile drepte* (fig. 3, *a-d*), care sînt bare cu axă rectilinie, acţionate obişnuit de sarcini aplicate normal pe axă, astfel încît solicitarea dominantă este încovoierea. După distribuţia legăturilor se pot întîlni grinzi pe două reazeme, grinzi cu console, grinzi cu console şi articulaţii, grinzii continue.

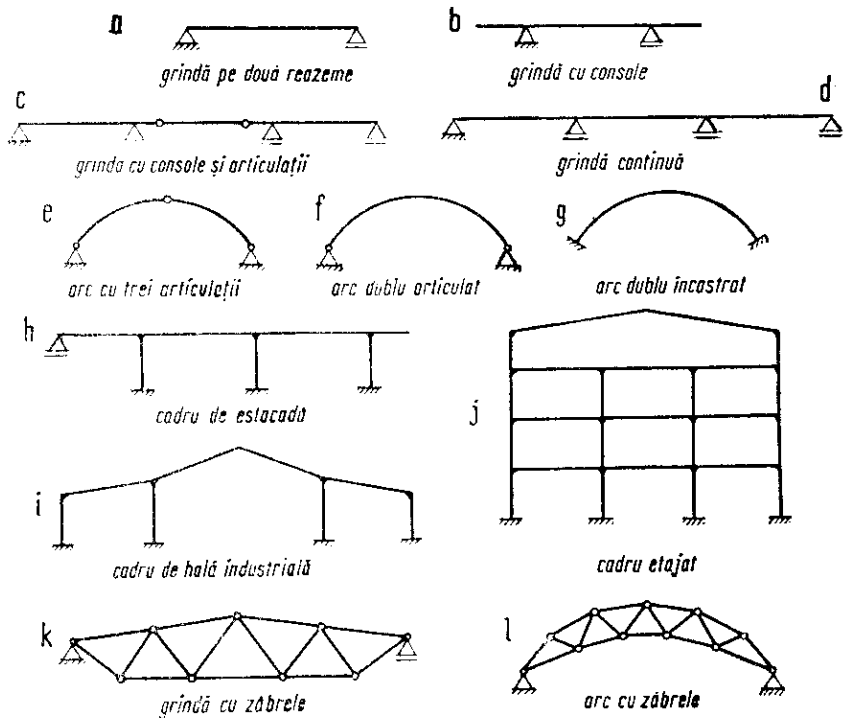


Fig. 3

(2) *Arcele* (fig. 3, *e-g*), care sînt bare cu axă curbă plană, acţionate de sarcini cuprinse în planul curbei şi dirijate obişnuit spre sensul concavităţii. Arcul exercită împingeri asupra rezemărilor, acestea împiedicînd variaţia deschiderii. Printr-o alegere judicioasă a formei arcului se poate ajunge la o reducere a efectelor de încovoiere, solicitarea dominantă fiind cea axială (compresiune).

(3) *Cadrele* (fig. 3, *h-j*), care sînt structuri alcătuite din bare la care în toate nodurile, sau numai într-o parte din ele, legătura dintre bare este rigidă. Sarcinile pot fi aplicate în orice punct al barelor, astfel că solicitarea dominantă este încovoierea. Cadrele pot avea forme foarte variate şi apar curent ca structuri de rezistenţă la hale industriale, clădiri etajate etc.

(4) *Structurile cu zăbrele* (fig. 3, *k-l*), care pot fi reduse la un sistem de bare, a cărui invariabilitate geometrică este asigurată cînd în toate nodurile legătura dintre bare se consideră făcută prin articulații perfecte. Pentru sarcini aplicate în noduri rezultă în bare numai eforturi axiale. Structurile cu zăbrele pot avea formă de grinzi drepte, arce, cadre etc.; de fapt, orice structură poate fi formată în două moduri: din elemente avînd secțiune plină, sau din elemente alcătuite din zăbrele.

5. Controlul alcătuirii structurilor

Orice structură schematizată trebuie să fie geometric invariabilă, considerînd porțiunile componente drept corpuri rigide. Pentru aceasta este necesar ca în alcătuirea structurii să existe un număr suficient de legături, iar distribuția acestora să fie judicioasă.

Astfel, în cazul legării invariabile în plan a unui corp rigid de o bază de sprijinire (fig. 4, *a*), grupul de legături *1* și *2* este echivalent unei articulații; corpul se poate roti în jurul punctului *A*, translația fiind împiedicată. Fixarea

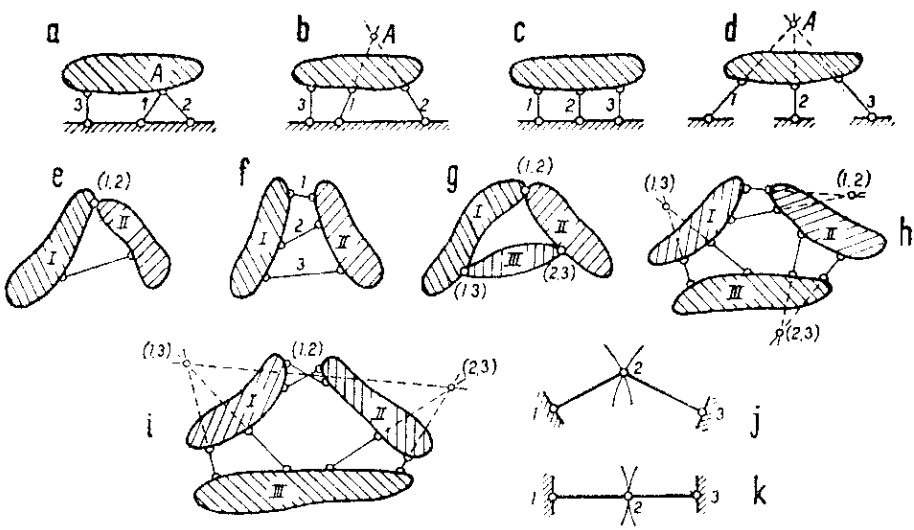


Fig. 4

completă se obține împiedicînd și posibilitatea de rotire, de exemplu prin legătura *3*. Rezultă că sînt necesare în total *trei* legături[1]. O situație similară se vede în figura 4, *b*; legăturile *1* și *2* sînt aici echivalente unei articulări indirecte în punctul *A*, deoarece corpul se poate roti în jurul acestui punct.

[1] Termenul *legătură* este utilizat cu înțelesul de *legătură simplă*, cunoscut din Mecanică.

Fixarea invariabilă a corpului în plan depinde nu numai de numărul legăturilor, ci și de poziția lor. În figura 4, *c* și *d* sînt arătate două situații, unde există cîte trei legături, dar fixarea nu este asigurată. Cînd legăturile sînt paralele, posibilitatea deplasării laterale a corpului apare evidentă. Cînd axele legăturilor sînt concurente, apare posibilă o rotire limitată în jurul punctului *A* de concurență; poziția particulară a celei de-a treia legături nu blochează rotirea permisă de celelalte două, decît atunci cînd — datorită rotirii corpului — cele trei axe încetează de a mai fi concurente. Se observă aici un caz de *formă critică* a distribuției legăturilor.

Pe această bază și ținînd seama de definirea dată rezemărilor, rezultă că fixarea unui corp în plan se poate face prin:

— trei legături grupate în același punct: o încastrare;
— trei legături plasate în două puncte: o articulație și un reazem simplu;
— trei legături plasate în trei puncte: trei reazeme simple ale căror axe să nu fie concurente sau paralele.

Orice legătură în plus reprezintă o legătură suplimentară față de numărul minim necesar fixării în plan a corpului.

Concluziile de mai sus rămîn valabile și în cazul legării a două porțiuni rigide între ele: sînt necesare trei legături, cu aceleași restricții (fig. 4, *e-f*). Legarea invariabilă a trei corpuri se poate face prin articularea directă două cîte două (fig. 4, *g*), rezultînd o schemă triunghiulară care este geometric invariabilă; sînt deci necesare *șase* legături. O situație asemănătoare este arătată în figura 4, *h*, unde între fiecare pereche de două corpuri există cîte două legături, care sînt echivalente cu cîte o articulație indirectă în punctele (*1,2*), (*1,3*) și (*2,3*), ajungîndu-se și în acest caz la schema triunghiulară.

Generalizînd, se constată că pentru fiecare corp adăugat primului trebuie introduse cîte trei legături: pentru *c* corpuri este necesar un număr *l* de legături dat de relația

$$l=3\ (c-1). \tag{1.1}$$

Sistemul geometric invariabil astfel obținut trebuie legat de o bază de sprijinire, spre a-i asigura fixarea în plan. Se folosesc pentru aceasta alte trei legături, notate cu *r* (fig. 1, *a*), deci $r=3$. Adunînd această relație cu relația (1.1), rezultă condiția

$$l+r=3\ c. \tag{1.2}$$

care fixează numărul *minim* de legături necesar pentru alcătuirea unui sistem compus din *c* corpuri, cu invariabilitate geometrică și fixare în plan asigurate. În relația (1.2), *l* reprezintă numărul legăturilor interioare dintre corpuri și *r* — numărul legăturilor exterioare.

Această relație poate fi privită într-o accepție mai generală, ținînd seama că este posibil să se înlocuiască unele legături interioare prin legături exterioare, în așa fel ca să se mențină invariabilitatea geometrică și fixarea în plan. Într-un asemenea caz, sistemul de corpuri nu mai formează un ansamblu rigid prin el însuși, dar adăugarea legăturilor exterioare îl fixează de baza de sprijinire, realizînd totodată și invariabilitatea geometrică (fig. 5, *a-b*). Relația

(1.2) trebuie deci privită ca fixînd numărul minim total de legături necesar, unde $r \geqslant 3$.

Condiția stabilită se referă numai la *numărul* de legături necesare, fără nici o indicație privitoare la distribuția acestora; condiția este astfel necesară, dar nu totdeauna și suficientă. Mai trebuie satisfăcută o condiție, ca distribuția legăturilor să fie judicioasă. Pentru exemplificare, în figura 4, *i* se arată un caz similar celui din figura 4, *h*; legarea celor trei corpuri este realizată tot prin șase bare, dar punctele de articulare indirectă (*1,2*), (*2,3*) și (*1,3*) sînt de data aceasta *coliniare*. Schema sistemului nu se mai reduce la un triunghi, ci la o dreaptă. Deosebirea este aceeași ca între cazurile din figurile 4, *j* și *k*; în primul caz, poziția punctului *2* este perfect definită prin intersecția a două cercuri, și deci punctul este fix; în al doilea caz, poziția punctului *2* rezultă prin tangența a două cercuri, astfel că punctul poate avea mici deplasări normal pe dreapta *1-2-3*. Rezultă că sistemul din figura 4, *i nu are strictă invariabilitate geometrică*, aceasta datorită exclusiv unei dispuneri particulare a legăturilor; este un sistem cu *formă critică*, impropriu pentru folosire.

Criteriile de mai sus servesc la controlul alcătuirii structurilor. Astfel, pentru cazurile din figurile 5, *a* și *b* rezultă $l=2$, $r=2\cdot 2=4$ și $c=2$, respectiv $l=3\cdot 2=6$, $r=3\cdot 2=6$ și $c=4$, astfel că relația (1.2) este satisfăcută. Totodată,

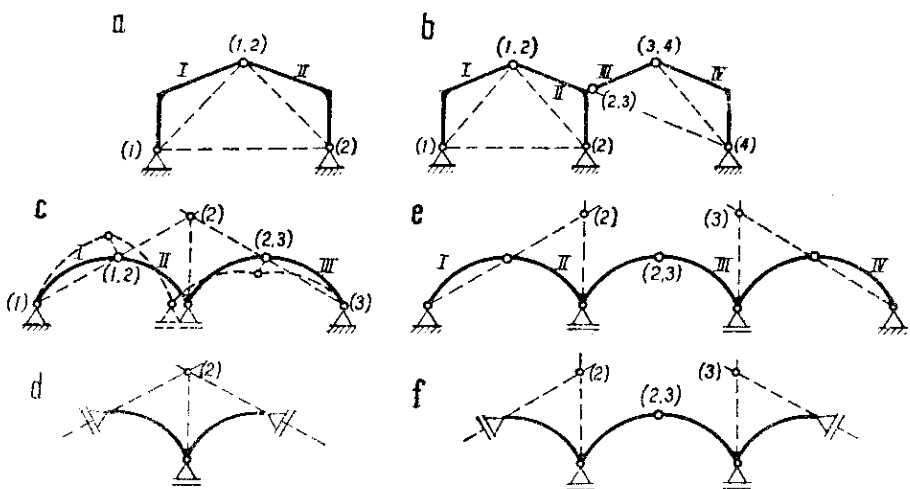


Fig. 5

în fiecare caz s-au figurat punctat schemele triunghiulare formate de punctele de articulare a grupelor de cîte trei porțiuni (s-a considerat aici și baza de sprijinire ca un corp rigid).

Un caz interesant se vede în figura 5, *c*, unde $l=2\cdot 2=4$, $r=2\cdot 2+1=5$ și $c=3$, satisfăcînd relația (1.2). Poziția particulară a articulațiilor (*1,2*) și (*2,3*) duce la concurența în (*2*) a liniilor trasate punctat. Ținînd seama că părțile dublu articulate laterale se comportă ca reazeme simple pentru por-

țiunea centrală, permițînd deplasări normale pe liniile (*1*)-(*1,2*) și (*3*)-(*2,3*), se ajunge la schema din figura 5, *d*, unde se regăsește cazul din figura 4, *d*. Sistemul dat are deci formă critică, deoarece dispunerea legăturilor nu poate împiedica trecerea în poziția deplasată vecină indicată punctat.

O analiză similară se poate face și pentru structura din figura 5, *e*, care se reduce la schema din figura 5, *f*. Aici, porțiunile *II* și *III*, rezemate pe cîte două reazeme simple, sînt articulate indirect de baza de sprijinire în punctele (2) și (3), iar între ele sînt articulate în punctul (2,3). Aceste trei articulații nefiind coliniare, structura are strictă invariabilitate geometrică.

Alte căi de identificare a sistemelor cu formă critică vor fi expuse mai departe, în special în capitolul IV.

6. Modalități de conducere a calculelor

Aplicarea concretă a metodelor de calculul structurilor în proiectare conduce la necesitatea efectuării unui anumit volum de calcule numerice. Cînd acest volum nu este prea mare, efectuarea manuală a calculelor (sau cu ajutorul unor mașini mecanice de birou) nu prezintă dificultăți. Situația se schimbă însă la structurile mai complicate, unde volumul necesar de calcule numerice poate crește considerabil.

Această problemă a preocupat permanent pe proiectanți. Cît timp calculul manual a reprezentat singura posibilitate, cerința principală a fost ca procedeele de calcul folosite să comporte calcule numerice cît mai puține. Aceasta se realizează pe calea simplificărilor și a particularizărilor.

Astfel, anumite posibilități de simplificare apar chiar de la schematizarea pentru calcul a structurii, prin eliminarea unor legături de importanță secundară și fracționarea în structuri mai simple, prin neglijarea unor conlucrări spațiale și reducere la sisteme plane, prin neglijarea unor efecte secundare etc. Mai departe, la stabilirea metodei de calcul și la aplicarea acesteia pot fi obținute simplificări ținînd seama de particularitățile cazului concret care se studiază. Deoarece proiectantul efectuează direct întreg calculul, este firesc să utilizeze pe parcurs aceste particularități, tratînd problema dată ca un caz individual cu specificul său.

Răspîndirea din ultimul timp a utilizării calculatoarelor electronice a adus schimbări radicale în modul de a privi rezolvarea problemelor de calculul structurilor, deoarece volumul calculelor numerice nu mai constituie un obstacol și proiectantul poate fi integral degajat de efectuarea lor. Astfel, schematizările structurilor pot fi mult îmbunătățite, renunțînd în mare măsură la simplificări și neglijări, ceea ce permite obținerea unor rezultate mai apropiate de realitate. De asemenea, apare posibilitatea de a urmări găsirea unor soluții optime, prin efectuarea rezolvării în mod repetat, modificînd succesiv diferiți parametri ai soluției. Totodată, alături de lărgirea domeniului de aplicare a unor metode de calcul cunoscute, devine posibilă și crearea unor metode concepute special, a căror aplicare nu ar fi posibilă fără existența calculatoarelor.

În ceea ce privește conducerea calculelor, apare o deosebire esențială. În timp ce la calculul manual inițiativa proiectantului se poate manifesta permanent

pe parcurs, calculatorul electronic execută strict numai ceea ce i se indică prin program. Aceasta implică o abordare specifică în formularea metodei de calcul, care trebuie redusă la o succesiune clară de operații simple, ordonate cu precizie — la ceea ce se numește un *algoritm* — pe care calculatorul să le poată efectua fără a mai fi necesare intervenții din afară pe parcurs. Înseamnă implicit că metoda astfel formulată ia în considerare problema pusă sub forma ei generală, urmînd să servească ca atare la rezolvarea tuturor situațiilor particulare ce pot apare în proiectare.

Formularea adecvată acestui scop este *formularea matriceală*, specifică problemelor de algebră liniară — la care se pot reduce în general metodele pentru calculul structurilor, deoarece organizarea calculatoarelor electronice este adaptată efectuării cu ușurință a operațiilor de calcul matriceal[1]. Odată formulat matriceal și deci redus la o succesiune de operații standard, algoritmul metodei de calcul poate fi reprezentat într-o *schemă logică*, care descrie operațiile ce trebuie efectuate și succesiunea acestora. Schema logică este punctul de plecare în elaborarea programului de calcul ce se transmite calculatorului.

În acest curs, alături de prezentarea metodelor generale de calcul și de sistematizarea acestora în forme uzuale, care corespund în general cerințelor calculului manual, sînt prezentate și procedee specifice calculului automatizat, cu formulările matriceale și schemele logice corespunzătoare. Eficiența practică a acestora din urmă este direct legată de utilizarea calculatoarelor electronice; aplicarea lor prin calcul manual este de obicei greoaie și abordabilă numai pentru cazuri foarte simple.

B. APLICAREA CONDIȚIEI DE ECHILIBRU STATIC LA STRUCTURI PLANE

1. Determinarea reacțiunilor

a. **Echilibrul forțelor exterioare.** O structură este în echilibru sub acțiunea sarcinilor și a reacțiunilor. Din Mecanică se știe că rezemările pot fi considerate suprimate și efectul lor înlocuit prin reacțiunile corespunzătoare. Structura devine astfel *liberă* și echilibrul său este asigurat de sarcini (forțe active) și reacțiuni (forțe de legătură); acestea reprezintă împreună *forțele exterioare*.

La structuri alcătuite dintr-un singur corp rigid, suprimarea legăturilor cu mediul înconjurător duce la obținerea corpului liber care se consideră în calcul (fig. 6, *a*). Cînd structura este alcătuită din mai multe porțiuni rigide, efectuînd înlocuirea legăturilor exterioare cu reacțiuni, ansamblul structurii devine liber. Se poate desface structura și în părțile sale componente (fig. 6, *b-c*), înlocuind legăturile *dintre porțiuni* prin acțiunile reciproce ce se dezvoltă acolo (perechi de forțe sau momente egale și direct opuse). Prin această operație, acțiunile reciproce devin forțe exterioare pentru porțiunile respective

[1] În anexa de la sfîrșitul volumului sînt reamintite unele cunoștințe elementare de calcul matriceal și de formulare matriceală.

de structură, analoage reacțiunilor din rezemări, deoarece fiecare porțiune reprezintă o rezemare pentru cealaltă. O forță de legătură poate intra în calcul (la aplicarea ecuațiilor de echilibru static) numai ca forță exterioară, rezultată din desfacerea legăturii respective.

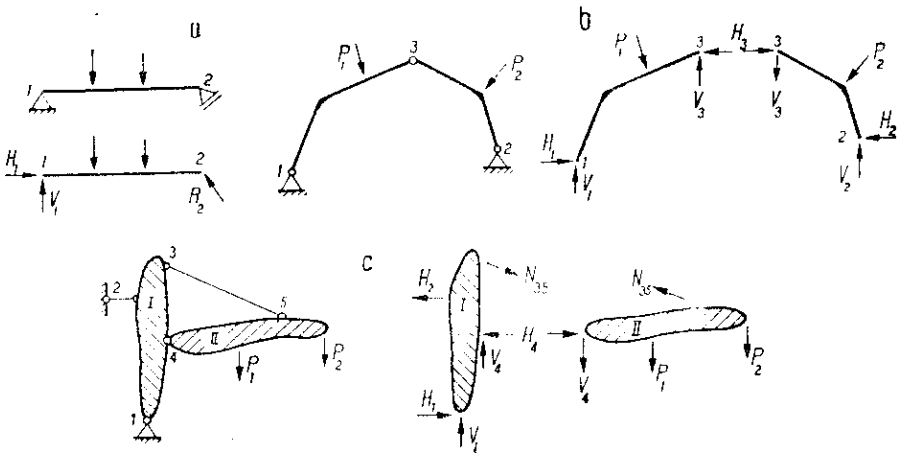


Fig. 6

Privitor la modul de considerare în calcul a forțelor exterioare, din Mecanica teoretică se știe că:

(1) Prin desfacerea legăturilor, porțiunea izolată poate rezulta cu sau fără invariabilitate geometrică proprie, după cum legăturile dintre corpurile care o compun satisfac sau nu relația (1.1). Pe baza teoremei solidificării, această deosebire nu intervine la studiul echilibrului dintre sarcini și forțele de legătură exterioare porțiunii izolate.

(2) Forțele exterioare trebuie privite ca *vectori lunecători* pe suporturile lor, pentru porțiunea izolată al cărei echilibru se studiază; înseamnă că se poate considera ca punct de aplicație orice punct de pe suportul forței invariabil legat de porțiunea respectivă.

(3) Sarcinile aplicate pe porțiunea izolată pot fi înlocuite cu rezultanta lor, sau cu un alt sistem de forțe *echivalent*,[1] fără ca prin aceasta forțele de legătură exterioare porțiunii considerate să se modifice.

Aplicarea acestor proprietăți este limitată la exprimarea condiției de echilibru static pentru forțele exterioare ce acționează asupra unei porțiuni izolate din structură. Utilizarea lor *nu este permisă* la determinarea eforturilor din secțiunile porțiunii respective.

b. **Ecuațiile de echilibru static.** Dintre forțele exterioare care asigură echilibrul unei structuri sau al unei porțiuni dintr-o structură, sarcinile sînt cunos-

[1] Două sisteme de forțe coplanare se numesc *echivalente* atunci cînd se reduc la aceeași rezultantă sau la același cuplu.

cute, constituind date ale problemei, în timp ce forțele de legătură reprezintă necunoscute ce trebuie determinate. Mijlocul de determinare constă în aplicarea ecuațiilor de echilibru static, care stabilesc relații necesare între sarcini și necunoscute. În măsura în care relațiile obținute sînt și suficiente pentru aflarea forțelor de legătură, problema este *static determinată*. În acest caz, numărul de necunoscute reprezentat de forțele de legătură este egal cu numărul de ecuații de echilibru static disponibile în cazul considerat.

Se știe că pentru un corp în plan se pot scrie trei ecuații de echilibru static

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0, \tag{1.3}$$

deci suma proiecțiilor tuturor forțelor pe două direcții diferite din plan, precum și suma momentelor acestor forțe în raport cu un punct oarecare din plan trebuie să fie nule. Nu este însă totdeauna necesar să se folosească ecuațiile de echilibru sub această formă; esențial este ca cele trei ecuații să fie *diferite*. Se cunosc din Mecanică și alte posibilități:

— o ecuație de proiecții pe o direcție oarecare din plan și două ecuații de momente în raport cu două puncte din plan, alese astfel încît dreapta care le unește să nu fie perpendiculară pe direcția folosită pentru proiecții;

— trei ecuații de momente în raport cu trei puncte necoliniare din plan.

La aplicarea ecuațiilor, în varianta care apare mai avantajoasă pentru cazul ce se rezolvă, se va folosi totdeauna calea cea mai simplă, urmărind să se obțină ecuații cu cîte o singură necunoscută. Se începe de obicei cu utilizarea ecuațiilor de momente, care dovedesc mai multă supleță de aplicare, alegînd în mod convenabil punctele de moment respective. Pentru proiecții se aleg direcțiile cele mai avantajoase.

La o structură alcătuită dintr-o singură porțiune rigidă sînt disponibile trei ecuații de echilibru static, și deci se pot determina trei necunoscute (fig. 6, *a*). Cînd structura este alcătuită din mai multe porțiuni, formînd împreună un sistem geometric invariabil și ale cărui rezemări reprezintă trei legături, situația este similară. Reacțiunile din rezemări se obțin aplicînd ecuațiile de echilibru static asupra ansamblului structurii. Astfel, pentru cazul din figura 6, *c*, se determină pe această cale reacțiunile H_1 și V_1 din articulația *1*, precum și reacțiunea H_2 din reazemul simplu *2*. Forțele de legătură interioare H_4, V_4 și N_{35} pot fi aflate izolînd *una* dintre porțiunile rigide și exprimîndu-i echilibrul.

În general, pentru fiecare porțiune rigidă a structurii se pot scrie cîte trei ecuații; dacă structura este alcătuită din c porțiuni, numărul total de ecuații este $3c$, în care intră toate forțele de legătură exterioare și interioare. Aceste ecuații cuprind și ecuațiile de echilibru corespunzătoare ansamblului structurii, care se regăsesc sumînd ecuațiile respective referitoare la porțiunile rigide (termenii provenind de la acțiunile reciproce din legăturile interioare se anulează doi cîte doi). Înseamnă că, folosind de la început ecuațiile de echilibru static pentru ansamblul structurii, nu se mai pot aplica în continuare decît ecuațiile de echilibru pentru $c-1$ porțiuni rigide; ecuațiile corespunzătoare ultimei porțiuni servesc *pentru verificare*.

Cînd la o structură static determinată numărul de legături în rezemări este mai mare decît trei, cele trei ecuații de echilibru aplicate ansamblului

structurii nu mai sînt suficiente pentru aflarea reacțiunilor. Restul ecuațiilor necesare se obțin din echilibrul unora dintre porțiuni, considerînd desfăcute anumite legături. Structura din figura 6, *b* are patru reacțiuni necunoscute în rezemări; ecuația necesară în plus rezultă de exemplu din echilibrul porțiunii *1-3* folosind o ecuație de momente[1] în raport cu punctul *3*. Se elimină astfel forțele de legătură H_3 și V_3, în ecuație rămînînd numai reacțiunile H_1 și V_1.

c. **Părți principale și părți secundare ale unui structuri.** La structuri alcătuite din mai multe corpuri rigide, nu se utilizează separarea acestora decît în măsura strict necesară pentru aflarea forțelor de legătură *utile* la determinarea eforturilor. Obișnuit, cunoașterea acțiunilor reciproce din legăturile interioare nu este utilă, fiind suficientă aflarea reacțiunilor din rezemări. Înseamnă că trebuie dată atenție numai acestora, folosind ecuațiile de echilibru static pentru ansamblul structurii, împreună cu alte condiții rezultate din particularități de alcătuire (de exemplu, condiții de moment încovoietor nul în articulațiile din cuprinsul structurii).

La unele structuri static determinate poate fi utilă desfacerea în părți principale și secundare, care scoate mai clar în evidență funcțiunea și modul de comportare a acestor părți. Ori de cîte ori o parte a structurii — considerată separat — este geometric invariabilă și fixată în plan prin ea însăși, aceasta preia singură toate sarcinile aplicate direct asupra sa, fără ca celelalte părți să fie solicitate. Asemenea părți poartă numele de *părți principale*, de exemplu partea *1-2-3* din figura 7, *a*, care poate prelua singură sarcina P_1. Pot exista și *părți secundare*, care sînt geometric invariabile și fixate în plan numai datorită

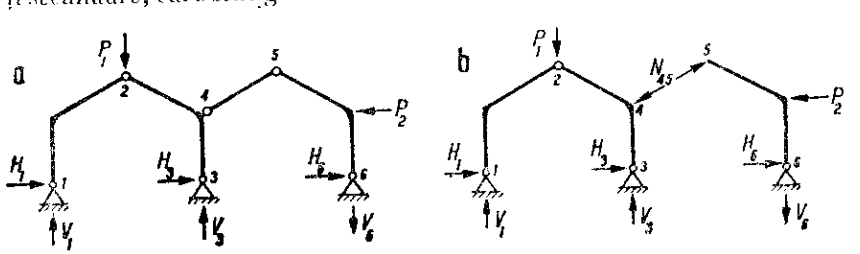


Fig. 7

sprijinirii pe părțile principale. Sarcinile aplicate pe o parte secundară (de exemplu sarcina P_2 aplicată pe partea secundară *4-5-6* din figura 7, *a*) produc efecte atît în partea respectivă, cît și în părțile principale de care aceasta este legată.

O astfel de separare în părți a structurii se vede în figura 7, *b*. Calculul reacțiunilor începe cu partea secundară *4-5-6*, determinînd pe N_{45}, H_6 și V_6. Se trece apoi la partea principală *1-2-3*, care are patru necunoscute H_1, V_1, H_3 și V_3; pentru aflarea lor se folosesc trei ecuații de echilibru core-

[1] Această ecuație este echivalentă cu condiția de moment încovoietor nul în articulația *3* (v. paragr. următor).

punzătoare ansamblului structurii, precum și condiția de moment încovoietor nul în articulația 2. De remarcat că dacă articulația 4 ar fi plasată pe rigla din stînga nodului central, atunci partea principală ar fi 3-5-6, care ar suporta singură sarcina P_2, în timp ce sarcina P_1 aplicată pe partea secundară 1-2-4 ar solicita întreaga structură.

2. Determinarea eforturilor

După aflarea reacțiunilor, devin cunoscute toate forțele exterioare care asigură echilibrul structurii. Se poate trece mai departe la determinarea eforturilor din secțiuni. Pentru aceasta se utilizează *metoda secțiunilor*: se admite că se taie structura în secțiunea respectivă, înlocuind efectul continuității de material prin forțele de legătură corespunzătoare, reprezentate de perechi de acțiuni reciproce aplicate pe cele două fețe ale secțiunii (fig. 8, *a-b*). Aceste acțiuni reciproce poartă numele de *eforturi* [1]. Structura rezultă astfel separată în două părți, fiecare dintre acestea fiind în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare aferente și a eforturilor aplicate asupra sa.

Eforturile se determină folosind condiția de echilibru static, în mod asemănător ca la determinarea reacțiunilor. La structuri plane, secționarea unei bare introduce *trei* necunoscute, întrucît cele două părți ale barei pot fi considerate încastrate una în alta. Pentru aflarea eforturilor sînt disponibile *trei* ecuații, și anume ecuațiile de echilibru static ale *uneia* dintre porțiunile izolate prin secționare (la determinarea reacțiunilor au fost folosite ecuațiile de echilibru corespunzătoare ansamblului structurii).

Pentru porțiunea din stînga, reducerea tuturor forțelor exterioare ce-i revin — în raport cu centrul de greutate al secțiunii — conduce la rezultante egale și direct opuse cu eforturile aplicate pe fața din stînga, deci tocmai la eforturile aplicate pe fața din dreapta a secțiunii. Analog, reducerea tuturor forțelor exterioare aplicate pe porțiunea din dreapta, în raport cu centrul de greutate al secțiunii, conduce la determinarea eforturilor aplicate pe fața din stînga. Eforturile dintr-o secțiune fiind reprezentate prin *perechi* de forțe sau momente N, T și M, aplicate pe cele două fețe ale secțiunii, fixarea unei convenții de semne implică să se aleagă *una dintre fețe*, în raport cu care să se facă totdeauna determinarea eforturilor.

Pentru aceasta s-a convenit să se aleagă *fața din dreapta* a secțiunii, în raport cu sensul de parcurgere admis pe bară. Rezultă că *eforturile dintr-o secțiune se obțin prin reducerea, în raport cu centrul său de greutate, a tuturor forțelor exterioare aplicate la stînga secțiunii*. Particularizînd pentru cele trei eforturi și folosind denumirile cunoscute din Rezistența materialelor, rezultă:

(1) *Forța axială* N este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe normala la secțiune a tuturor forțelor exterioare situate la stînga secțiunii.

---

[1] Eforturile reprezintă *rezultantele* acțiunilor reciproce care se dezvoltă pe elementele de suprafață ale secțiunii considerate, notate în Rezistența materialelor sub forma $\sigma\,dA$ și $\tau\,dA$, unde dA este aria elementului de suprafață, iar σ și τ — *eforturile unitare*.

(2) *Forța tăietoare* T este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe planul secțiunii a tuturor forțelor exterioare situate la stînga secțiunii.

(3) *Momentul încovoietor* M este egal cu suma algebrică a momentelor, în raport cu centrul de greutate al secțiunii, a tuturor forțelor exterioare situate la stînga acesteia.

Aceleași eforturi se obțin considerînd forțele exterioare *de la dreapta secțiunii*, luate însă *cu sens schimbat*.

Sensurile *pozitive* ale eforturilor sînt arătate în figurile 8, *c* și *d* pentru o bară dreaptă sau curbă a unei structuri plane. Ele sînt definite în raport cu sistemul de axe al secțiunii considerate, format din axa barei (respectiv tangenta la axă în secțiune) și din normala la aceasta, avînd orientarea stabilită în raport cu sensul de parcurgere ales. Forțele N și T pozitive sînt dirijate în

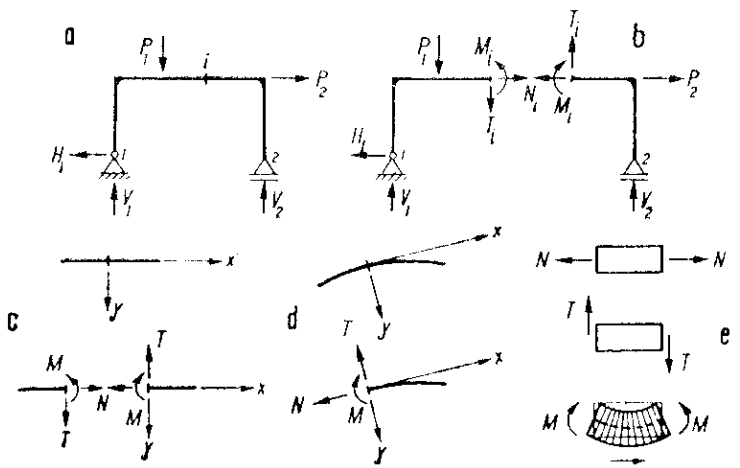


Fig. 8

sens contrar sensului pozitiv al axelor x și y, iar momentul încovoietor este pozitiv cînd rotește *în sens orar*. Pe fața din stînga a secțiunii, eforturile pozitive au sensurile inversate.

Efectele date de eforturile ce se dezvoltă într-o bară rezultă considerînd acțiunea lor asupra unui element ds de bară (fig. 8, *e*), unde s-au admis eforturi *pozitive*:

— forța axială supune elementul la întindere, producînd o mărire a lungimii acestuia prin deformare; forței axiale negative îi corespunde comprimarea elementului;

— forța tăietoare conduce la o deformare unghiulară în sens orar a elementului, provocată de deplasarea relativă a fețelor acestuia după normala la axă;

— momentul încovoietor provoacă o rotire relativă între fețele elementului, acestea rotindu-se în jurul unor axe cuprinse în planele fețelor și trecînd prin centrele lor de greutate; rezultă o încovoiere a elementului de grindă.

Convenția de semne pentru momente încovoietoare este legată de sensul de deformare; momentelor încovoietoare pozitive le corespunde *sensul pozitiv de încovoiere al barei*, stabilit în raport cu sensul de parcurgere. Fibra întinsă a barei va fi spre partea dinspre care sensul de parcurgere ales se vede stînga-dreapta[1]. Alegînd deci pentru fiecare bară a structurii un sens de parcurgere, se stabilește implicit sensul pozitiv de încovoiere al barei și deci convenția de semne pentru momente încovoietoare. În figura 9, *a-c* sînt date unele exemple referitoare la grinzi drepte. La grinda simplu rezemată, deformata

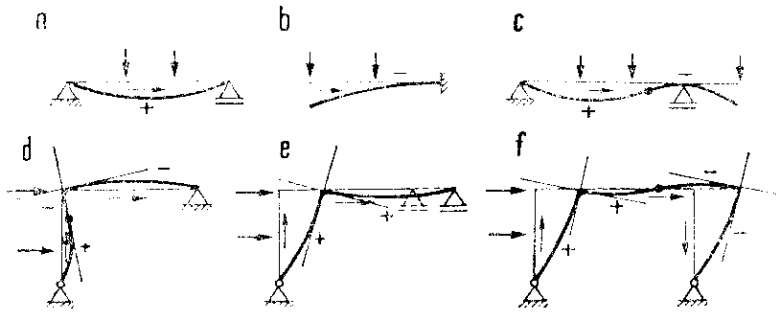


Fig. 9

are în întregime sens pozitiv de încovoiere, deci în toate secțiunile se vor dezvolta momente încovoietoare pozitive; la grinda încastrată, situația va fi inversă. La grinda cu consolă, pe porțiunea pînă la punctul de inflexiune deformarea se produce în sens pozitiv, și deci în secțiuni apar momente încovoietoare pozitive, în timp ce pe rest deformarea se face în sens negativ și momentele încovoietoare vor fi negative.

În figurile 9, *d-f* este exemplificată convenția de semne la unele grinzi cotite și cadre, arătîndu-se — în funcție de sensul de parcurgere ales — semnele care rezultă pentru sensul de încovoiere și pentru momentele încovoietoare din secțiuni. Astfel, la grinda cotită din figura 9, *d*, care are reazem fix în dreapta, încovoierea se produce în sens pozitiv pînă la punctul de inflexiune de pe stîlp, iar mai departe — în sens negativ. Dacă în dreapta este reazem simplu (fig. 9, *e*), întreaga deformare se face în sens pozitiv.

3. Structuri static determinate

a. **Condiția de determinare statică.** O structură plană oarecare, alcătuită din mai multe corpuri rigide, poate fi caracterizată din două puncte de vedere:

(1) Comparînd numărul total de legături cu numărul de corpuri, se stabilește *condiția de invariabilitate geometrică și fixare în plan*, dată de relația (1.2)

[1] Pentru claritate, sensul de parcurgere ales se reprezintă printr-o săgeată, care se așează de partea fibrei întinse corespunzătoare încovoierii în sens pozitiv.

sub forma $l+r=3c$, unde $l+r$ reprezintă numărul *minim* de legături care trebuie prevăzut. Orice legătură în plus peste acest număr minim reprezintă o legătură suplimentară pentru structură.

(2) Comparînd numărul de forţe de legătură din rezemări şi legături interioare cu numărul total de ecuaţii de echilibru static disponibile, se stabileşte *condiţia de determinare statică*. Aceasta cere ca numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuaţiilor, deci condiţia de echilibru static să fie suficientă pentru determinarea forţelor de legătură. Numărul de necunoscute este $l+r$, iar numărul de ecuaţii este $3c$ (cîte trei ecuaţii pentru fiecare corp); egalînd, se ajunge tot la relaţia $l+r=3c$.

Înseamnă că ambele aspecte examinate conduc la aceeaşi relaţie generală de condiţie, care se poate scrie sub forma

$$d=l+r-3c=0. \tag{1.4}$$

Această relaţie reprezintă atît condiţia de invariabilitate geometrică şi fixare în plan, cît şi condiţia de determinare statică. Se poate deci enunţa următoarea definire: *structurile static determinate au numărul minim de legături necesar pentru asigurarea invariabilităţii geometrice şi a fixării în plan*. Această definire are avantajul de a fi completă, deoarece se referă atît la numărul legăturilor, cît şi la distribuţia lor, eliminînd astfel cazurile de excepţie care vor fi amintite mai departe.

Considerînd sub formă generală diferenţa $d=l+r-3c$ dintre numărul necunoscutelor şi al ecuaţiilor disponibile, în afară de cazul $d=0$ care corespunde structurilor static determinate, se mai pot întîlni două cazuri:

— Cînd $d<0$, deci $l+r<3c$, înseamnă că numărul de legături nu este suficient pentru a asigura invariabilitatea geometrică a sistemului. Rezultă un *mecanism* care are posibilităţi de deplasare cinematică. Pentru fiecare legătură care lipseşte faţă de numărul minim necesar, în sistem apare cîte o posibilitate distinctă de deplasare, permisă de legăturile existente. Aceste posibilităţi distincte de deplasare poartă numele de *grade de libertate* şi numărul lor este egal cu diferenţa *negativă* d.

— Cînd $d>0$, deci $l+r>3c$, există în alcătuirea structurii un surplus de legături faţă de cel minim necesar, numărul lor fiind dat de diferenţa *pozitivă* d. Semnificaţia diferenţei apare privind forţele de legătură ca necunoscute ale problemei: condiţia de echilibru static nu mai este suficientă pentru aflarea forţelor de legătură, şi deci structura este *static nedeterminată*, d reprezentînd numărul gradelor de nedeterminare.

Unele exemple sînt date în figura 10. Arcul din figura 10, *a* este static determinat, deoarece are în rezemări trei legături şi deci $d=0$ ($l=0$, $r=3$, $c=1$). Dacă în cursul barei curbe se introduce o articulaţie (fig. 10, *b*), numărul legăturilor se reduce cu o unitate, şi deci rezultă un sistem cu un grad de libertate ($l=2$, $r=3$, $c=2$). Cînd ambele capete ale barei curbe sînt articulate (fig. 10, *c*), arcul este o dată static nedeterminat deoarece $r=4$. Cadrul din figura 10, *d* este static determinat ($l=2$, $r=4$, $c=2$), în timp ce sistemul din figura 10, *e* are un grad de libertate ($l=4$, $r=4$, $c=3$); cadrul din figura 10, *f* este de două ori static nedeterminat ($l=2$, $r=6$, $c=2$). Aplicînd acelaşi proce-

deu la grinzile din figurile 10, *g* și *h*, se constată că prima este static determinată ($l=4$, $r=5$, $c=3$), iar a doua are un grad de libertate ($l=6$, $r=5$, $c=4$).

La aplicarea relației (1.4), care caracterizează structurile static determinate, trebuie ținut seama că numai controlul numeric $d=l+r-3c=0$ nu este totdeauna suficient pentru a dovedi că structura este efectiv static determinată. Astfel, la sistemul din figura 10, *i*, relația dă același rezultat ca la grinda din figura 10, *g*, numărul legăturilor și al corpurilor fiind același. Legătu-

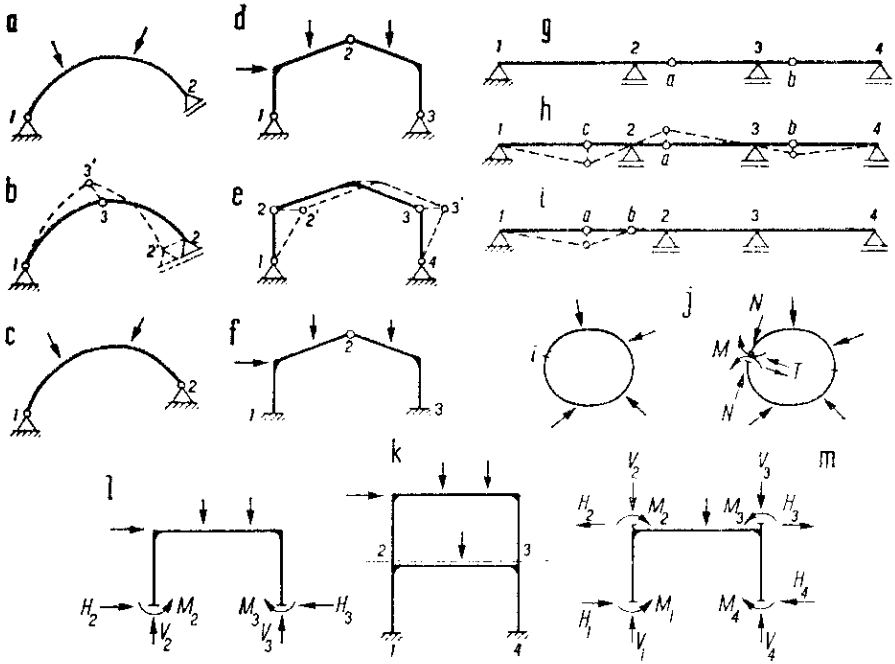


Fig. 10

rile sînt însă altfel distribuite: așezarea succesivă a articulațiilor *a* și *b* creează un grad de libertate pe porțiunea 1-*b* (este posibilă deplasarea arătată punctat), iar așezarea consecutivă a reazemelor *2*, *3* și *4* conduce la un grad de nedeterminare statică pe porțiunea *2-4*. Se ajunge astfel la concluzia: *verificarea îndeplinirii condiției de determinare statică trebuie făcută atît pe ansamblul structurii, cît și pe porțiuni*.

O problemă importantă, legată de evaluarea diferenței $d=l+r-3c$, se referă la structuri care au în alcătuirea lor *contururi închise*. Un asemenea contur, la care continuitatea nu este întreruptă, este de *trei ori static nedeterminat*, cum rezultă din figura 10, *j*. Admițînd cunoscute forțele exterioare care asigură echilibrul conturului, nu este totuși posibil să se afle eforturile dintr-o secțiune oarecare pe calea arătată în figurile 8, *a-b*, deoarece secțio-

narea în acel punct nu separă conturul în două porțiuni. Numai dacă cele trei eforturi dintr-o anumită secțiune ar fi cunoscute, atunci s-ar putea trece la determinarea eforturilor din orice altă secțiune a conturului.

Fie cadrul din figura 10, *k*, care are în rezemări $r=6$ legături. Dacă s-ar considera întregul cadru ca un singur corp, rezultă $d=3$, deoarece $l=0$ și $c=1$. Rezultatul arată că acest cadru este de trei ori static nedeterminat *exterior*; mai trebuie ținut seama și de conturul închis existent (etajul superior), care aduce trei nedeterminări *interioare*. În total, cadrul este de șase ori static nedeterminat. Acest rezultat se poate obține direct considerînd cadrul compus din două corpuri, arătate în figurile 10, *l* și *m*; în acest caz, $l+r=12$ (cîte trei necunoscute în secțiunile *1*, *2*, *3*, *4*) și $c=2$, deci $d=+6$. Pentru a elimina orice posibilitate de erori la evaluarea diferenței $d=l+r-3c$, se recomandă ca — la structuri ce au în alcătuirea lor contururi închise — *alegerea porțiunilor rigide care alcătuiesc structura*[1] *să fie astfel făcută încît să se elimine contururile închise*.

b. **Caracteristicile structurilor static determinate.** Caracteristica principală a acestor structuri constă în egalitatea dintre numărul necunoscutelor (forțe de legătură) și cel al ecuațiilor de echilibru static disponibile. Reacțiunile și eforturile pot fi deci aflate folosind *numai condiția de echilibru static*, aplicată structurii în poziția inițială. Prin aceasta, cele două probleme de bază ale Staticii construcțiilor — și anume (1) determinarea reacțiunilor și eforturilor, (2) studiul poziției deformate — devin independente, în sensul că prima poate fi rezolvată complet fără a lua în considerare pe a doua; aceasta din urmă se soluționează apoi separat, pe baza rezultatelor obținute de la prima.

La structuri static nedeterminate, situația este diferită, cele două probleme devenind interdependente, deoarece numărul necunoscutelor este mai mare decît al ecuațiilor de echilibru static; sînt necesare ecuații suplimentare, care se obțin folosind condiția de compatibilitate a poziției deformate. Înseamnă că la structuri static nedeterminate reacțiunile și eforturile se determină folosind atît condiția de echilibru static, cît și condiția de compatibilitate.

La o structură static determinată oarecare, sistemul ecuațiilor de echilibru static are forma generală

$$a_{i1}X_1+\ \dots\ +a_{ii}X_i+\ \dots\ +a_{in}X_n+A_i=0,\quad (i=1, 2, \dots n),$$

unde $X_1, \dots, X_n$ sînt cele $l+r$ forțe de legătură necunoscute. În formulare matriceală sistemul se scrie

$$\mathbf{AX}+\mathbf{A}_s=0, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}\dots a_{1j}\dots a_{1n}\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{i1}\dots a_{ij}\dots a_{in}\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{n1}\dots a_{nj}\dots a_{nn}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_1\\ \cdot\\ \cdot\\ X_i\\ \cdot\\ \cdot\\ X_n\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}_s=\begin{bmatrix} A_1\\ \cdot\\ \cdot\\ A_i\\ \cdot\\ \cdot\\ A_n\end{bmatrix},$$

[1] Separarea structurii în cele *c* corpuri rigide componente poate fi făcută în diferite moduri, cu condiția de a introduce în valoarea *l* toate forțele de legătură din secțiunile de separare.

unde matricea pătrată $\mathbf{A}$ cuprinde toți coeficienții necunoscutelor, iar matricele-coloană $\mathbf{X}$ și $\mathbf{A}_s$ conțin necunoscutele și respectiv termenii liberi. Elementele matricei $\mathbf{A}$ depind numai de alcătuirea și configurația geometrică a structurii; matricea reprezintă deci o caracteristică a acesteia. Într-adevăr, deoarece echilibrul se exprimă prin ecuații de proiecții și momente, elementele a_{ij} ale matricei sînt fie funcții trigonometrice de unghiurile dintre forțele de legătură și axele de proiecții, fie brațe de pîrghie. În termenii liberi A_i apar sarcinile.

Rezolvînd sistemul de ecuații, valorile necunoscutelor rezultă sub forma

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_s,$$

unde matricea $\mathbf{A}^{-1}$ se obține prin inversarea matricei $\mathbf{A}$ a coeficienților necunoscutelor. Inversarea este posibilă cît timp matricea $\mathbf{A}$ este nesingulară, deci $D[\mathbf{A}] \neq 0$ (determinantul matricei este diferit de zero). În acest caz se obține o serie bine definită de valori ale necunoscutelor și numai una singură; soluția problemei este deci *unică*. Proprietatea de unicitate poate fi deseori folosită avantajos pentru rezolvare: *oricare ar fi calea utilizată, dacă se găsește pentru necunoscute o serie de valori care satisfac ecuațiile de echilibru static, aceasta este soluția corectă.*

În cazul excepțional cînd $D[\mathbf{A}]=0$, inversarea matricei $\mathbf{A}$ nu se poate face și deci din ecuațiile de echilibru static nu se pot obține valorile necunoscutelor[1], deși condiția (1.4) este îndeplinită. Înseamnă că sistemul de ecuații, așa cum a fost scris, nu este aplicabil; cazul respectiv nu corespunde deci premiselor admise la scrierea ecuațiilor: raportarea ansamblului forțelor exterioare la poziția nedeformată a structurii, considerînd că poziția deformată se menține în domeniul micilor deplasări.

Rezultă că alcătuirea structurii conduce la deformări mari și este improprie pentru folosire; aceasta corespunde *unei lipse de strictă invariabilitate geometrică* (formă critică), în înțelesul discutat în legătură cu figura 4. Cazul $D[\mathbf{A}]=0$ oglindește deci posibilitatea existenței structurilor cu formă critică; *o astfel de formă se datorește exclusiv unei situații particulare în alcătuirea structurii*. Condiția $D[\mathbf{A}]=0$ poate fi folosită drept criteriu pentru identificarea sistemelor cu formă critică, cum se arată în capitolul IV.

O altă caracteristică a structurilor static determinate se referă la modul lor de comportare, cînd sînt supuse la variații de temperatură sau la cedări de rezemări produse de diferite cauze (de exemplu, tasarea terenului): efectul acestor cauze constă *numai într-o modificare a configurației geometrice* a structurii. Deoarece numărul legăturilor este cel minim necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan, modificarea formei sau poziției porțiunilor rigide — datorită cauzelor menționate — nu întîmpină nici o opunere din partea legăturilor, astfel că *în structură nu se dezvoltă eforturi*

[1] Dacă necunoscutele sînt scrise sub forma $X_i = D_i/D$, unde D este determinantul matricei coeficienților a_{ij}, se vede că pentru $D=0$ valorile necunoscutelor ar deveni infinite cînd $D_i \neq 0$ respectiv nedeterminate pentru $D_i=0$. Acest rezultat nu poate corespunde unei comportări reale a structurii, și deci este eronat.

Astfel, creșterea uniformă de temperatură din figura 11, *a* duce la mărirea unghiurilor dintre bare; porțiunile *1-2-3* și *3-4-5* se deplasează ca niște corpuri rigide,

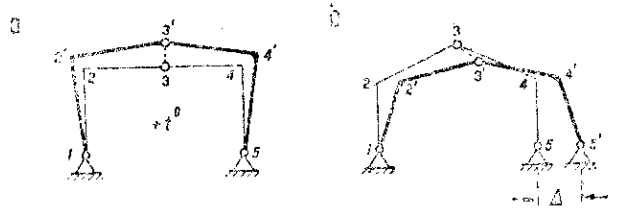


Fig. 11

ajungînd în pozițiile *1-2'-3'* și *3'-4'-5*. Situația este asemănătoare și în cazul din figura 11, *b*, unde intervine o deplasare pe orizontală a rezemării *5*. Spre deosebire de această comportare, dacă în rezemările *1* și *5* ar fi încastrări și deci structura ar deveni static nedeterminată, surplusul de legături s-ar opune modificării de configurație, astfel că variația de temperatură sau cedarea de reazem ar conduce la dezvoltare de eforturi în întreaga structură.

4. Mijloace de operare grafică

a. **Utilizarea condiției de concurență a trei forțe.** Un caz des întîlnit este acela al echilibrului unui corp supus la acțiunea a numai trei forțe. Din

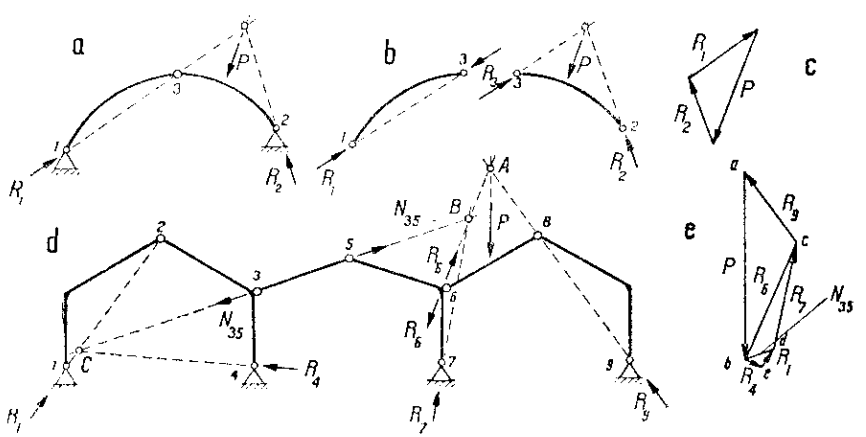


Fig. 12

Mecanică se știe că pentru echilibru este necesar ca *forțele să fie coplanare și să aibă suporturile concurente*. Condiția de concurență permite rezolvarea simplă a numeroase probleme; exemple sînt date în figura 12.

Arcul cu trei articulații din figura 12, *a* este încărcat cu sarcina P; în rezemări se dezvoltă reacțiunile R_1 și R_2, avînd direcții și mărimi inițial

necunoscute. Desfăcînd articulația 3, se ajunge la situația din figura 12, *b*. Porțiunea din stînga nu este încărcată și este acționată numai de forțele R_1 și R_3, care pentru echilibru trebuie să fie egale și direct opuse (să aibă același suport). Suportul reacțiunii R_1 trebuie deci să treacă prin articulația 3. Porțiunea din dreapta este supusă la acțiunea a trei forțe: R_3, P și R_2, din care primele două au direcții cunoscute; se poate determina și direcția reacțiunii R_2, folosind condiția de concurență. O dată cunoscute direcțiile reacțiunilor R_1 și R_2, mărimile lor rezultă construind un poligon închis format din R_1, P și R_2 (fig. 12, *c*).

Reacțiunile structurii din figura 12, *d* pot fi determinate în mod asemănător, folosind echilibrul părților secundare *6-8-9* și *3-5-7*, precum și al părții principale *1-2-4*, care rezultă prin desfacerea articulațiilor *3* și *6*. Pentru porțiunea *6-8-9*, reacțiunea R_9 are ca suport dreapta *8-9*, deoarece bara cotită *8-9* nu este încărcată; direcția acțiunii reciproce din rezemarea *6* se determină prin condiția de concurență în punctul *A* a forțelor R_6, P și R_9. Pentru porțiunea *3-5-7*, încărcarea este reprezentată de către R_6, care intervine aici cu sens inversat. În bara dublu articulată *3-5*, neîncărcată direct, se dezvoltă numai forța axială; prin condiția de concurență în punctul *B* se determină direcția reacțiunii R_7. Porțiunea principală *1-2-4* este încărcată cu N_{35}; situația este similară cu cea din figura 12, *a*, astfel că suportul reacțiunii R_1 trebuie să treacă prin articulația 2, iar condiția de concurență în punctul *C* determină și direcția reacțiunii R_4.

Se pot acum determina mărimile reacțiunilor și construi epura din figura 12, *e*, unde apar succesiv poligoane închise de forțe pentru porțiunile considerate, și anume $a \to b \to c$ pentru *6-8-9*, $c \to b \to d$ pentru *3-5-7* și $d \to b \to e$ pentru *1-2-4*. Conturul închis $a \to b \to e \to d \to c$, format din sarcina P și cele patru reacțiuni din rezemări, verifică condiția de echilibru a întregii structuri.

b. **Momentul unui grup de forțe în raport cu un punct.** Se obține grafic folosind poligonul funicular; semnificația și proprietățile acestuia sînt cunoscute din Mecanică[1].

Pentru un grup oarecare de forțe $P_1, \ldots, P_n$, rezultanta R_{1n} se găsește ca mărime și direcție în poligonul forțelor, iar ca poziție în poligonul funicular (fig. 13, *a*), trecînd prin punctul de intersecție al laturilor extreme ale acestuia. Față de un punct oarecare *A* din plan, momentul grupului de forțe este

$$\sum P_i a_i = aR_{1n},$$

unde a_i este distanța de la punct la forța curentă P_i, iar a distanța de la punct la rezultantă. Prin punctul *A* se duce o paralelă la rezultantă, care intersectează laturile extreme φ_0 și φ_n ale poligonului funicular în punctele M și N, determinînd segmentul $\overline{MN} = m$. În poligonul forțelor se coboară din pol o perpendiculară pe rezultantă, a cărei mărime este H (distanța polară). Din triunghiurile asemenea BMN și OA_0A_n se obține $a/m = H/R_{1n}$, deci

$$\sum P_i a_i = aR_{1n} = mH. \tag{1.6}$$

[1] O prezentare succintă este dată în S.C.1 (p. 66–71).

Această relație arată că: *momentul unui grup de forțe, în raport cu un punct din plan, este egal cu segmentul interceptat de laturile extreme ale poligonului funicular pe o paralelă la rezultantă dusă prin punctul dat, multiplicat cu distanța polară.*

Analog se poate determina momentul — în raport cu punctul A — și numai pentru o parte dintre forțe, cu condiția ca acestea să fie *consecutive*. Astfel, pentru forțele $P_1, \ldots, P_j$ se determină în poligonul forțelor rezultanta R_{1j}

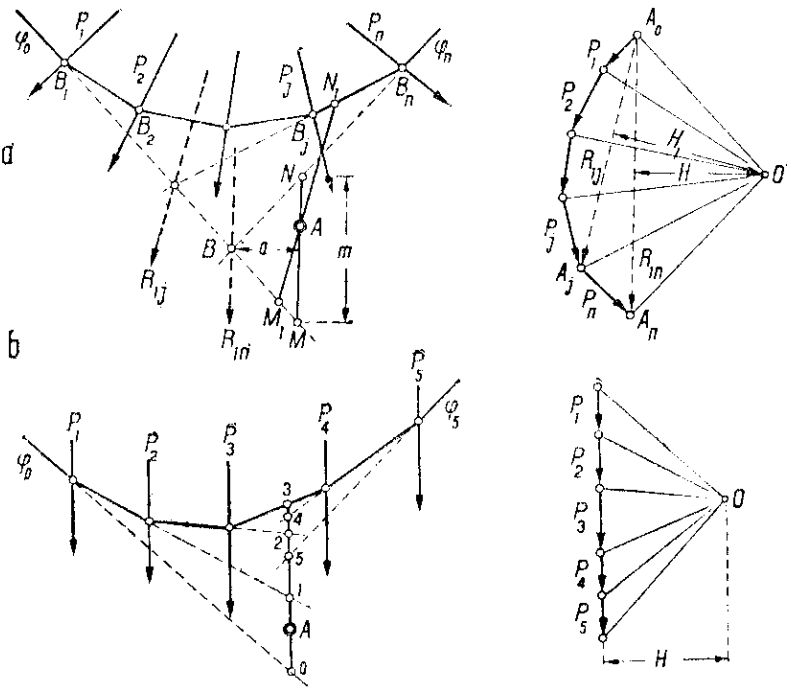


Fig. 13

și se duce prin A o paralelă la aceasta, pe care laturile extreme ale poligonului funicular (ce corespund grupului de forțe considerat) delimitează segmentul $\overline{M_1N_1}=m_1$. În acest caz distanța polară este H_1, astfel că momentul căutat are mărimea m_1H_1.

Variind poziția polului O, se modifică poligonul funicular, astfel că variază atît distanța polară H, cît și segmentul m; produsul lor rămîne însă neschimbat. Obișnuit, segmentul m se măsoară la scara lungimilor, iar H la scara forțelor, astfel că produsul mH reziltă cu dimensiune de moment. De fapt, oricare dintre segmentele m și H se poate măsura la scara lungimilor, cu condiția de a se măsura celălalt pe scara forțelor[1].

[1] Se poate construi și o scară pentru segmentul m, astfel ca acesta să dea direct valoarea momentului. Dacă scara lungimilor este 1 cm$=\alpha$ m, iar a forțelor 1 cm$=\beta$ kN, un centimetru de pe segmentul $MN=m$ reprezintă $\alpha\beta$ kNm, cînd distanța polară este pe epură $H=1$ cm. Pentru $H=\gamma$ cm, măsurați pe epură, un centimetru de pe segmentul m reprezintă $\alpha\beta\gamma$ kNm, astfel că se poate construi scara dorită.

În practică se întîlnește curent situația cînd toate forțele sînt *paralele*, obișnuit verticale (sarcini gravitaționale). În acest caz, construcția se simplifică, deoarece atît rezultanta grupului de forțe dat, cît și orice rezultantă parțială sînt paralele cu direcția comună a forțelor; totodată, distanța polară este aceeași oricare ar fi numărul de forțe considerat (fig. 13,*b*). Se poate astfel determina momentul unui număr variabil de forțe în raport cu punctul A, folosind o singură dreaptă dusă prin acest punct: momentul tuturor forțelor este dat de segmentul $\overline{05}$, al forțelor P_1 și P_2 este dat de segmentul $\overline{02}$ etc.

Se poate stabili și o convenție de semne pentru momente, cum rezultă imediat din figură. Pentru forțe dirijate în jos și pol situat la dreapta rezultantei (convexitatea funicularului în jos), momentele pozitive (sens orar) sînt reprezentate prin segmente la care parcurgerea *de la prima spre ultima latură de poligon funicular*, corespunzătoare segmentului respectiv, se face *în jos*. Pe această bază se poate scrie, considerînd succesiv fiecare forță și evidențiind semnul segmentului

$$\sum P_i a_i = (-\overline{01} - \overline{12} - \overline{23} + \overline{34} + \overline{45}) \cdot H = -\overline{05} \cdot H,$$

astfel că momentul forțelor date, în raport cu punctul A, rezultă negativ în cazul considerat.

c. **Condiția de echilibru static.** Se poate da o interpretare grafică ecuațiilor care exprimă condiția de echilibru a unui sistem oarecare de forțe în plan. Ecuațiile de proiecții $\Sigma X_i = 0$ și $\Sigma Y_i = 0$ se sintetizează în condiția $\Sigma \overline{P_i} = 0$, care arată că rezultanta sistemului de forțe trebuie să fie nulă. Această condiție poate fi pusă grafic în poligonul forțelor, care trebuie să rezulte *închis*, deci punctele inițial și final al conturului de forțe să se suprapună. Privitor la ecuația de momente, exprimarea ei trebuie căutată în poligonul funicular și se găsește cu ajutorul construcției examinate în figura 13.

Considerînd momentul tuturor forțelor în raport cu un punct oarecare din plan, acesta are mărimea mH. Ca momentul să fie nul, este necesar ca segmentul m să fie nul, deoarece H este luat arbitrar. Anularea segmentului este posibilă, pentru orice poziție a punctului A, numai dacă laturile extreme φ_0 și φ_n ale poligonului funicular se suprapun, deci cînd *poligonul funicular se închide*[1].

Se ajunge astfel la concluzia: *ca un sistem de forțe în plan să fie în echilibru, este necesar și suficient ca atît poligonul forțelor, cît și poligonul funicular să fie închise*. Utilizarea acestei condiții permite determinarea grafică a reacțiunilor și a eforturilor.

5. Aplicarea grafică a condiției de echilibru static

a. **Determinarea reacțiunilor și a eforturilor.** Se exemplifică această determinare pentru o bară cotită avînd ca rezemări o articulație și un reazem simplu. Construcția poligonului de forțe închis și a poligonului funicular închis se fac în paralel, pentru a-și furniza reciproc elementele necesare.

[1] Dacă poligonul forțelor se închide, dar poligonul funicular rămîne deschis, laturile extreme ale acestuia devin paralele; sistemul de forțe dat se reduce la un cuplu.

Se consideră mai întîi cazul cînd forțele exterioare sînt oarecare (fig. 14, *a*). Se începe poligonul forțelor cu forțele cunoscute P_2, P_3 și P_4, ducînd și razele polare corespunzătoare unui pol oarecare O; se mai știe că originea reacțiunii R_5 va fi în A_1, iar extremitatea reacțiunii R_1 în A_1. Latura funicularului paralelă cu raza polară OA_1 trebuie să sprijine pe suporturile forțelor R_1 și P_2: pentru R_1, singurul punct cunoscut de pe suportul său este articulația *1*.

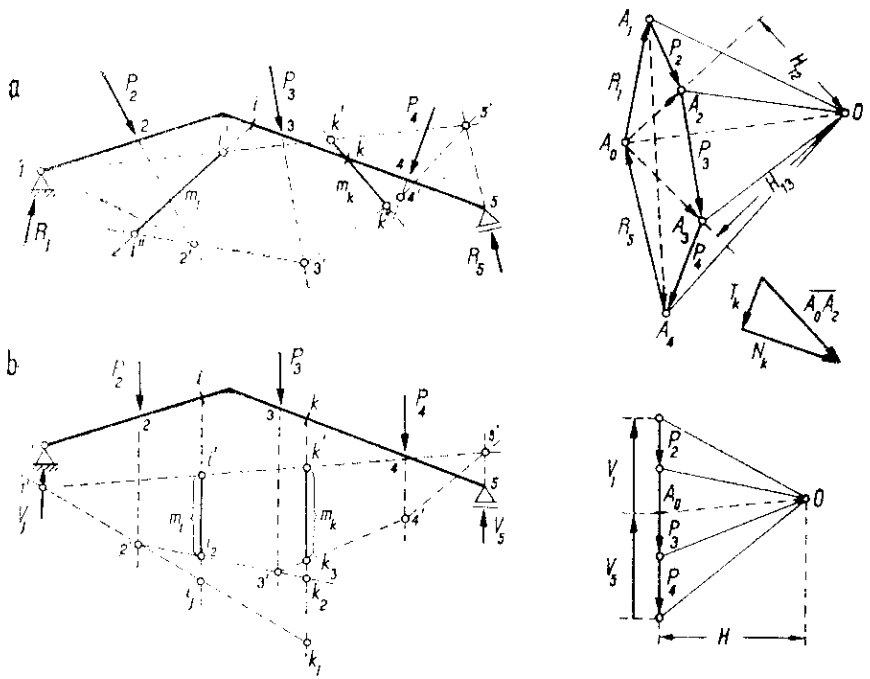


Fig. 14

Rezultă că din acest punct trebuie începută construcția poligonului funicular, trasînd laturile $1-2'$, $2'-3'$, $3'-4'$ și $4'-5'$; aceasta din urmă intersectează în punctul $5'$ suportul cunoscut al reacțiunii din reazemul simplu *5*. Ca funicularul să se închidă, prima și ultima latură trebuie să se suprapună; ambele laturi corespund razei polare din punctul A_0 de închidere a poligonului forțelor, care separă reacțiunile R_5 și R_1. Deoarece prima latură trebuie să plece din articulație, iar ultima din punctul $5'$, rezultă că poziția lor comună este dată de dreapta $1-5'$, care se numește *linia de închidere* a funicularului. Ducînd prin polul O o paralelă la aceasta, iar prin extremitatea A_4 a forței P_4 o paralelă la direcția reacțiunii R_5, se determină punctul A_0 care definește complet cele două reacțiuni căutate.

Pentru o secțiune oarecare *i*, eforturile se determină folosind rezultanta tuturor forțelor situate la stînga secțiunii (în cazul de față R_1 și P_2), care este

dată ca mărime și direcție de vectorul $\overline{A_0A_2}$ din poligonul forțelor. Proiecțiile rezultantei pe axa grinzii, respectiv pe normala la axă în punctul i, dau forța axială și forța tăietoare. Momentul încovoietor este egal cu suma momentelor forțelor R_1 și P_2 de la stînga secțiunii i, în raport cu centrul de greutate al acesteia. Folosind procedeul din figura 13, *a*, se determină segmentul $\overline{i'i''}=m_i$, interceptat pe o paralelă dusă prin i la rezultanta $\overline{A_0A_2}$ de către laturile *1-5'* și *2'-3'* ale funicularului. Mărimea momentului este $M_i=m_iH_{12}$, unde H_{12} este arătat în poligonul forțelor. În mod asemănător se pot determina eforturile dintr-o altă secțiune k; construcția se vede în figură.

O situație particulară este arătată în figura 14, *b*, unde atît sarcinile P_2, P_3 și P_4, cît și reacțiunile V_1 și V_5, au direcția comună verticală. În acest caz, poligonul funicular poate fi oarecare, deoarece direcția reacțiunii din articulația *1* este cunoscută și se poate determina punctul *1'* necesar ducerii liniei de închidere *1'-5'*. Mărimile reacțiunilor sînt definite de punctul A_0 din poligonul forțelor; pentru claritate, aceste reacțiuni se trasează într-o poziție puțin deplasată față de linia forțelor P_2-P_4, ca în figură. Momentele încovoietoare din secțiunile i și k sînt date de $M_i=m_iH$, respectiv $M_k=m_kH$, unde m_i și m_k sînt segmentele de pe verticalele centrelor de greutate ale secțiunilor, cuprinse între linia de închidere și funicular. Considerînd separat momentele forțelor de la stînga fiecăreia dintre aceste secțiuni, se poate scrie

$$M_i=(\overline{i'i_1}-\overline{i_1i_2})H=m_iH,\quad M_k=(\overline{k'k_1}-\overline{k_1k_2}-\overline{k_2k_3})H=m_kH,$$

cum s-a arătat în figura 13, *b*; ambele momente încovoietoare sînt pozitive.

b. **Poligonul funicular ca formă de echilibru.** Se poate da o interpretare sugestivă funicularului construit pentru un grup de forțe în plan, admițînd laturile sale materializate sub forma unor bare articulate între ele în punctele

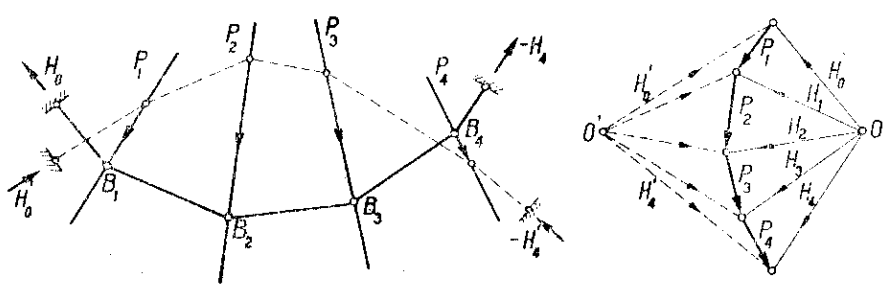


Fig. 15

de sprijinire pe suporturile forțelor. Laturile extreme se consideră fixate prin articulare de mediul înconjurător, iar forțele sînt privite drept sarcini aplicate în punctele de articulare dintre bare (fig. 15).

Lanțul de bare astfel obținut este în echilibru sub acțiunea acestor sarcini, deși reprezintă un sistem cu grade de libertate. Pentru justificare, se folosește descompunerea sarcinilor în componente după direcțiile barelor alăturate; se

știe că mărimile componentelor sînt date de razele polare corespunzătoare. Izolînd un nod, de exemplu B_3, acesta rezultă acționat de sarcina P_3 și de reacțiunile H_2 și $-H_3$ date de barele vecine; cele trei forțe formează un contur închis în poligonul forțelor, deci nodul este în echilibru. Asemănător se izolează o bară, de exemplu bara B_2-B_3; aceasta rezultă acționată pe direcția sa de componentele sarcinilor P_2 și P_3, care au sensuri opuse și mărimea comună H_2, deci bara este în echilibru.

Rezultă concluzia: *configurația unui poligon funicular, admisă materializată, reprezintă o formă de echilibru sub acțiunea sarcinilor pentru care a fost construită.* Dacă la alcătuirea unei structuri se utilizează această configurație, ea poate fi realizată dintr-o succesiune de bare supuse numai la eforturi axiale, avînd forma unui cablu sau a unui arc (funicularul trasat punctat, cu pol de cealaltă parte a poligonului forțelor). De reținut că structurile supuse numai la forțe axiale sînt cele mai avantajoase, încovoierea fiind un mod de solicitare dezavantajos. *Pentru susținerea unor sarcini, configurația cea mai indicată în alcătuirea unei structuri este cea care se apropie cît mai mult de un funicular al sarcinilor.* O soluționare în acest sens trebuie preferată ori de cîte ori caracteristicile cerute construcției permit aceasta.

Se știe că în construcția unui poligon funicular intervin *trei variabile* (poziția în plan a polului și a primei laturi), astfel că pentru un ansamblu de sarcini dat se pot construi o infinitate de funiculare. Funicularul particular care dă soluția căutată se obține prin determinarea celor trei variabile, pe baza condițiilor specifice ale problemei care se studiază. Asupra acestor aspecte se revine la studiul arcelor.

6. Curbe funiculare

a. **Mod de construire și caracteristici.** Poligonul funicular corespunde sarcinilor concentrate. Pentru o sarcină distribuită $p=f(x)$ se poate proceda asemănător, considerînd lungimea încărcată împărțită în intervale Δx și înlocuind încărcarea de pe aceste intervale prin sarcini concentrate paralele $\Delta P=p\Delta x$, aplicate în centrele de greutate ale porțiunilor respective din diagrama de încărcare. Pentru aceste sarcini se poate construi un poligon funicular. Micșorînd intervalele Δx, numărul laturilor funicularului crește și — la limită — poligonul funicular se transformă într-o curbă, numită *curba funiculară* a încărcării distribuite date.

Poligonul funicular construit pentru sarcinile concentrate ΔP reprezintă o formă aproximativă a curbei funiculare căutate; el poate servi la trasarea curbei, deoarece *conține puncte exacte ale acesteia* (fig. 16, *a*). Subdivizînd intervalele inițiale Δx pentru restrîngerea aproximației, crește numărul sarcinilor concentrate și al laturilor funicularului. Laturile care corespund razelor polare inițiale își păstrează poziția, dar se scurtează, deoarece sprijină pe cele două sarcini concentrate care încadrează punctele de diviziune. La limită, aceste laturi se reduc la punctele c_i, c_j, c_k, ..., care sînt astfel puncte

exacte ale curbei funiculare; se ajunge deci la concluzia: *trasarea curbei funiculare se face ducînd o curbă continuă, care să fie tangentă la laturile poligonului funicular în dreptul punctelor de separare a intervalelor* Δx. Acest procedeu permite să se împartă sarcina distribuită într-un număr limitat de porțiuni, trasînd totuși curba funiculară cu suficientă exactitate, ceea ce ușurează construirea.

Proprietățile poligoanelor funiculare se regăsesc și la curbe funiculare. Astfel, pentru o sarcină distribuită dată, curba funiculară reprezintă o formă de echilibru. Considerînd un cablu suspendat la capete și încărcat cu această sarcină, poziția de echilibru a cablului se stabilește după configurația curbei funiculare (fig. 16, *b*). Mai rezultă următoarele:

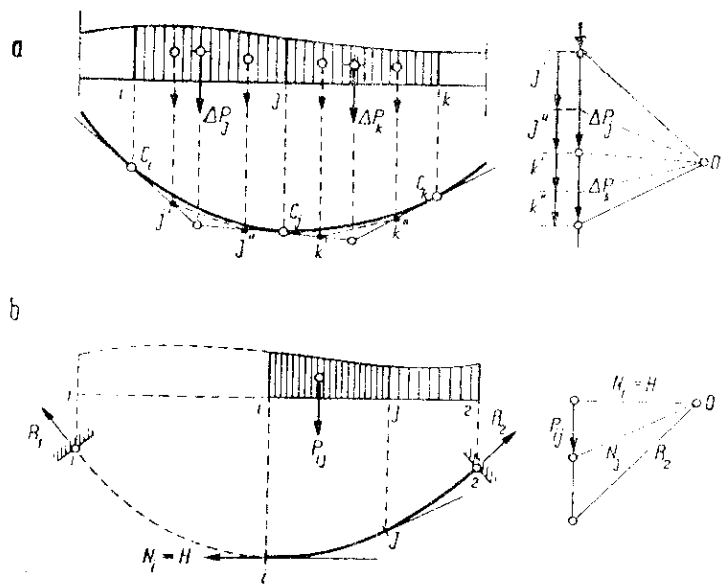


Fig. 16

(1) Efortul dintr-o secțiune oarecare a cablului este îndreptat după tangenta la curbă, iar mărimea sa este dată în poligonul forțelor de raza polară paralelă cu această tangentă. Cu cît înclinarea tangentei este mai mare, efortul din secțiunea corespunzătoare a cablului este mai mare. Eforturile maxime sînt cele din punctele de suspendare, în timp ce efortul minim se dezvoltă în secțiunea cea mai de jos a cablului (tangentă orizontală) și are mărimea egală cu distanța polară H.

(2) Proiecțiile pe orizontală ale eforturilor din diferitele secțiuni ale cablului sînt toate egale cu efortul minim. Proiecția pe verticală a efortului dintr-o secțiune j este egală cu încărcarea P_{ij} ce revine intervalului cuprins între

secțiune și secțiunea de tangentă orizontală. Ordonata acestei secțiuni împarte încărcarea totală în două porțiuni, care sînt egale cu componentele verticale ale reacțiunilor R_1 și R_2.

Determinarea celor trei variabile, care caracterizează construcția curbei funiculare, rezultă din condițiile particulare ale problemei studiate. Astfel, pentru un cablu, două condiții sînt date de poziția punctelor de suspendare, iar a treia condiție poate proveni din admiterea unui anumit efort maxim, din impunerea unei săgeți maxime etc.

b. **Ecuația diferențială a curbelor funiculare.** Fie o sarcină distribuită oarecare $p=f(x)$, pentru care s-a construit curba funiculară (fig. 17). Considerînd tangentele duse la curbă în două puncte vecine j și k, precum și razele polare paralele cu aceste tangente în poligonul forțelor, se poate scrie

$$\operatorname{tg}\theta_j = \frac{dy}{dx} = \frac{\overline{A_jA_0}}{H} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\theta_k = \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \frac{\overline{A_kA_0}}{H}.$$

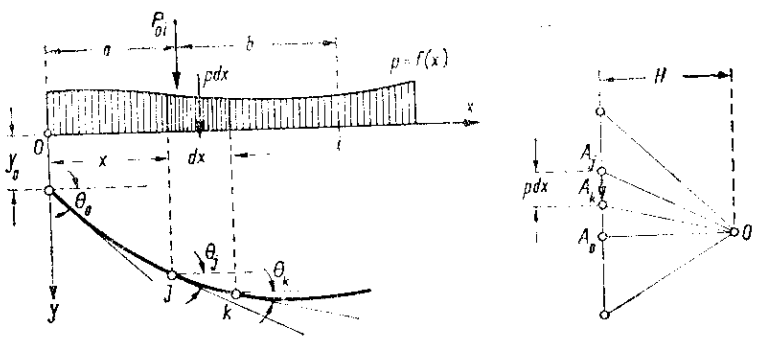


Fig. 17

Scăzînd prima relație din cea de-a doua, se obține

$$\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{\overline{A_kA_0} - \overline{A_jA_0}}{H} = -\frac{\overline{A_jA_k}}{H} = -\frac{pdx}{H},$$

astfel că rezultă

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -p, \tag{1.7}$$

care reprezintă *ecuația diferențială a curbelor funiculare*. Această ecuație are o importanță deosebită în Statica construcțiilor, deoarece conduce — pe baza analogiei de formă — la semnificația de curbă funiculară atît pentru curba momentelor încovoietoare, cît și pentru axa deformată, la strucuri din bare drepte.

Uneori este utilă și integrarea ecuației (1.7), care se poate face sub formă generală. Integrînd în intervalul de la origine pînă la poziția curentă i, se obține[1]

$$H(\operatorname{tg}\theta_i-\operatorname{tg}\theta_0)=-\int_0^i p\,dx=-P_{0i} \text{ și } H(y_i-y_0-x_i\operatorname{tg}\theta_0)=-\int_0^i P_{0i}\,dx=-M_{i0},$$

unde P_{0i} este rezultanta sarcinii distribuite din intervalul $0-i$, iar M_{i0} reprezintă momentul acestei rezultante, luat în raport cu punctul i. Introducînd pentru poziția curentă notarea uzuală x (în loc de i) rezultă că, prin integrarea ecuației diferențiale a curbelor funiculare, se obțin relațiile

$$H(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\theta_0)=-P_{0x} \quad \text{și} \quad H(y-y_0-x\operatorname{tg}\theta_0)=-M_{x0}. \tag{1.8}$$

care sînt ecuațiile tangentelor și ale ordonatelor curbei funiculare.

Cele trei variabile care caracterizează construirea curbelor funiculare se oglindesc în constantele arbitrare $\operatorname{tg}\theta_0$, y_0 și H; acestea se determină pe baza condițiilor particulare ale problemei care se studiază.

---

[1] La a doua relație, integrarea se face prin părți

$$\int_0^i P_{0i}dx=xP_{0i}\Big|_0^i-\int_0^i x\,dP_{0i}=x_iP_{0i}-\int_0^i x\,p\,dx,$$

unde ultima integrală reprezintă momentul static al sarcinilor elementare $p\,dx$ din intervalul $0-i$, în raport cu originea, care este egal cu aP_{0i}; rezultă

$$\int_0^i P_{0i}\,dx-x_iP_{0i}=aP_{0i}-bP_{0i}=M_{i0}.$$

CAPITOLUL II

GRINZI ȘI CADRE STATIC DETERMINATE

A. DIAGRAME DE EFORTURI LA STRUCTURI CU BARE DREPTE

1. Relații generale între sarcini și eforturi

Dimensionarea unei structuri necesită cunoașterea eforturilor produse în diferite secțiuni de acțiunea sarcinilor. Pentru *sarcini cu poziție fixă* se construiesc în acest scop *diagrame de eforturi*, care reprezintă modul cum variază fiecare efort în lungul barelor, oferind astfel o imagine a comportării structurii pentru sarcinile date. Trasarea diagramelor se face pe cale analitică sau grafică.

Construirea analitică a diagramelor de eforturi este ușurată de cunoașterea unor proprietăți generale ale acestor diagrame, care pot fi astfel schițate direct în funcție de sarcinile aplicate. Asemenea proprietăți au la bază relațiile generale ce se pot scrie între intensitatea încărcării și eforturile care apar în secțiunea curentă a unei bare. Folosind această cale, se poate aprecia de la început configurația diagramelor pe diferite porțiuni ale structurii, urmînd ca după aceasta să se determine mărimile ordonatelor, cu ajutorul ecuațiilor care reprezintă variația eforturilor considerate.

În cele ce urmează, se vor stabili relațiile diferențiale dintre sarcini și eforturi pentru cazul *barelor drepte*. Aceste relații sînt aplicabile la orice structură alcătuită din bare drepte, static determinată sau static nedeterminată, astfel încît concluziile stabilite aici vor fi general utilizate mai departe.

Izolînd un element dx dintr-o bară dreaptă, se obține situația din figura 18, *a*, unde — pentru asigurarea echilibrului — s-au aplicat pe cele două fețe ale elementului eforturile respective, considerate pozitive. Încărcarea elementară $p\,dx$, de direcție oarecare, s-a descompus în componentele sale $p_t\,dx$ și $p_n\,dx$; cantitățile dN, dT și dM reprezintă variațiile eforturilor pe intervalul dx. Ecuațiile de echilibru ale elementului (în care s-au eliminat infiniții mici de ordin superior) se scriu sub forma

$$-N+p_t dx+N+dN=0, \quad T-p_n dx-T-dT=0, \quad M+T dx-M-dM=0,$$

de unde, pentru secțiunea curentă a barei drepte, rezultă

$$\frac{dN}{dx}=-p_t, \quad \frac{dT}{dx}=-p_n, \quad \frac{dM}{dx}=T, \tag{2.1}$$

care reprezintă relațiile generale între sarcini și eforturi.

Aceste relații sînt deosebit de utile la trasarea diagramelor de eforturi, deoarece stabilesc corelații directe între legea de variație a încărcării în lungul barei și configurația diagramelor. Cunoscînd sarcinile aplicate pe bară, se identifică imediat caracteristicile ce rezultă pentru diagrame, și deci se pot schița ușor. Relațiile (2.1) arată că:

(1) Derivata forței axiale dintr-o secțiune este egală cu intensitatea componentei tangențiale a sarcinii în dreptul acelei secțiuni, luată cu semn schimbat; în fiecare secțiune, înclinarea tangentei la curba care mărginește diagrama forțelor axiale este $\operatorname{tg}\varphi_{(N)} = -p_t$.

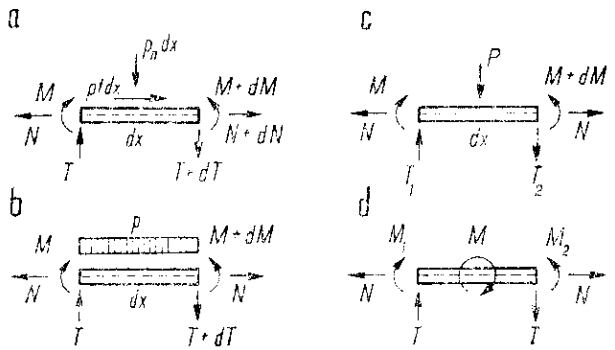


Fig. 18

(2) Derivata forței tăietoare dintr-o secțiune este egală cu intensitatea componentei normale a sarcinii în dreptul acelei secțiuni, luată cu semn schimbat; în fiecare secțiune, înclinarea tangentei la curba care mărginește diagrama forțelor tăietoare este $\operatorname{tg}\varphi_{(T)} = -p_n$.

(3) Derivata momentului încovoietor dintr-o secțiune este egală cu forța tăietoare din acea secțiune; în fiecare secțiune, înclinarea tangentei la curba care mărginește diagrama momentelor încovoietoare este $\operatorname{tg}\varphi_{(M)} = T$.

În practică se întîlnește deseori cazul sarcinilor aplicate normal pe axa barei. Notînd cu p intensitatea sarcinii în secțiunea curentă (fig. 18, *b*), relațiile (2.1) devin

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -p, \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T, \tag{2.2}$$

de unde rezultă că forța axială rămîne constantă în lungul barei. Pentru o lege de variație a încărcării $p = f(x)$ de un anumit grad, ecuația curbei care mărginește diagrama T va avea un grad mai mult, iar ecuația curbei care mărginește diagrama M va avea un grad în plus față de T, deci două grade mai mult ca $p = f(x)$. Astfel, pentru o porțiune de bară *neîncărcată*, forța tăietoare este *constantă*, deoarece $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$, iar momentul încovoietor variază *liniar*; cînd porțiunea de bară este încărcată cu o sarcină *uniform distribuită*, forța tăietoare variază *liniar* și momentul încovoietor variază după o *parabolă* de gradul 2.

Relațiile (2.1) și (2.2) se referă la cazul barelor drepte încărcate cu sarcini *distribuite*, cînd pe elementul de bară dx este aplicată sarcina elementară $p\,dx$. Se consideră acum cazul cînd elementul dx se găsește în dreptul punctului de aplicație al unei forțe concentrate (fig. 18, *c*), sau al unui moment exterior (fig. 18, *d*). Condiția de echilibru a elementului conduce la următoarele relații, cîte una pentru fiecare caz

$$T_2 - T_1 = -P, \qquad M_2 - M_1 = M.$$

Aceste relații arată că:

(a) În dreptul unei sarcini concentrate, în diagrama T apare un *salt* egal cu mărimea sarcinii, în sensul de acțiune al acesteia; deoarece în această secțiune forța tăietoare variază brusc, înseamnă că în diagrama M înclinarea tangentei variază brusc, deci apare un *vîrf*.

(b) În dreptul punctului de aplicație a unui moment exterior, în diagrama M apare un salt egal cu mărimea momentului, în sensul de acțiune al acestuia.

Aceste particularități nu afectează caracteristicile restului diagramei, care respectă relațiile generale (2.1) sau (2.2).

Din combinarea ultimelor două relații (2.2) se obține

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = -p, \quad \text{sau} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -p, \tag{2.3}$$

care este *ecuația diferențială a curbei momentelor încovoietoare*. Această ecuație este analoagă ecuației diferențiale a curbelor funiculare (1.6), și deci *curba momentelor încovoietoare este dată de un funicular al sarcinilor aplicate pe bară* (fig. 19); determinarea celor trei variabile ale funicularului se obține pe baza condițiilor de extremitate ale barei. Această constatare reprezintă punctul de plecare la construirea *pe cale grafică* a diagramelor de momente încovoietoare.

Tot relația (2.3) permite să se stabilească o caracteristică comună tuturor diagramelor de momente încovoietoare. Pentru sarcini acționînd în sensul admis pozitiv, cea de-a doua derivată a momentului încovoietor este negativă,

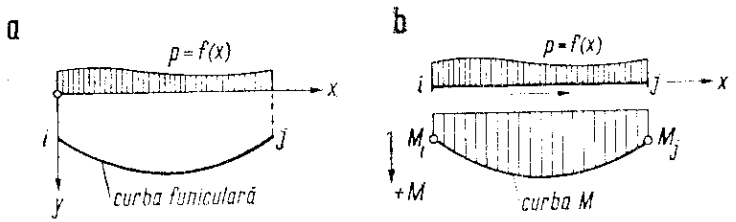


Fig. 19

deci *convexitatea curbei M apare îndreptată spre sensul +M al diagramei*, atît *în zonele pozitive cît și în zonele negative*. Dacă se consideră pozitive sarcinile îndreptate spre sensul de încovoiere pozitiv al barei, stabilit prin fixarea sensului de parcurgere, și dacă zonele pozitive ale diagramei M se reprezintă de partea fibrei întinse (fig. 19, *b*), *totdeauna convexitatea diagramei rezultă în direcția de acțiune a sarcinilor*.

2. Trasarea diagramelor de eforturi

a. **Caracteristicile diagramelor.** Proprietățile stabilite în paragraful precedent permit să se traseze direct diagramele T și M pentru bare drepte. Ca linie de referință se consideră chiar axa barei, ridicîndu-se în ordonată — în dreptul fiecărei secțiuni — mărimea corespunzătoare a efortului considerat. Privind bara dinspre sensul pozitiv de încovoiere admis (fața la care este așezată săgeata ce dă sensul de parcurgere), la diagrama T ordonatele pozitive se iau *deasupra* liniei de referință, în timp ce la diagrama M ordonatele pozi-

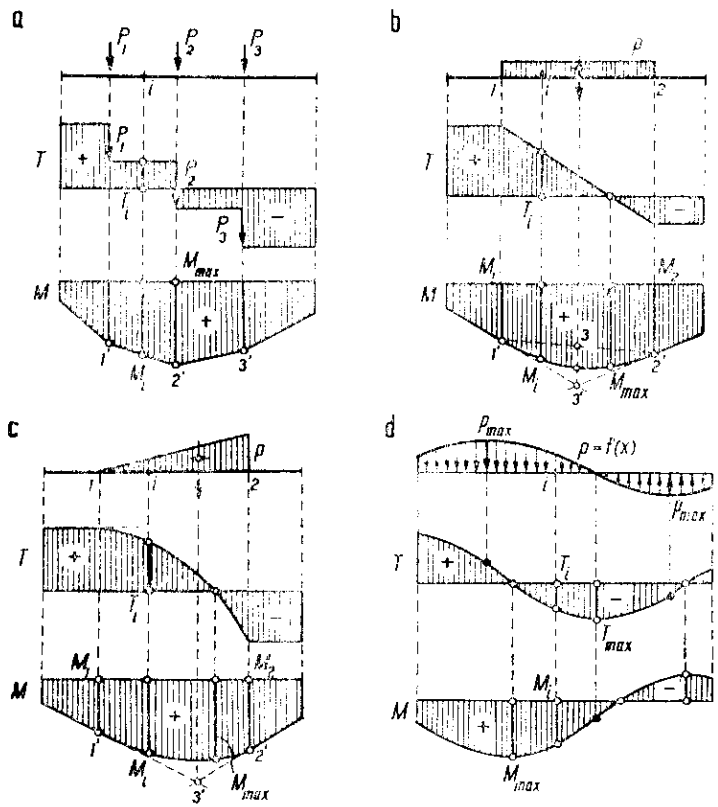


Fig. 20

tive se iau *sub* linia de referință. În acest fel, zonele pozitive și negative ale unei diagrame de momente încovoietoare sînt așezate fiecare de acea parte a barei, spre care se produce încovoierea în porțiunea respectivă (v. fig. 9).

În figura 20 sînt arătate cîteva exemple de trasare a diagramelor T și M pentru o porțiune de bară dreaptă, considerînd diferite situații de încărcare. Poziția liniei de referință este figurată indicativ, admițînd cunoscute mărimile

eforturilor din prima secţiune a porţiunii de bară, deoarece acestea depind de ansamblul forţelor exterioare de la stînga porţiunii.

În cazul unor *sarcini concentrate* (fig. 20, *a*), diagrama T prezintă o variaţie în formă de scară, deoarece în intervalul dintre sarcini $p=0$, şi deci $T=$ const., iar în dreptul sarcinilor concentrate intervin salturi de mărime egală cu aceste sarcini. Diagrama M are forma unui contur poligonal, cu vîrfurile situate pe suporturile forţelor concentrate şi convexitatea îndreptată în sensul de acţiune al acestora; înclinarea fiecărei laturi corespunde ordonatei din diagrama T pe intervalul respectiv.

Pentru o sarcină *uniform distribuită* (fig. 20, *b*), în porţiunea încărcată diagrama T variază liniar, deoarece $p=$const.; pe porţiunile neîncărcate, forţa tăietoare este constantă şi are aceleaşi ordonate cu variaţia liniară în dreptul secţiunilor *1* şi *2*. Diagrama M este mărginită în porţiunea încărcată de o parabolă, iar în porţiunile neîncărcate variază liniar. Deoarece în secţiunile *1* şi *2* trecerea de la partea neîncărcată la cea încărcată se face fără intervenţia unei sarcini concentrate, diagrama M nu poate avea vîrfuri în aceste puncte. Înseamnă că cele două drepte care încadrează porţiunea parabolică a diagramei sînt tangente în *1'* şi *2'* la această curbă. Dreptele se intersectează pe ordonata rezultantei sarcinii distribuite, aşa cum se ştie de la curbele funiculare (v. fig. 16, *a*); parabola trece pe la mijlocul segmentului $\overline{33'}$.

Cînd intensitatea sarcinii variază *liniar* (fig. 20, *c*), pe porţiunea încărcată diagrama T va fi mărginită de o parabolă de gradul *2*, iar diagrama M de o parabolă cubică. În dreptul secţiunii *1*, curba T are tangentă orizontală, deoarece acolo $p=0$. În secţiunile următoare, înclinarea tangentei creşte şi este negativă, deoarece $dT/dx=-p$, atingînd înclinarea maximă în dreptul secţiunii *2*, după care diagrama rămîne constantă pe porţiunea neîncărcată. În diagrama M, variaţiile liniare de pe porţiunile neîncărcate laterale se intersectează şi aici pe ordonata rezultantei sarcinii distribuite; parabola cubică este tangentă la aceste drepte în punctele *1'* şi *2'*.

În figura 20, *d* este reprezentat un caz general de încărcare cu o sarcină distribuită ce variază după o anumită lege $p=f(x)$. La trasarea diagramelor T şi M se ţine seama de următoarele caracteristici:

— pentru sarcini pozitive (dirijate în jos), înclinarea tangentei la curba T este negativă (coboară spre dreapta), iar convexitatea curbei M este în jos; pentru sarcini negative, înclinarea tangentei la curba T este pozitivă (urcă spre dreapta), iar convexitatea curbei M este în sus[1];

— pentru secţiunile unde încărcarea $p=f(x)$ are ordonate maxime (pozitive sau negative), în diagrama T apar puncte de inflexiune;

— pentru secţiunile unde încărcarea se anulează, în diagrama T corespund ordonate maxime, iar în diagrama M corespund puncte de inflexiune;

— pentru secţiunile unde forţa tăietoare se anulează, corespund ordonate maxime în digrama M.

[1] Se poate stabili o regulă practică: înclinarea tangentei la curba T (urmărind sensul de parcurgere al barei) şi convexitatea curbei M corespund sensului de acţiune al sarcinilor aplicate pe bară.

La fiecare diagramă, alura curbei care o mărginește a rezultat urmărind de la o secțiune la alta variația mărimii tangentei la curbă, pe baza relațiilor $dT/dx = -p$ și $dM/dx = T$.

b. **Relații de recurență.** Trecînd la determinarea mărimii efective a ordonatelor în diagramele de eforturi, este deseori util să se poată calcula eforturile dintr-o anumită secțiune în funcție de eforturile cunoscute dintr-o secțiune precedentă. În acest scop se utilizează relații de recurență.

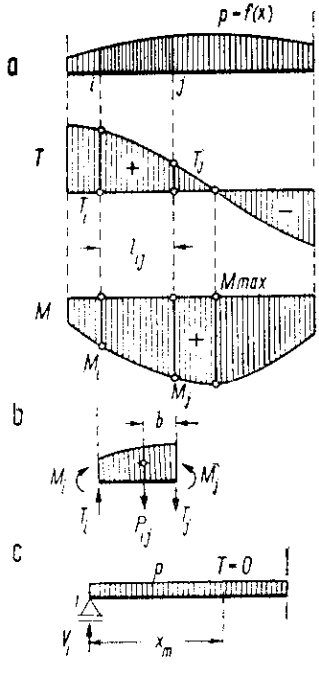


Fig. 21

Relațiile generale (2.2) pot fi scrise sub forma $dT = -p\,dx$ și $dM = T\,dx$, iar prin integrarea lor în intervalul dintre două secțiuni succesive i și j (fig. 21, *a*) se obține

$$T_j = T_i - \int_i^j p\,dx = T_i - P_{ij} \quad \text{și} \quad M_j = M_i + \int_i^j T\,dx =$$

$$= M_i + \Omega_{ij}^{(T)}. \qquad (2.4)$$

Din aceste relații rezultă:

— *forța tăietoare din secțiunea j este egală cu forța tăietoare din secțiunea i, din care se scad sarcinile aplicate pe bară în intervalul dintre cele două secțiuni;*

— *momentul încovoietor din secțiunea j este egal cu momentul încovoietor din secțiunea i, la care se adună (algebric) aria diagramei T cuprinsă între cele două secțiuni.*

Această ultimă proprietate aduce simplificări substanțiale la calculul ordonatelor succesive ale unei diagrame de momente încovoietoare, cînd diagrama T este mărginită de linii drepte, caz curent întîlnit în aplicații (fig. 20, *a* și *b*).

O altă formă a aceleiași proprietăți se obține considerînd izolată din bară porțiunea $i-j$ și aplicînd la extremități eforturile din secțiunile respective (fig. 21, *b*); condiția de echilibru dă

$$M_j = M_i + T_i l_{ij} - P_{ij} b, \qquad (2.5)$$

deci: *momentul încovoietor din secțiunea j este egal cu momentul încovoietor din secțiunea i, la care se adaugă — cu semnele lor — momentul forței tăietoare din secțiunea i, precum și momentul sarcinilor aplicate pe bară în intervalul dintre cele două secțiuni, în raport cu centrul de greutate al secțiunii j.*

Tot din relațiile de recurență se mai poate stabili o proprietate utilă, pentru cazul unei bare care are la o extremitate reazem simplu (sau articulație) și este încărcată cu o sarcină uniform distribuită (fig. 21, *c*). Abscisa x_m a secțiunii de moment încovoietor maxim se găsește din condiția $T = 0$; oricare ar fi reacțiunea V_1, se poate scrie

$$T_x = V_1 - p x_m = 0, \text{ deci } x_m = V_1/p.$$

Expresia momentului încovoietor maxim este

$$M_{max} = V_1 x_m - p x_m^2/2 = (2V_1 - p x_m) \cdot x_m/2 = V_1 x_m/2, \tag{2.6}$$

obţinîndu-se un mod simplu de evaluare: *momentul încovoietor maxim este egal cu produsul dintre reacţiunea V_1 şi jumătatea abscisei x_m.*

B. GRINZI DREPTE

1. Grinda pe două reazeme

a. **Grinda simplu rezemată încărcată cu sarcini normale pe axă.** În general, pentru fixarea unei grinzi în plan este necesar să se prevadă la extremităţi o articulaţie şi un reazem simplu. Cînd sarcinile sînt aplicate normal pe axă, nu există tendinţă de deplasare în lungul axei grinzii, astfel că ambele rezemări se comportă ca reazeme simple; se ajunge deci la grinda *simplu rezemată* (fig. 22, *a*).

Pentru o situaţie oarecare de încărcare, determinarea reacţiunilor se face aplicînd condiţia de echilibru static; rezultă

$$V_1 = \sum_1^n P_k b_k/l \quad \text{şi} \quad V_2 = \sum_1^n P_k a_k/l. \tag{2.7}$$

Trecînd la eforturi, este indicat să se stabilească mai întîi configuraţia diagramelor T şi M, utilizînd caracteristicile generale examinate anterior. Se face apoi determinarea eforturilor , ţinînd seama de definirile date forţei tăietoare şi momentului încovoietor, precum şi de convenţia de semne stabilită. Cînd diagramele sînt mărginite de linii drepte, calculul ordonatelor se face direct pentru secţiunile de la extremităţile acestora; pentru porţiuni curbe se scriu ecuaţiile respective, considerînd secţiunea curentă a intervalului, după care se determină poziţiile şi mărimile ordonatelor caracteristice.

Expresia forţei tăietoare dintr-o secţiune i este

$$T_i = V_1 - \sum_1^i P_k, \tag{2.8}$$

suma referindu-se la toate sarcinile aplicate la stînga secţiunii. În prima secţiune a grinzii $T_1 = V_1$, iar în ultima secţiune $T_2 = -V_2$, deci *diagrama T se deschide cu reacţiunea V_1 şi se închide cu reacţiunea V_2*. Expresia momentului încovoietor din secţiunea i este

$$M_i = V_1 x_i - \sum_1^i P_k (x_i - a_k), \tag{2.9}$$

suma referindu-se de asemenea la sarcinile situate la stînga secţiunii . Pentru uşurinţa calculului ordonatelor se pot folosi relaţiile de recurenţă (2.4) şi (2.5). În extremităţile grinzii simplu rezemate, momentul încovoietor este nul.

În tabela I sînt date comparativ diagramele T și M, precum și expresiile reacțiunilor și ale eforturilor, pentru cîteva cazuri de încărcări cu sarcini distribuite. Se recomandă să se refacă stabilirea acestor expresii și trasarea diagramelor.

Pentru exemplificare, se consideră cazul 4 din tabelă unde grinda este încărcată cu o sarcină distribuită după legea liniară $p_x = px/l$. Mărimea sarcinii este $pl/2$ și deci reacțiunile sînt $V_1 = pl/6$ și $V_2 = pl/3$. Expresiile eforturilor din secțiunea curentă se scriu

$$T_x = V_1 - p_x \cdot x/2 = pl/6 - px^2/2l = pl\,(1 - 3\xi^2)/6$$

$$M_x = V_1 x - p_x \cdot x^2/6 = plx/6 - px^3/6l = pl^2\xi(1 - \xi^2)/6.$$

Forța tăietoare se anulează pentru $1 - 3\xi^2 = 0$, deci $\xi_m = 1/\sqrt{3} = 0{,}577$, secțiune în care se produce momentul încovoietor maxim avînd valoarea $M_{max} = pl^2\xi_m(1 - \xi_m^2)/6 = pl^2 \cdot 9/3 = 0{,}0641\ pl^2$.

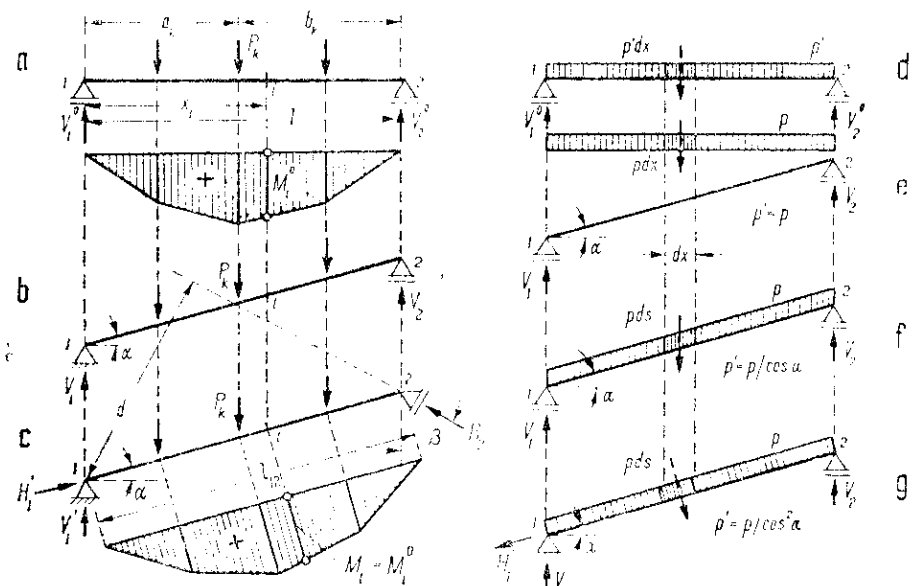
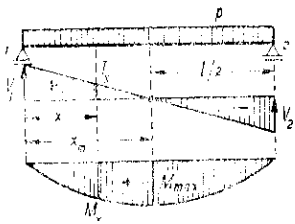
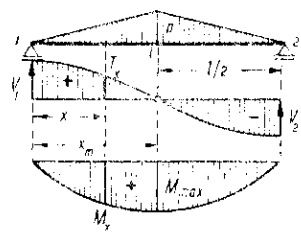
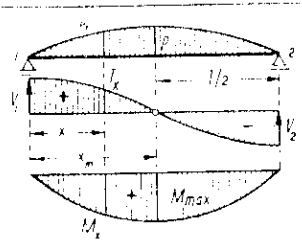
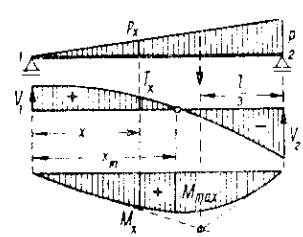
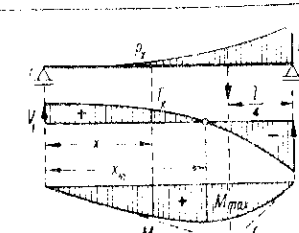


Fig. 22

b. **Grinzi înclinate.** Se întîlnesc deseori cazuri de grinzi așezate înclinat în raport cu direcția de acțiune a sarcinilor, de exemplu la acoperișuri. Este util să se examineze în ce măsură această situație influențează asupra reacțiunilor și a eforturilor. Ca element de comparație se consideră grinda simplu rezemată încărcată cu sarcini oarecare normale pe axă (fig. 22, *a*), ale cărei reacțiuni și eforturi — notate pentru identificare cu indicele 0 (zero) — sînt

$$V_1^0 = \sum_1^2 P_k b_k/l, \quad V_2^0 = \sum_1^2 P_k a_k/l, \quad T_i^0 = V_1^0 - \sum_1^i P_k, \quad M_i^0 = V_1^0 x_i - \sum_1^i P_k(x_i - a_k).$$

Grinda simplu rezemată: sarcini distribuite

		Notații: $\xi = x/l$, $\xi' = x'/l$
1		$V_1 = V_2 = pl/2$ $T_x = \frac{pl}{2}(1-2\xi)$ $M_x = \frac{pl^2}{2}\xi(1-\xi)$ $x_m = l/2,\ M_{max} = pl^2/8 = 0{,}125\ pl^2$
2		$V_1 = V_2 = pl/4$ $(1-i)$ $\begin{cases} T_x = \frac{pl}{4}(1-4\xi^2) \\ M_x = \frac{pl^2}{12}\xi(3-4\xi^2) \end{cases}$ $(i-2)$ $\begin{cases} T_x = -\frac{pl}{4}(1-4\xi'^2) \\ M_x = \frac{pl^2}{12}\xi'(3-4\xi'^2) \end{cases}$ $x_m = l/2,\ M_{max} = pl^2/12 = 0{,}0833\ pl^2$
3		Încărcare parabolică: $p_x = 4p\xi(1-\xi)$ $V_1 = V_2 = pl/3$ $T_x = \frac{pl}{3}(1-6\xi^2+4\xi^3)$ $M_x = \frac{pl^2}{3}\xi(1-2\xi^2+\xi^3)$ $x_m = l/2,\ M_{max} = \frac{5pl^2}{48} = 0{,}104\ pl^2$
4		$V_1 = pl/6,\ V_2 = pl/3$ $T_x = \frac{pl}{6}(1-3\xi^2)$ $M_x = \frac{pl^2}{6}\xi(1-\xi^2) = \frac{pl^2}{6}\xi\xi'(1+\xi)$ $x_m = l/\sqrt{3} = 0{,}577\ l$ $M_{max} = pl^2/9\sqrt{3} = 0{,}0641\ pl^2$
5		Încărcare parabolică: $p_x = p\xi^2$ $V_1 = pl/12,\ V_2 = pl/4$ $T_x = \frac{pl}{12}(1-4\xi^3)$ $M_x = \frac{pl^2}{12}\xi(1-\xi^3)$ $x_m = 0{,}63\ l,\ M_{max} = pl^2/25{,}4 = 0{,}0394\ pl^2$

Pentru grinda înclinată din figura 22, *b*, la care reazemul simplu din *2* are reacțiune verticală, articulația din *1* se comportă tot ca un reazem simplu vertical, deci $V_1 = V_1^0$ și $V_2 = V_2^0$, precum și

$$T_i = (V_1 - \sum_1^i P_k)\cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha, \quad M_i = V_1 x_i - \sum_1^i P_k(x_i - a_k) = M_i^0.$$

Rezultă că *în orice secțiune momentele încovoietoare sînt aceleași ca la grinda simplu rezemată*. Cît timp interesează numai mărimile ordonatelor, se poate folosi și pentru grinda înclinată diagrama M din figura 22, *a*. De remarcat însă că *ariile* diagramelor de momente încovoietoare nu sînt aceleași în cele două cazuri; la grinda simplu rezemată, diagrama se raportează la axa orizontală de lungime l, în timp ce pentru grinda înclinată, raportarea diagramei se face la axa acesteia, care are lungimea $l_{12} = l/\cos\alpha$.

Cînd direcția reacțiunii R_2 din reazemul simplu nu este paralelă cu direcția sarcinilor (fig. 22, *c*), reacțiunea din articulația *1* poate fi descompusă în două componente, anume H_1' după axa grinzii și V_1' paralelă cu sarcinile. Din echilibrul grinzii rezultă mărimile reacțiunilor

$$V_1' = \sum_1^2 P_k b_k/l = V_1^0, \quad R_2 = \sum_1^2 P_k a_k/d, \quad H_1' = R_2 \sin\beta/\cos\alpha.$$

Eforturile din secțiunea curentă sînt

$$T_i = (V_1' - \sum_1^i P_k)\cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha, \quad M_i = V_1' x_i - \sum_1^i P_k(x_i - a_k) = M_i^0,$$

de unde se vede că *și în acest caz ordonatele diagramei M sînt aceleași ca pentru grinda simplu rezemată*, în timp ce ordonatele diagramei T au mărimea $T^0\cos\alpha$. În ambele cazuri considerate, înclinarea grinzii (α) conduce și la apariția unor diagrame de forțe axiale.

O altă comparație utilă este arătată în figura 22, *e—g* unde o aceeași grindă înclinată este încărcată cu cîte o sarcină uniform distribuită în diferite moduri. Ca element de comparație s-a considerat tot grinda simplu rezemată (fig. 22, *d*); se știe din tabela 1 (cazul 1) că expresiile reacțiunilor și ale eforturilor sînt

$$V_1^0 = V_2^0 = pl/2, \quad T_x = pl(1 - 2\xi)/2, \quad M_x = pl^2\xi(1 - \xi)/2.$$

Urmează să se determine o intensitate p' a încărcării grinzii simplu rezemate, astfel ca expresiile reacțiunilor V_1^0, V_2^0 și ale eforturilor T_x^0, M_x^0 din secțiunea curentă să poată fi folosite și la determinarea reacțiunilor și a eforturilor corespunzătoare cazurilor de încărcări considerate pentru grinda înclinată, sub forma

$$V_1 = V_1^0, \quad V_2 = V_2^0, \quad T_x = T_x^0 \cos\alpha, \quad M_x = M_x^0. \tag{2.10}$$

Cînd sarcina verticală p este distribuită pe orizontală (fig. 22, *e*) se regăsește situația din figurile 22, *a—b* și, în consecință, $p' = p$. Pentru o sarcină verticală p distribuită pe lungimea înclinată l_{12} a grinzii (fig. 22, *f*) trebuie pusă condiția ca sarcina elementară să fie aceeași în cele două cazuri: $pds = p'dx$,

unde $dx=ds\cos\alpha$, și deci $p'=p/\cos\alpha$. În figura 22, *g* sarcina *p* este *normală pe axa grinzii* și uniform distribuită pe lungimea înclinată l_{12}. Sarcina elementară *pds* poate fi descompusă în componenta verticală $pds/\cos\alpha$ și în componenta *pds* tg α dirijată după axa grinzii. Prima componentă produce încovoiere, reducînd problema la cazul din figura 22, *f*; va rezulta $pds/\cos\alpha=p'dx$, de unde $p'=p/\cos^2\alpha$. A doua componentă produce forță axială în grindă; în articulația *1* apare reacțiunea $H_1'=pl_{12}\operatorname{tg}\alpha=p'l\sin\alpha$, astfel că expresia forței axiale în secțiunea curentă are forma $N_x=p(l_{12}-s)\operatorname{tg}\alpha=p'(l-x)\sin\alpha$. Forțe axiale apar în grindă și în primele două cazuri.

Se ajunge la concluzia că în toate cele trei cazuri se pot utiliza relațiile $T_x=T_x^0\cos\alpha$ și $M_x=M_x^0$, unde T_x^0 și M_x^0 se calculează pentru grinda simplu rezemată încărcată cu sarcina p' corespunzătoare cazului respectiv.

2. Efecte de continuitate, console

a. **Încărcare cu momente exterioare.** Acest mod de solicitare apare cînd sînt puse în evidență *efecte de continuitate*, sub formă de acțiuni exterioare. Astfel, grinda din figura 23, *a* are un braț vertical; îndepărtînd brațul prin secționare, efectul său asupra grinzii este reprezentat de forța tăietoare $T_i=P$ și de momentul încovoietor $M_i=Pa$, care acționează ca moment exterior asupra grinzii. Analog, grinda continuă din figura 23, *b* poate fi înlocuită printr-un sistem echivalent, admițînd introduse articulații în secțiunile de pe reazemele intermediare și punînd în evidență momentele încovoietoare din acele secțiuni sub forma perechilor de momente M_2 și M_3. Sistemul obținut este format din trei grinzi simplu rezemate, încărcate cu sarcinile date și cu momente exterioare.

Cînd momentul exterior *M* este aplicat într-o secțiune oarecare *i* a grinzii simplu rezemate (fig. 23, *c*), reacțiunile V_1 și V_2 formează un cuplu care echilibrează pe *M*; mărimile lor sînt $V_1=V_2=M/l$, cu sensurile indicate pe figură. Forța tăietoare este negativă și constantă pe toată grinda. Momentul încovoietor are pe cele două porțiuni expresiile

$$(1-i)\quad M_x=-V_1x=-M\xi,\quad (i-2)\quad M_x=V_2x'=M\xi',$$

deci diagrama *M* este mărginită de două drepte paralele, între care intervine un *salt* de mărime *M* în dreptul secțiunii *i*. În această secțiune, ordonatele sînt $\overline{ii'}=-Ma/l$ și $\overline{ii''}=Mb/l$.

De observat că poziția momentului exterior pe grindă nu influențează reacțiunile și nici diagrama *T*. Rezultă că dreptele care mărginesc diagrama *M* rămîn neschimbate; saltul de mărime *M* intervine în diagramă în dreptul secțiunii unde este aplicat *M*, aici fiind și *punctul de inflexiune* al axei deformate a grinzii.

Cînd momentul exterior se aplică la extremitatea grinzii (fig. 23, *d* și *e*), înlocuind continuitatea cu o deschidere alăturată, diagrama *M* are formă triunghiulară. Considerînd pentru momentul exterior *M* *convenția de semne a momentelor încovoietoare* (pozitiv în primul caz din figură și negativ în al

doilea, semnul diagramei rezultă direct, deoarece acest moment este chiar ordonata maximă a diagramei triunghiulare. Privitor la reacțiuni, se constată că un moment încovoietor *pozitiv*, aplicat la o extremitate a grinzii, *descarcă* reazemul în care se aplică și *încarcă* reazemul opus; pentru momente încovoietoare negative, situația se inversează. Această constatare arată că efectele continuității de la extremitățile grinzii conduc la modificarea reacțiunilor.

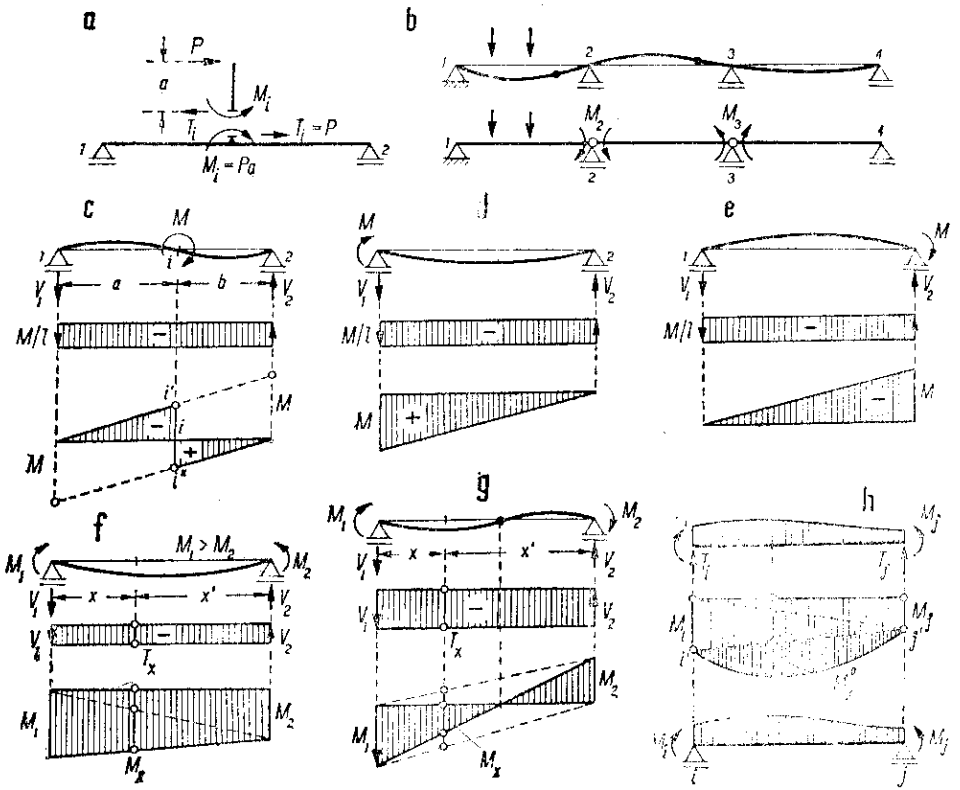


Fig. 23

Reacțiunea dintr-un reazem al unei grinzi continue (fig. 23, *b*) *diferă* de suma reacțiunilor date în acel reazem de cele două deschideri alăturate, considerate grinzi simplu rezemate.

Dacă la ambele extremități ale grinzii sînt aplicate momente exterioare, se poate folosi suprapunerea de efecte. În figura 23, *f*, ambele momente produc încovoierea grinzii în sens pozitiv; reacțiunile au mărimea $(M_1-M_2)/l$ și formează un cuplu care echilibrează diferența M_1-M_2. Cînd $M_1=M_2$, reacțiunile sînt nule, iar grinda este supusă la *încovoiere pură*. Diagrama T este pozitivă

sau negativă după cum $M_1 \lessgtr M_2$. Expresia momentului încovoietor în secțiunea curentă are forma

$$M_x = M_1 x'/l + M_2 x/l = M_1 \xi' + M_2 \xi, \tag{2.11}$$

și diagrama M rezultă din însumarea diagramelor triunghiulare date de M_1 și M_2.

În cazul din figura 23, *g*, momentul M_1 produce încovoiere în sens pozitiv și momentul M_2 în sens negativ; axa deformată a grinzii are punct de inflexiune în secțiunea de moment încovoietor nul. Reacțiunile au mărimea $(M_1 + M_2)/l$ și sensurile arătate în figură, astfel că diagrama T rezultă negativă. Momentul încovoietor în secțiunea curentă are expresia

$$M_x = M_1 x'/l - M_2 x/l = M_1 \xi' - M_2 \xi. \tag{2.12}$$

Diagrama M este dată de diferența dintre suprafețele triunghiulare corespunzătoare lui M_1 și M_2; punctul de anulare are abscisa $x_0 = lM_1/(M_1 + M_2)$.

Cazurile examinate de încărcare cu momente exterioare permit să se stabilească și o proprietate importantă a diagramei M la structuri alcătuite din bare drepte. Izolînd o porțiune de bară *i-j* (fig. 23, *h*), pentru echilibru se aplică în secțiunile de la extremități eforturile corespunzătoare. Situația este în totul similară cu aceea a unei grinzi simplu rezemate de deschidere l_{ij}, încărcată cu sarcinile date și cu momentele de continuitate M_i și M_j (figura inferioară); diagrama M a porțiunii este deci aceeași. Această diagramă se poate descompune ca în figură. Se vede imediat că cele două suprafețe triunghiulare sînt tocmai diagramele corespunzătoare încărcării cu momentele exterioare M_i și M_j; rezultă deci că restul diagramei (hașurată des) corespunde sarcinilor aplicate pe bara simplu rezemată *i-j*. Se ajunge astfel la concluzia: *dacă într-o diagramă de momente încovoietoare a unei bare drepte se duce o secantă oarecare i'-j', porțiunea de diagramă de sub această secantă reprezintă diagrama M a unei bare i-j, considerată ca o grindă simplu rezemată încărcată cu sarcinile care-i revin*. Această proprietate este deosebit de utilă pentru stabilirea semnificației porțiunilor în care poate fi descompusă o diagramă de momente încovoietoare.

b. **Efectul de consolă.** O grindă cu consolă (fig. 24, *a*) poate fi privită ca rezultînd din combinarea unei grinzi simplu rezemate și a unei grinzi încastrate (consolă), prin realizarea continuității pe reazemul 2. Efectul de continuitate din această secțiune este reprezentat prin perechile T_2 și M_2 aplicate asupra celor două fețe ale secțiunii, ca în figura 24, *b*. Eforturile de pe fața din dreapta asigură echilibrul consolei, în timp ce eforturile de pe fața din stînga încarcă grinda simplu rezemată, care apare astfel acționată de sarcinile date și de un moment exterior aplicat în extremitatea 2, analog ca în figura 23, *e*.

Din echilibrul consolei rezultă

$$T_2 = \sum_2^3 P_k \quad \text{și} \quad M_2 = \sum_2^3 P_k a_k.$$

cu sensurile din figură (forță tăietoare pozitivă și moment încovoietor negativ). Expresiile eforturilor din secțiunea curentă a consolei sînt

$$T_i = \sum_i^3 P_k \quad \text{și} \quad M_i = -\sum_i^3 P_k(a_k - x_i), \tag{2.13}$$

cu ajutorul cărora se pot trasa diagramele corespunzătoare.

Trecînd la grinda simplu rezemată, reacțiunile se pot scrie sub forma

$$V_1 = V_1^0 - \Delta V = V_1^0 - M_2/l, \quad V_2 = V_2^0 + \Delta V + T_2 = V_2^0 + M_2/l + T_2, \tag{2.14}$$

unde V_1^0 și V_2^0 sînt reacțiunile grinzii simplu rezemate ce provin de la sarcini, iar ΔV este corecția de reacțiune datorită momentului dat de consolă. Cu ajutorul acestor reacțiuni se poate construi diagrama T (fig. 24, *c*). De observat că efectul consolei se traduce, în această diagramă, prin *deplasarea axei de referință cu cantitatea* ΔV, față de poziția care ar corespunde grinzii simplu rezemate (punctat pe figură).

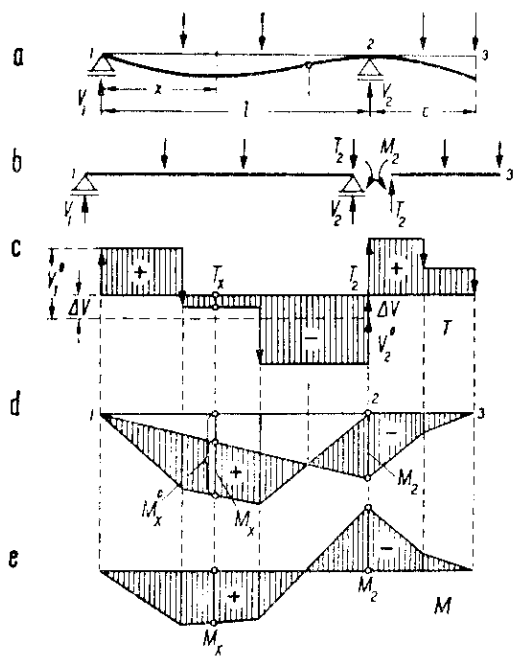


Fig. 24

Diagrama M rezultă prin suprapunere de efecte, construind mai întîi diagrama M^0 corespunzătoare grinzii simplu rezemate încărcată cu sarcinile date, apoi suprapunînd diagrama triunghiulară negativă dată de M_2 (fig. 24, *d*). Diagrama obținută are zone pozitive și negative; secțiunea de anulare determină poziția punctului de inflexiune a axei deformate. Momentul încovoietor din secțiunea curentă are expresia

$$M_x = M_x^0 - M_2 x/l = M_x^0 - M_2 \xi. \tag{2.15}$$

Raportînd diagrama la o axă de referință orizontală, rezultă situația din figura 24, *e*; aceasta este reprezentarea obișnuită a diagramelor M pentru grinzi cu console. Ea poate fi obținută direct, fără a mai face descompunerea arătată în figura 24, *b*, care a avut aici numai rolul de a scoate în evidență efectul de consolă.

3. Formulare matriceală pentru trasarea diagramelor M și T

Determinarea sistematizată a eforturilor dintr-o succesiune de secțiuni ale unei grinzi drepte static determinate se poate face folosind un algoritm stabilit pe baza relațiilor de recurență (2.4) și (2.5). Grinda se împarte într-un anumit

număr de porţiuni, delimitate de secţiunile în care urmează să se determine ordonatele diagramelor M şi T; se consideră ca atare şi secţiunile de aplicare ale sarcinilor concentrate (fig. 25, *a*).

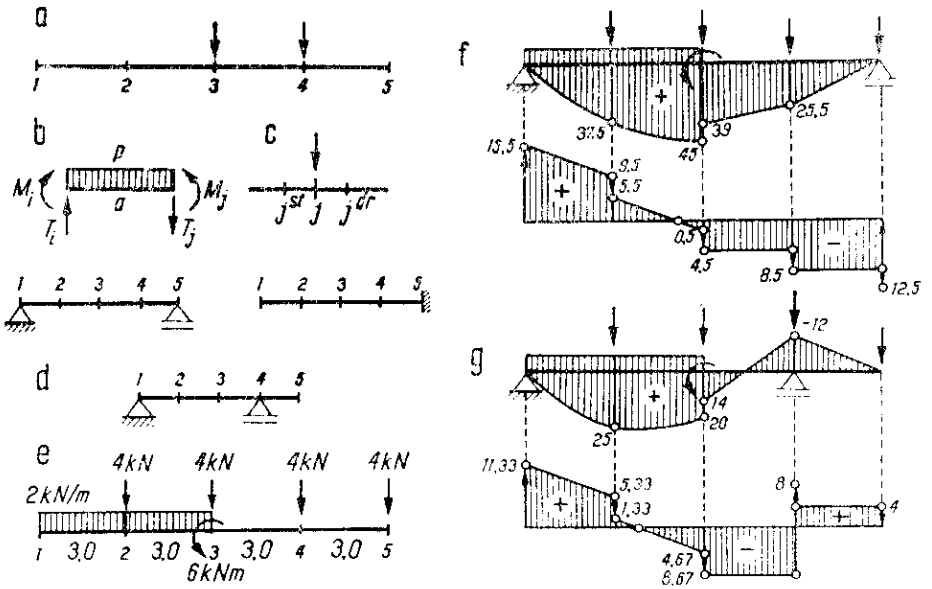


Fig. 25

Fie porţiunea de grindă cuprinsă între diviziunile i şi j (fig. 25,*b*), pe care acţionează şi o sarcină uniform distribuită. Relaţiile de recurenţă între eforturi sînt

$$M_j = M_i + T_i a - pa^2/2 \quad \text{şi} \quad T_j = T_i - pa,$$

obţinute prin aplicarea expresiilor (2.4) şi (2.5), care în formulare matriceală se pot scrie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_j \\ T_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -pa^2/2 \\ -pa \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_{ij}},$$

unde apare matricea pătrată $\mathbf{T}_{ij}$ care efectuează trecerea de la eforturile din secţiunea i la cele din secţiunea j.

În diviziunea j pot interveni salturile ΔM_j şi ΔT_j în mărimile eforturilor, datorită sarcinilor concentrate ce acţionează acolo (forţe sau momente). Înseamnă că trebuie considerate separat eforturile din secţiunile j^{st} şi j^{dr}, care încadrează diviziunea j (fig. 25, *c*); legătura dintre acestea are forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_j^{dr} \\ T_j^{dr} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j^{dr}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta M_j \\ \Delta T_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_j} + \underbrace{\begin{bmatrix} M_j^{st} \\ T_j^{st} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j^{st}},$$

unde $\mathbf{C}_j$ cuprinde corecțiile de eforturi din diviziunea j. Se poate deci scrie

$$\mathbf{E}_j^{st} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i^{dr} + \mathbf{P}_{ij} \quad \text{și} \quad \mathbf{E}_j^{dr} = \mathbf{C}_j + \mathbf{E}_j^{st} = \mathbf{C}_j + \mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i^{dr} + \mathbf{P}_{ij}.$$

O formă mai avantajoasă se obține înglobînd matricea $\mathbf{P}_{ij}$ în matricea $\mathbf{T}_{ij}$ și totodată dînd formă pătrată matricei $\mathbf{C}_j$:

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} M \\ T \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & a & -pa^2/2 \\ 0 & 1 & -pa \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{C}_j = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Delta M_j \\ 0 & 0 & \Delta T_j \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Este ușor de controlat că, în această formă, produsul matriceal $\mathbf{E}_j = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i$ cuprinde tocmai relațiile de recurență de la care s-a pornit (a treia relație este identitatea $1 = 1$). Totodată, se poate scrie

$$\mathbf{E}_j^{st} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i^{dr} \quad \text{și} \quad \mathbf{E}_j^{dr} = \mathbf{C}_j + \mathbf{E}_j^{st} = \mathbf{C}_j + \mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i^{dr} = (\mathbf{C}_j + \mathbf{T}_{ij})\mathbf{E}_i^{dr}, \tag{2.17}$$

deoarece rezultatul nu se schimbă dacă matricele $\mathbf{C}_j$ și $\mathbf{T}_{ij}$ sînt mai întîi însumate și apoi multiplicate cu $\mathbf{E}_i^{dr}$. Cu ajutorul celei de a doua relații (2.17) se poate deci trece direct de la $\mathbf{E}_i^{dr}$ la $\mathbf{E}_j^{dr}$.

Fie acum întreaga grindă (de exemplu cu diviziunile *1, 2, 3, 4, 5* ca în figura 25, *a*) pentru care se admite că s-au alcătuit matricele $\mathbf{T}_{ij}$ specifice fiecărei porțiuni și $\mathbf{C}_j$ specifice fiecărei diviziuni. Pot fi considerate două aspecte:

— Trecerea succesivă de la o diviziune la alta

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{st} &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{E}_1, & \mathbf{E}_2^{dr} &= \mathbf{C}_2 + \mathbf{T}_{12}\mathbf{E}_1, \\ \mathbf{E}_3^{st} &= \mathbf{T}_{23}\mathbf{E}_2^{dr}, & \mathbf{E}_3^{dr} &= \mathbf{C}_3 + \mathbf{T}_{23}\mathbf{E}_2^{dr}, \\ \mathbf{E}_4^{st} &= \mathbf{T}_{34}\mathbf{E}_3^{dr}, & \mathbf{E}_4^{dr} &= \mathbf{C}_4 + \mathbf{T}_{34}\mathbf{E}_3^{dr}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2.18}$$

— Trecerea directă de la o extremitate a grinzii la cealaltă; pentru aceasta se utilizează succesiv observația referitoare la forma ultimă dată de relația (2.17) pentru $\mathbf{E}_j^{dr}$, obținînd:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_2^{dr} = \mathbf{C}_2 + \mathbf{T}_{12}\mathbf{E}_1 = (\mathbf{C}_2 + \mathbf{T}_{12})\,\mathbf{E}_1, \\ &\mathbf{E}_3^{dr} = \mathbf{C}_3 + \mathbf{T}_{23}\mathbf{E}_2^{dr} = [\mathbf{C}_3 + \mathbf{T}_{23}(\mathbf{C}_2 + \mathbf{T}_{12})]\,\mathbf{E}_1; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathbf{E}_5 = \mathbf{T}_{45}\mathbf{E}_4^{dr} = \mathbf{T}_{45}\{\mathbf{C}_4 + \mathbf{T}_{34}[\mathbf{C}_3 + \mathbf{T}_{23}(\mathbf{C}_2 + \mathbf{T}_{12})]\}\mathbf{E}_1. \end{aligned}$$

Se poate deci scrie

$$\mathbf{E}_5 = \mathbf{T}_{15}\mathbf{E}_1, \text{ unde } \mathbf{T}_{15} = \mathbf{T}_{45}\{\mathbf{C}_4 + \mathbf{T}_{34}[\mathbf{C}_3 + \mathbf{T}_{23}(\mathbf{C}_2 + \mathbf{T}_{12})]\}. \tag{2.19}$$

unde $\mathbf{T}_{15}$ (și în general $\mathbf{T}_{1n}$) reprezintă o matrice globală de trecere de la eforturile din prima secțiune a grinzii la eforturile din ultima secțiune. Matricea $\mathbf{T}_{1n}$ poate fi formată direct pe baza relației (2.19), utilizînd matricele $\mathbf{T}_{ij}$ și $\mathbf{C}_j$ ale porțiunilor de grindă.

Semnificația celor două aspecte rezultă imediat: prima formă — dată de relațiile (2.18) — reprezintă aplicarea succesivă a relației de recurență, în timp ce a doua servește la exprimarea condiției de echilibru static a grinzii în ansamblu, sub forma $\mathbf{E}_n + \mathbf{R}_n = \mathbf{T}_{1n}\mathbf{E}_1 + \mathbf{R}_n = 0$, unde $\mathbf{R}_n$ este matricea-coloană ce conține reacțiunile din extremitatea n. Apare deci firesc să se înceapă cu această condiție, deoarece în primul rînd trebuie determinate reacțiunile.

Sistematizarea făcută este valabilă oricare ar fi rezemările grinzii. Ținînd seama de alcătuirea matricelor $\mathbf{T}_{ij}$ și $\mathbf{C}_j$, pentru $\mathbf{T}_{1n}$ rezultă forma

$$\begin{bmatrix} M_n \\ T_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{și deci} \quad \begin{aligned} M_n &= M_1 + a_{12}T_1 + a_{13}, \\ T_n &= T_1 + a_{23}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Reacțiunile din extremități apar în matricele $\mathbf{E}_1$ și $\mathbf{E}_n$, în timp ce reacțiunile din anumite puncte intermediare intervin prin matricele de corecție $\mathbf{C}_j$ respective și intră în elementele matricei globale $\mathbf{T}_{1n}$. Relațiile (2.20) permit aflarea a două necunoscute; astfel, pentru cazurile din figura 25, *d*:

— grindă simplu rezemată: $M_1 = 0$, $T_1 = V_1$, $M_5 = 0$, $T_5 + V_5 = 0$,

$a_{12}V_1 + a_{13} = 0$ și $V_5 + V_1 + a_{23} = 0$, deci $V_1 = -\dfrac{a_{13}}{a_{12}}$ și $V_5 = \dfrac{a_{13}}{a_{12}} - a_{23}$;

— grindă încastrată în 5: $M_1 = 0$ și $T_1 = 0$, deci se cunoaște $\mathbf{E}_1$;

— grindă cu consolă: $M_1 = 0$, $T_1 = V_1$, $M_5 = 0$, $T_5 = 0$,

$$V_1 = -\frac{a_{13}}{a_{12}} \text{ și } V_1 + a_{23} = 0, \text{ relații care conțin și pe } V_4.$$

Odată determinat V_1, se cunoaște matricea $\mathbf{E}_1$ a eforturilor din prima secțiune a grinzii și deci se poate trece la aplicarea succesivă a relațiilor de recurență (2.18), determinînd ordonatele diagramelor M și T în punctele de diviziune.

În figura 26 este dată schema logică ce sintetizează procedeul prezentat.

Pentru exemplificare, fie grinda din figura 25, *e*, la care se consideră două cazuri de distribuire a rezemărilor.

(1) *Grindă simplu rezemată*. Cu datele indicate, se formează matricele de forma $\mathbf{T}_{ij}$ și $\mathbf{C}_j$, apoi matricea globală $\mathbf{T}_{15}$; se obține:

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_{45} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -186 \\ 0 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de unde rezultă $a_{12} = 12$, $a_{13} = -186$ și $a_{23} = -28$, astfel că

$$V_1 = -a_{13}/a_{12} = 15{,}5 \text{ kN} \quad \text{și} \quad V_5 = a_{13}/a_{12} - a_{23} = 12{,}5 \text{ kN}.$$

Se pot acum afla succesiv ordonatele diagramelor de eforturi, care sînt indicate în figura 25, *f*.

(2) *Grindă cu consolă* (reazem simplu în *4*). Matricele $\mathbf{T}_{ij}$ sînt aceleași, de asemenea $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ și $\mathbf{C}_5$. Se modifică numai $\mathbf{C}_4$ datorită reacțiunii V_4; rezultă:

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V_4, \qquad \mathbf{E}_4^{dr} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -114 \\ 0 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + V_4, \qquad \mathbf{E}_5^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -186 \\ 0 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3V_4,$$

$$\mathbf{C}_5 + \mathbf{E}_5^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -186 \\ 0 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + V_4 = [0].$$

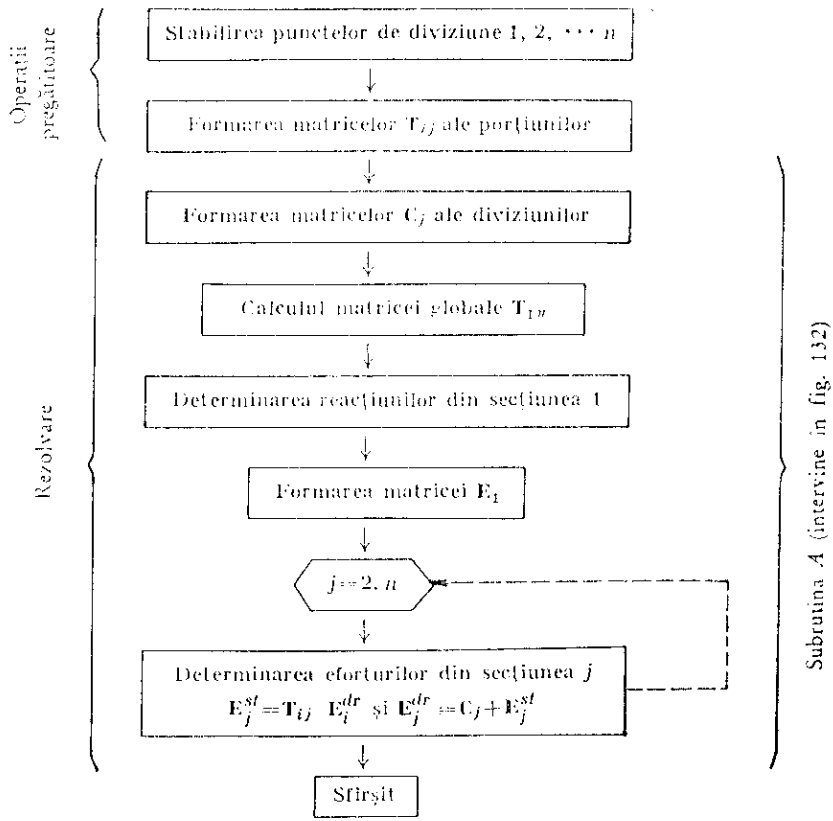


Fig. 26. Schemă logică pentru determinarea eforturilor la grinzi drepte.

de unde rezultă $a_{12} = 12$, $a_{13} = -186 + 3\,V_4$ și $a_{23} = -28 + V_4$, deci

$$V_1 = -a_{13}/a_{12} = 15{,}5 - 0{,}25\,V_4 \quad \text{și} \quad V_1 = -a_{23} - 28 + V_4,$$

de unde se găsește $V_1 = 11{,}33$ kN și $V_4 = 16{,}67$ kN. În continuare, se aplică relațiile (2.18) și se obțin ordonatele diagramelor M și T din figura 25, g.

4. Determinarea grafică a diagramelor de eforturi

Examinarea făcută în legătură cu figura 14 a arătat modul de determinare pe cale grafică a reacțiunilor și eforturilor cu ajutorul condiției de echilibru static: ansamblul forțelor exterioare trebuie să conducă la un poligon de forțe închis și la un poligon funicular închis. Se aplică aici aceste cunoștințe, ținînd

seama și de semnificația ce rezultă din relația generală (2.3), care arată că diagrama de momente încovoietoare la bare drepte este mărginită de un funicular al sarcinilor aplicate.

Fie grinda cu consolă din figura 27, încărcată cu un grup de sarcini concentrate normale pe axă. Se trasează pentru aceste sarcini poligonul forțelor, se duc razele polare și se construiește funicularul corespunzător. Latura $a1'$,

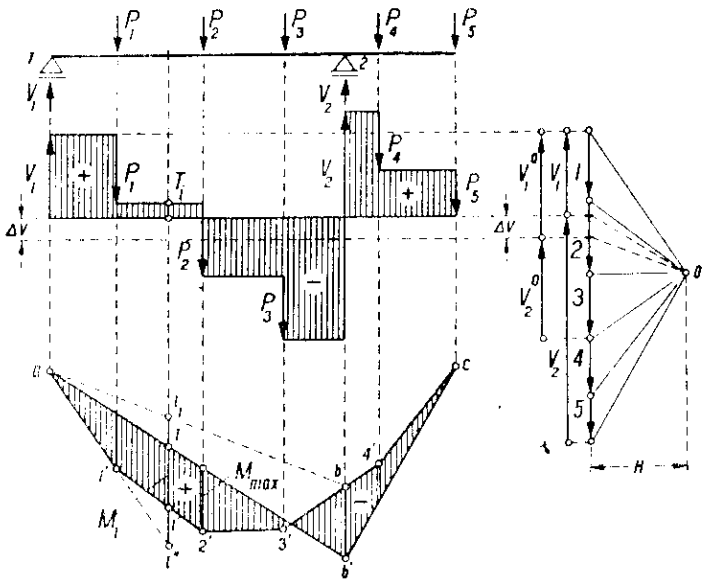


Fig. 27

paralelă cu prima rază polară, întîlnește suportul reacțiunii V_1 în punctul a; urmează laturile $1'2'$, $2'3'$, $3'4'$, $4'c$, iar latura cb' paralelă cu ultima rază polară întîlnește suportul reacțiunii V_2 în punctul b'. Repetînd raționamentul făcut în legătură cu figura 14, b, rezultă că linia de închidere a funicularului se obține unind punctele a cu b'; o paralelă la aceasta, dusă prin pol în poligonul forțelor, determină mărimile reacțiunilor V_1 și V_2. Diagrama T se construiește pe baza poligonului închis de forțe, luînd ca axă de referință orizontala dusă prin punctul de separare a reacțiunilor V_1 și V_2; forțele se aduc din poligon în dreptul secțiunilor respective, rezultînd aspectul de scară.

De remarcat că, dacă grinda nu ar avea consolă, linia de închidere ar fi ab și reacțiunile ar avea mărimile V_1^0 și V_2^0. Este astfel pusă în evidență corecția ΔV a reacțiunilor, datorită consolei; se regăsesc relațiile (2.14)

$$V_1 = V_1^0 - \Delta V \text{ și } V_2 = V_2^0 + \Delta V + T_2$$

stabilite în legătură cu figura 24. Se constată de asemenea deplasarea cu ΔV a axei de referință a diagramei T, față de cazul grinzii simplu rezemate.

Pentru diagrama M se ține seama că momentul forțelor exterioare de la stînga secțiunii este reprezentat de segmentul interceptat — pe paralela la

rezultantă dusă prin secțiune — de către laturile extreme de funicular corespunzătoare acestui grup de forțe. În cazul sarcinilor verticale, segmentul se găsește pe verticala secțiunii, prima latură de funicular este linia de închidere, iar latura care urmează după ultima sarcină de la stînga se găsește chiar în dreptul secțiunii. Rezultă că *diagrama M este reprezentată de suprafața cuprinsă între linia de închidere și funicular*, cu ordonate măsurate pe verticală și multiplicate cu distanța polară H.

Diagrama M are atît zonă pozitivă, cît și zonă negativă. Comparînd cu cazul cînd nu ar exista consolă, se constată că efectul acesteia intervine prin suprafața triunghiulară abb', care micșorează momentele pozitive. Momentul încovoietor în secțiunea i poate fi scris sub forma

$$M_i = \overline{ii'}H = (\overline{i_1 i''} - \overline{ii_1} - \overline{i''i'})\,H,$$

unde cele trei segmente din paranteză corespund respectiv momentelor date — în raport cu centrul de greutate al secțiunii — de către forțele V_1^0, ΔV și P_1. S-a ținut seama că, pentru pol situat la dreapta poligonului de forțe, segmentele care coboară de la prima spre ultima latură de funicular reprezintă momente pozitive, iar cele care urcă — momente negative.

Pe consolă, diagrama este reprezentată de suprafața $bb'cb'$ cu ordonate negative (momentul maxim este $-\overline{bb'}H = -\Delta V \cdot l$). Considerînd sarcinile de la *dreapta* unei secțiuni, se vede imediat că ordonata din diagramă reprezintă tocmai segmentul interceptat de laturile de funicular care încadrează grupul respectiv de sarcini; în acest caz, sensul segmentelor trebuie inversat pentru stabilirea semnului momentelor încovoietoare.

Cînd pe grindă acționează sarcini distribuite, diagrama M este mărginită de curba funiculară respectivă; pentru construirea acesteia se va utiliza procedeul examinat în legătură cu figura 16, *a*.

5. Sarcini aplicate indirect

Sînt cazuri cînd sarcinile nu se aplică direct asupra grinzii, ci efectul lor se transmite la grindă prin intermediul altor elemente de construcție. Este cazul grinzilor principale de planșeu pe care reazemă grinzi secundare dispuse transversal, al fermelor de acoperiș pe care sprijină panele și căpriorii, al grinzilor principale de poduri între care sînt așezate antretoazele, ce susțin la rîndul lor lonjeroanele pe care este așezată calea (fig. 28, *a*).

În asemenea cazuri, sarcinile se aplică pe anumite elemente secundare sprijinite pe grindă și se transmit acesteia sub forma reacțiunilor date în punctele de rezemare. Situația este arătată schematic în figura 28, *b*. Sarcinile P_1, P_2.. calcă pe lonjeroanele *i-j*, *j-k* ..., iar acestea sprijină pe antretoazele așezate în *i*, *j*, *k*...; antretoazele transmit grinzii sarcinile P_i, P_j, P_k ..., egale ca mărime cu acțiunile lonjeroanelor pe antretoaze. Transmiterea indirectă influențează asupra diagramelor T și M, aducînd corecții caracteristice.

Stabilirea acestor corecții se va face considerînd grinda cu transmitere indirectă din figura 28, *c*. Pentru comparație, s-au indicat în paralel sarcinile

care calcă pe grindă cînd transmiterea s-ar face direct și cele care corespund transmiterii indirecte. Forțele notate cu j' și j'' și k', ... sînt componentele date de sarcinile P_1, P_2, ... la extremitățile lonjeroanelor respective. Reacțiunile din rezemări sînt *aceleași* în ambele cazuri, deoarece transmiterea directă sau indirectă a sarcinilor afectează numai comportarea *interioară* a sistemului.

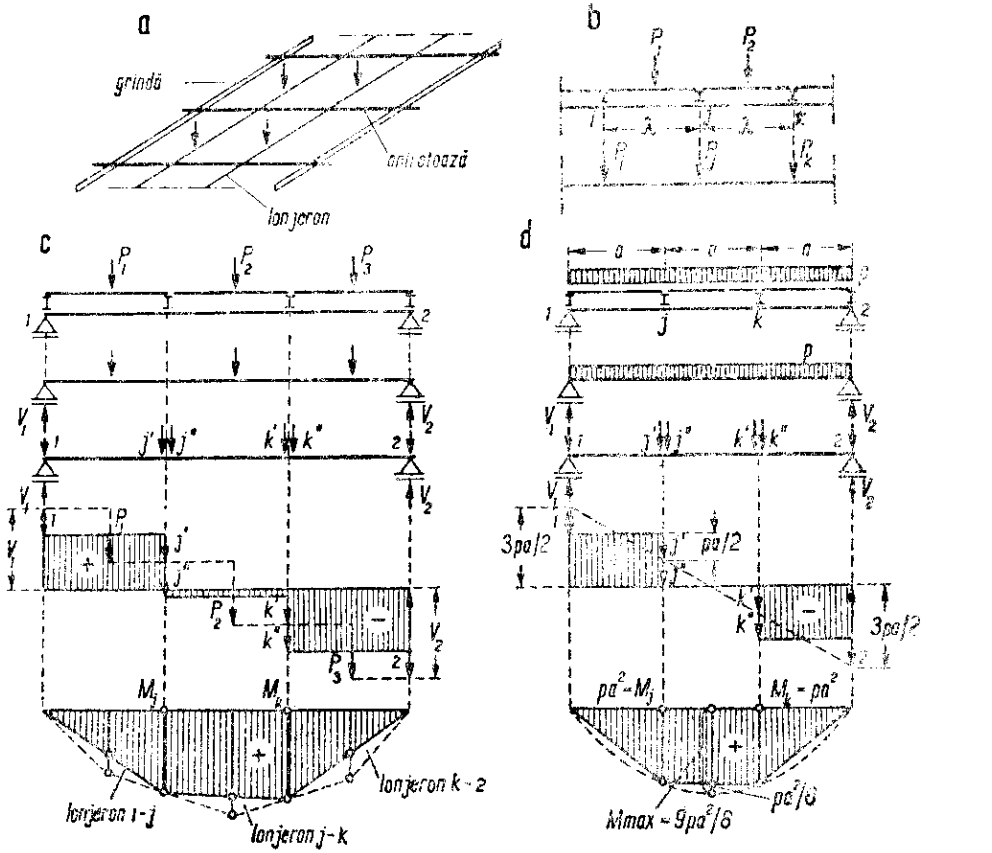


Fig. 28

Diagrama T a fost trasată punctat pentru transmiterea directă și cu linii pline pentru transmiterea indirectă, ambele deschizîndu-se cu V_1 și închizîndu-se cu V_2. Datorită componentelor transmise de antretoazele de pe reazeme, ordonatele diagramei la extremități rezultă mai mici în cazul transmiterii indirecte; aceasta avantajează grinda, deoarece reducerea intervine în zona ordonatelor maxime.

Semnificația corecției care apare în fiecare panou, între cele două diagrame, rezultă imediat considerînd lonjeroanele respective și trasînd diagramele de forțe tăietoare ale acestora. Aici componentele sarcinilor P_1, P_2 ... apar în sens

invers și au caracter de reacțiuni. Se ajunge la concluzia: diagrama T pentru transmitere indirectă se obține din diagrama corespunzătoare transmiterii directe, *scăzînd algebric diagramele T ale lonjeroanelor*. Datorită scăderii algebrice, pe unele porțiuni ale panourilor transmiterea indirectă duce la creșterea mărimii ordonatelor.

Trecînd la diagrama M, în ambele cazuri aceasta va fi mărginită de cîte un contur poligonal, cu vîrfurile pe ordonatele sarcinilor concentrate respective. Este ușor de văzut că în dreptul antretoazelor ordonatele sînt aceleași în cele două diagrame: numai în aceste secțiuni suma momentelor forțelor exterioare de la stînga este aceeași în ambele situații. Semnificația corecției care intervine pentru trecerea la diagrama corespunzătoare transmiterii indirecte rezultă din proprietatea arătată în figura 23, *h*. O latură oarecare *i-j* reprezintă o secantă pentru diagrama inițială, astfel că porțiunea de diagramă care se elimină este diagrama M a unei grinzi simplu rezemate avînd ca deschidere distanța dintre cele două antretoaze, deci tocmai diagrama lonjeronului. Înseamnă că diagrama M pentru transmiterea indirectă se obține din diagrama corespunzătoare transmiterii directe, *scăzînd algebric diagramele M ale lonjeroanelor*.

Examinarea făcută arată că grinda și lonjeroanele participă împreună la preluarea eforturilor din secțiunile situate în cuprinsul panourilor: se ajunge astfel la o micșorare a momentelor încovoietoare din grindă. Printr-o așezare judicioasă a antretoazelor, evitînd secțiunile de ordonată maximă din cazul transmiterii directe, se poate obține o diagramă M mai avantajoasă pentru grindă.

Un alt exemplu este dat în figura 28, *d*, unde pe lonjeron acționează o sarcină uniform distribuită; prin intermediul antretoazelor, aceasta se transmite la grindă sub forma de sarcini concentrate. Diagramele T și M în cele două situații au fiecare caracteristicile specifice sarcinilor respective; trecerea de la o situație la alta se obține prin scăderea diagramelor corespunzătoare lonjeroanelor.

C. GRINZI CU CONSOLE ȘI ARTICULAȚII

1. Caracteristici de alcătuire

Grinzile cu console și articulații (grinzi *Gerber*) sînt grinzi static determinate, alcătuite din mai multe grinzi drepte obișnuite (grinzi cu console, grinzi simplu rezemate), legate între ele prin articulații. Asemenea grinzi pot fi privite ca grinzi continue pe mai multe reazeme, la care nedeterminarea statică a fost înlăturată prin introducerea numărului corespunzător de articulații.

Astfel, grinda continuă din figura 29, *a* este de trei ori static nedeterminată, deoarece are trei reazeme simple intermediare (articulația și reazemul simplu de la extremități asigură numărul minim necesar de legături). Pentru a trece la un sistem static determinat este necesar să se introducă în cursul grinzii

trei articulații. Aceasta se poate face în mai multe moduri; de fiecare dată rezultă o alcătuire diferită a grinzii cu console și articulații, căreia îi corespunde o altă configurație a poziției deformate sub acțiunea sarcinilor date. Două exemple sînt arătate în figură. În primul caz, partea principală este grinda cu consolă *c-4-5*, pe extremitatea căreia reazemă altă grindă cu consolă *b-3-c* și aceasta la rîndul său suportă o grindă cu consolă *a-2-b*, pe care sprijină grinda

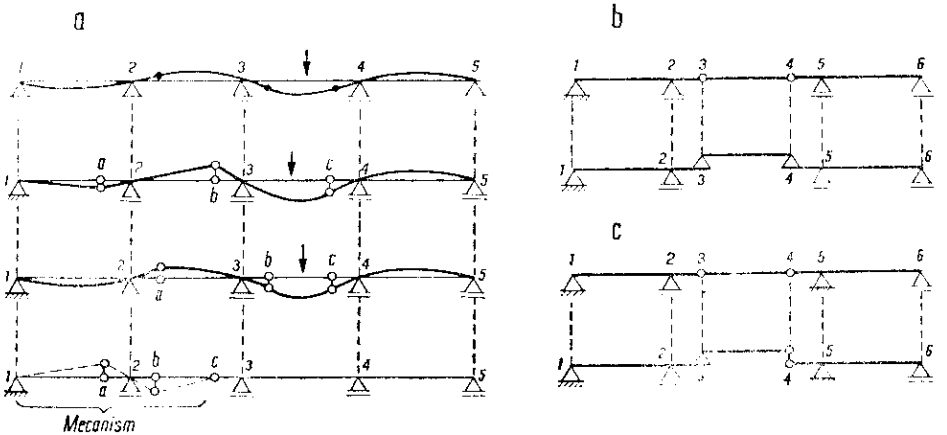


Fig. 29

simplu rezemată *1-a*. În al doilea caz sînt două părți principale, anume grinzile cu consolă *1-2-a* și *c-4-5*; pe prima se sprijină grinda cu consolă *a-3-b*, iar pe extremitățile consolelor reazemă grinda *b-c*. Să se observe deosebirea dintre pozițiile deformate care corespund încărcării cu aceiași sarcină și să se compare cu deformata grinzii continue.

Articulațiile trebuie judicios distribuite, asigurînd realizarea efectivă a unui sistem static determinat. O așezare a articulațiilor ca în ultimul caz din figura 29, *a* este defectuoasă, deoarece pe porțiunea *1-2-c* a rezultat un mecanism cu un grad de libertate, în timp ce porțiunea *c-3-4-5* a rămas o dată static nedeterminată.

Cînd deplasarea după direcția axei grinzii este împiedicată în mai multe puncte prin rezemări fixe (articulații), obținerea sistemului static determinat implică suprimarea unui surplus de legături, astfel ca fiecare element component al grinzii cu console și articulații să aibă deplasarea în lungul axei împiedicată numai într-un singur punct. Înseamnă că, pentru fiecare reazem fix suplimentar, articulația corespunzătoare introdusă în sistem trebuie alcătuită ca o legătură ce nu poate transmite acțiuni pe direcția axei grinzii, comportîndu-se deci ca reazem simplu. Astfel, pentru grinda din figura 29, *b*, există un singur reazem fix, și deci grinda independentă *3-4* reazemă prin articulare de capetele grinzilor *1-2-3* și *4-5-6*; la grinda din figura 29, *c* sînt două reazeme fixe, astfel că rezemările grinzii independente *3-4* pe capetele consolelor sînt reprezentate printr-o articulație în *3* și un reazem simplu în *4*.

2. Determinarea diagramelor de eforturi

a. **Determinare analitică.** În general, pentru calculul eforturilor la o grindă cu console și articulații se poate utiliza descompunerea în părți componente, considerînd desfăcute articulațiile și introducînd acțiunile reciproce din aceste puncte. Se obține astfel o succesiune de grinzi drepte obișnuite, pentru care se trasează diagramele de eforturi folosind normele cunoscute. Calculul se începe de la părțile secundare spre cele principale, urmărind modul cum grinzile componente reazemă unele pe altele.

Un exemplu este dat în figura 30, *a*, unde prin desfacerea articulațiilor s-a ajuns la grinda încastrată *4-5* (partea principală), grinda cu consolă *2-3-4* și grinda simplu rezemată *1-2*. Determinarea reacțiunilor se face în ordinea V_1 și V_2, V_3 și V_4, V_5 și M_5; reacțiunea V_2 a grinzii simplu rezemate devine încărcare pentru grinda cu consolă, iar reacțiunea V_4 a acesteia devine încărcare pentru grinda încastrată. O dată cunoscute reacțiunile, se trece la trasarea diagramelor T și M, folosind proprietățile generale ale acestor diagrame. De observat că, în dreptul articulațiilor *2* și *4*, mărimea forței tăietoare nu se modifică: acțiunile reciproce din aceste puncte închid diagrama pentru grinda

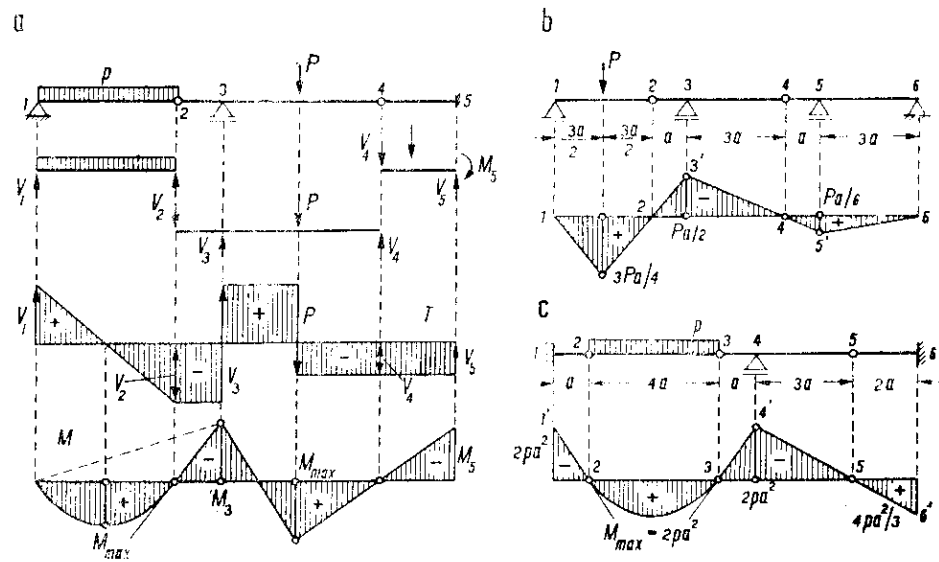


Fig. 30

din stînga și o deschid pentru grinda din dreapta. În consecință, la diagrama M tangenta rămîne aceeași în *2* și *4* pentru ambele grinzi. Salturi în digrama T și vîrfuri în diagrama M apar în dreptul articulațiilor numai cînd în aceste puncte sînt aplicate pe grindă sarcini concentrate.

Pentru cazuri simple de încărcare, determinarea diagramelor de eforturi la grinzi cu console și articulații se poate face și direct, pe baza relațiilor gene-

rale dintre sarcini și eforturi. Astfel, în cazul din figura 30, *b*, unde acționează o singură sarcină concentrată, întreaga diagramă *M* va fi mărginită de linii drepte; vîrfuri vor apărea în dreptul forțelor concentrate *P*, V_3 și V_5, iar puncte de anulare vor fi pe ordonatele articulațiilor *2* și *4*. Se începe cu diagrama corespunzătoare grinzii simplu rezemate *1-2*, prelungind dreapta *2-3'* și apoi ducînd dreptele *3'-4-5'* și *5'-6*; ultima trebuie să dea ordonată nulă pe reazemul simplu *6*. Pentru cazul din figura 30, *c* se începe cu diagrama parabolică corespunzătoare grinzii independente *2-3*, prelungită cu tangentele la parabolă în punctele *2* și *3* prin dreptele *2-1'* și *3-4'*, care dau porțiunile de diagramă de pe consolele *1-2* și *3-4*; se completează apoi trasarea cu dreapta *4'-5-6'*.

b. **Determinare grafică.** Se utilizează un procedeu similar celui folosit în figura 27, bazat pe condiția ca pentru ansamblul forțelor exterioare să rezulte un poligon de forțe închis și un poligon funicular închis. Cînd grinda este mai lungă și numărul de sarcini mai mare, prevederea unui pol unic pentru funicular conduce la diferențe mici de înclinare între razele polare succesive, respectiv între laturile funicularului; liniile de închidere care intervin rezultă prea apropiate de funicular, ceea ce reduce precizia măsurării ordonatelor. Se evită această dificultate utilizînd poluri diferite pentru grupele de

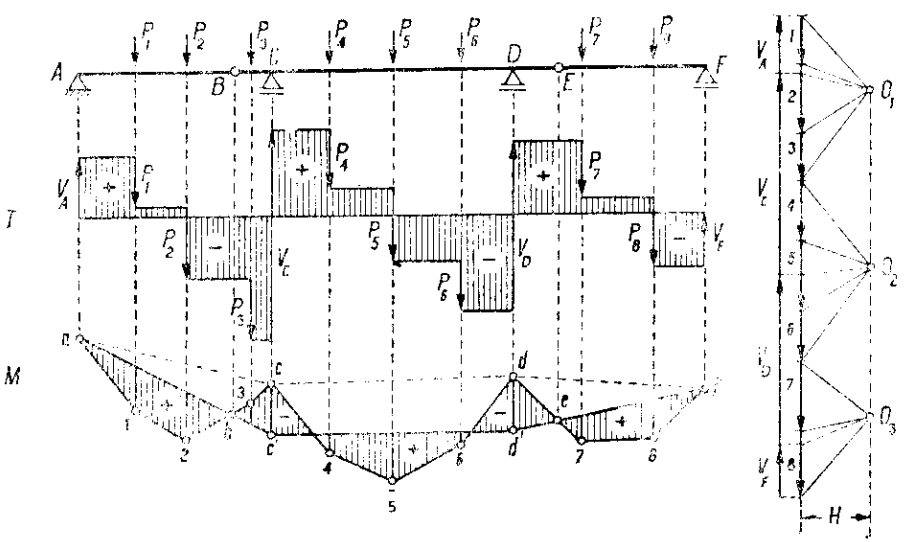


Fig. 31

sarcini de pe deschiderile grinzii, avînd însă toate *aceeași distanță polară*. Se obține astfel o succesiune de funiculare, reprezentînd de fapt un singur poligon funicular la care scara ordonatelor pentru diagrama *M* este aceeași.

Fie grinda cu console și articulații din figura 31. Pentru trasarea funicularelor corespunzătoare grupelor de sarcini de pe fiecare dintre deschiderile *A-C*, *C-D* și *D-E*, se construiește poligonul de forțe cu sarcinile P_1, ... P_8 și se iau polurile O_1, O_2 și O_3 cu distanța polară *H*. Se duc apoi în continuare

uniculare le *a-1-2-3-c*, *c-4-5-6-d* și *d-e-7-8-f*, care au punctele comune în *c* și *d* pe ordonatele reazemelor intermediare. Dacă s-ar considera grinzile simplu rezemate *A-C*, *C-D* și *D-F*, liniile de închidere ar fi *a-c*, *c-d* și *d-f*.

În grinda dată, articulațiile sînt plasate în secțiunile *B* și *E*, deci trebuie utilizată condiția că în aceste secțiuni momentele încovoietoare sînt nule. Pe baza proprietății arătate în figura 23, *h*, liniile de închidere *a-b* și *e-f* delimitează diagramele *M* pentru grinzile simplu rezemate *A-B* și *E-F*. Totodată, ținînd seama că momentul grupului de forțe exterioare de la stînga unei secțiuni este dat de segmentul de pe verticala secțiunii cuprins între prima latură a funicularului și latura din dreptul secțiunii, rezultă că prelungirea dreptei *a-b* pînă în *c'* și a dreptei *e-f* pînă în *d'* determină mărimile $\overline{cc'}$ și $\overline{dd'}$ ale momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazemele *C* și *D*. Înseamnă totodată că dreapta *c'-d'* reprezintă linia de referință pentru porțiunea de diagramă de pe deschiderea *C-D*.

Cele trei funiculare parțiale construite în continuare, împreună cu liniile de închidere *a-c'*, *c'-d'* și *d'-f*, reprezintă funicularul închis al ansamblului forțelor exterioare de pe grindă. Ducînd prin punctele O_1, O_2 și O_3 paralele la cele trei linii de închidere, se determină în poligonul forțelor mărimile reacțiunilor V_A, V_C, V_D și V_F. Se poate acum construi grafic și diagrama de forțe tăietoare, ca în figură. Diagrama *M* este haşurată și ordonatele sale trebuie multiplicate cu constanta *H*.

3. Influența poziției articulațiilor asupra diagramei *M*

La alcătuirea unei grinzi cu console și articulații, poziția reazemelor intermediare este deseori determinată pe criterii constructive; poziția articulațiilor rămîne la alegerea proiectantului. Această poziție influențează hotărîtor diagrama de momente încovoietoare. Apare aici un exemplu sugestiv de modul cum proiectantul poate stăpîni distribuția eforturilor într-o structură static determinată, prin însăși alegerea alcătuirii acesteia. O așezare judicioasă a articulațiilor reduce mărimea momentelor încovoietoare și contribuie astfel la realizarea economică a grinzii.

Fie grinda cu console și articulații din figura 32, încărcată cu o sarcină uniformă distribuită. Pornind de la grinda continuă pe trei deschideri, obținerea unui sistem static determinat necesită introducerea a două articulații. Dacă articulațiile ar fi plasate în secțiunile de pe reazemele intermediare *3* și *4*, s-ar obține o succesiune de grinzi simplu rezemate, cărora le corespund diagramele de momente încovoietoare *1-i'-3*, *3-j'-4* și *4-k'-6*. Așezînd articulațiile în cuprinsul deschiderilor laterale, anume în secțiunile *2* și *5*, linia de închidere a diagramei *M* capătă forma poligonală *1-3'-4'-6*, drept consecință a condiției de anulare a momentului încovoietor în dreptul celor două articulații. Variind poziția articulațiilor, se modifică în consecință și poziția liniei de închidere. Se pot astfel constata următoarele:

(1) Așezarea articulațiilor în cuprinsul deschiderilor conduce la o diagramă de momente încovoietoare mai favorabilă decît în cazul unei succesiuni de grinzi simplu rezemate, astfel că reprezintă o soluție mai economică. Din acest

motiv, grinzile cu console și articulații sînt deseori utilizate în construcții cînd apar necesare grinzi static determinate cu mai multe deschideri, de exemplu la construcții de poduri.

(2) Alegerea poziției articulațiilor în cuprinsul deschiderilor influențează diagrama de momente încovoietoare. Astfel, o mică îndepărtare a articulațiilor *2* și *5* de reazemele *3* și *4* conduce la deplasarea liniilor de referință

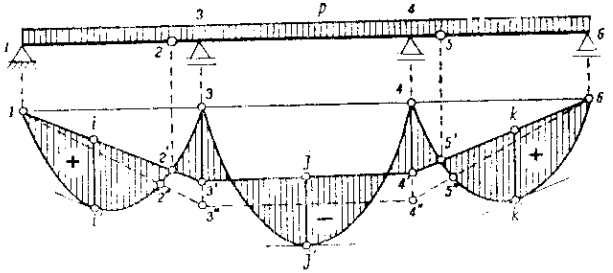


Fig. 32

1-3'-4'-6 în poziția *1-3''-4''-6*; zonele pozitive ale diagramei se micșorează, în timp ce momentele încovoietoare negative cresc. O apropiere a articulațiilor de reazemele intermediare are efectul contrar. Înseamnă că există o poziție a articulațiilor pentru care diagrama M are ordonatele cele mai mici; aceasta se realizează *cînd valorile absolute ale momentelor încovoietoare maxime, pozitive și negative, sînt egale.*

Condiția de egalare, de exemplu pentru ordonatele $\overline{ii'}$ și $\overline{33'}$, se poate obține grafic prin încercări (dînd diferite înclinări liniei de închidere *1-3'*), sau analitic prin exprimarea celor două ordonate în funcție de o aceeași variabilă (de exemplu, abscisa articulației *2* în cuprinsul deschiderii *1-3*) și scrierea ecuației de egalitate.

(3) Realizarea egalității între valorile absolute ale *tuturor* momentelor încovoietoare maxime pozitive și negative necesită folosirea mai multor variabile decît cele date de pozițiile articulațiilor. Astfel, în cazul din figura 32 apar cinci maxime, deci stabilirea egalității între toate acestea necesită patru condiții, față de numai două cîte se pot obține din poziția celor două articulații. Înseamnă că și pozițiile reazemelor intermediare trebuie considerate ca variabile ale problemei, pentru a se obține o soluție avantajoasă din punct de vedere economic. Aceasta este posibil numai atunci cînd pozițiile reazemelor intermediare nu sînt impuse de alte criterii constructive (de exemplu, la poduri, unde poziția pilelor poate fi de obicei aleasă în anumite limite).

În general, la o grindă cu n deschideri trebuie introduse $n-1$ articulații. Numărul ordonatelor maxime este $n+(n-1)=2n-1$, astfel că egalarea lor necesită $(2n-1)-1=2(n-1)$ condiții. Acest număr corespunde variabilelor disponibile, anume pozițiile articulațiilor și ale reazemelor intermediare, fiecare în număr de $n-1$.

D. CADRE STATIC DETERMINATE

1. Caracteristici

Cadrele sînt structuri alcătuite din bare, prinse rigid între ele în noduri; solicitarea dominantă este încovoierea, deoarece sarcinile pot fi aplicate oriunde în cuprinsul barelor. Cadrele sînt folosite ca elemente portante principale în alcătuirea structurilor de rezistență și pot avea forme foarte variate.

Cadrele utilizate curent în construcții sînt structuri static nedeterminate. Cadrele static determinate se întîlnesc obișnuit la rezolvarea cadrelor reale, și anume ca sisteme de bază (sisteme pe care se desfășoară calculul). Acestea se obțin din cadrele date prin suprimarea unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică. Suprimarea se poate face în diferite moduri, astfel că unui cadru dat îi pot corespunde mai multe sisteme de bază.

În figura 33 sînt date exemple de asemenea transformări. Astfel, cadrul din figura 33, *a* este de trei ori static nedeterminat și pentru a obține un sistem

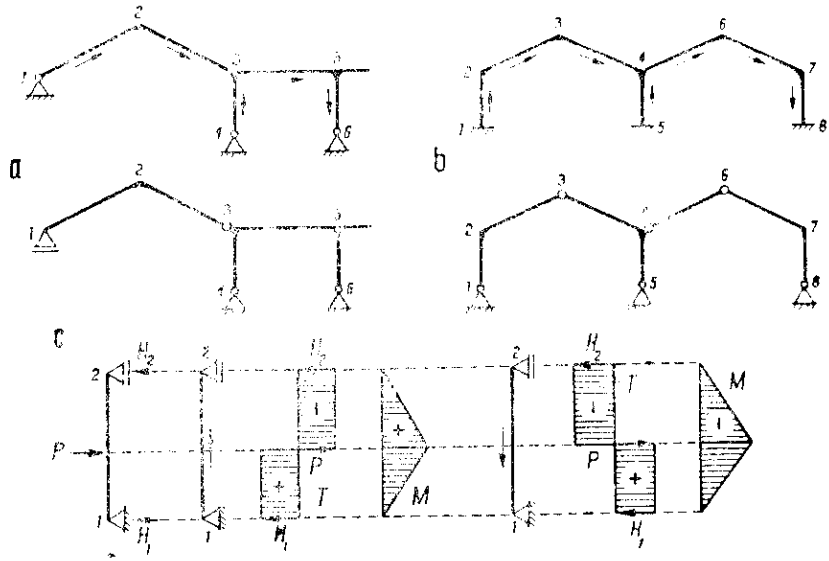


Fig. 33

static determinat s-au suprimat trei legături: articulația din extremitatea *1* s-a transformat în reazem simplu, de asemenea s-a introdus cîte o articulație în extremitatea *3* a barei *2-3* și la partea superioară a barei *5-6*. Cadrul rezultat este format din partea principală *4-3-5-6* și din partea secundară *1-2-3*. Cadrul din figura 33, *b* este de șase ori static nedeterminat; trecerea

care trei în rezemări și trei în cuprinsul structurii, cum se vede în figura inferioară. Aici, partea principală este *1-3-5* și partea secundară este *4-6-8*.

Examinînd alcătuirea cadrelor static determinate, se constată că ele sînt formate din bare drepte și din bare cotite. Astfel, în figura 33, *a* apar două bare cotite *1-2-3* și *4-5-6*, iar în figura 33,*b* sînt trei bare cotite *1-2-3*, *3-4-5* și *6-7-8*. Examinarea comportării barei cotite, ca element component al cadrelor static determinate, este făcută în paragraful următor.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi trebuie determinate mai întîi reacțiunile. Această determinare se va face pe calea cea mai simplă, evitînd ori de cîte ori este posibil desfacerea structurii în porțiuni (sau limitînd desfacerea la părțile principale și secundare). De obicei, se utilizează cele trei ecuații corespunzătoare ansamblului structurii, cît și condiția de moment încovoietor nul în articulațiile introduse în cuprinsul sistemului. Deseori poate fi utilă și schițarea determinării reacțiunilor pe cale grafică (v. fig. 12), care arată de la început direcțiile și sensurile forțelor de legătură, ușurînd înțelegerea comportării structurii.

La construirea diagramelor de eforturi se vor utiliza relațiile generale (2.1), (2.2) și proprietățile care derivă privitor la barele drepte, discutate anterior în legătură cu figura 20. Este recomandabil ca, pe această bază, să se înceapă cu schițarea calitativă a diagramelor. În același timp, este necesar să se facă permanent legătura cu fenomenul fizic al deformării structurii, care se oglindește în diagrama de momente încovoietoare. Intuirea directă a alurei poziției deformate lămurește comportarea structurii sub acțiunea sarcinilor date și oferă un control al rezultatelor obținute prin calcul. Convenția de semne pentru eforturi se stabilește după normele cunoscute (v. fig. 8—9), alegînd pe fiecare bară un sens de parcurgere (însemnat cu o săgeată, așezată pe partea dinspre care sensul de parcurgere se vede stînga→dreapta); prin aceasta se fixează și sensul pozitiv de încovoiere al barei. Diagramele de eforturi se trasează luînd ca axe de referință chiar axele barelor structurii; diagrama M se așază totdeauna de partea fibrei întinse.

Pentru succesiunea de bare care formează un contur se ia pe cît posibil sensul de parcurgere în continuare, cum se arată în figurile 33, *a-b*. La bare care separă două contururi, sensul de parcurgere se va lua pentru unul dintre acestea. În figura 33, *c* sînt ilustrate consecințele alegerii unuia sau altuia dintre sensuri asupra diagramelor T și M, considerînd o bară la care se admite mai întîi parcurgerea în sensul $1\rightarrow 2$ și apoi în sensul $2\rightarrow 1$. Se constată că semnele diagramei T rămîn aceleași, în timp ce semnele diagramei M se inversează, deoarece în primul caz sensul pozitiv de încovoiere este considerat spre dreapta, iar în al doilea caz — spre stînga. În ambele cazuri, diagrama M a rezultat desenată de aceeași parte, în concordanță cu sensul real de deformare al barei.

2. Bare cotite

O bară cotită este alcătuită din două bare drepte legate *rigid* între ele în nod. Rigiditatea nodului condiționează modul de deformare a barei cotite: tangentele duse în nod la cele două ramuri ale deformatei păstrează unghiul existent

între axele barelor în poziția inițială. Prin aceasta, deformarea uneia dintre bare antrenează și deformarea celeilalte; diagramele de eforturi se întind obișnuit pe ambele bare, chiar dacă numai una dintre ele este încărcată.

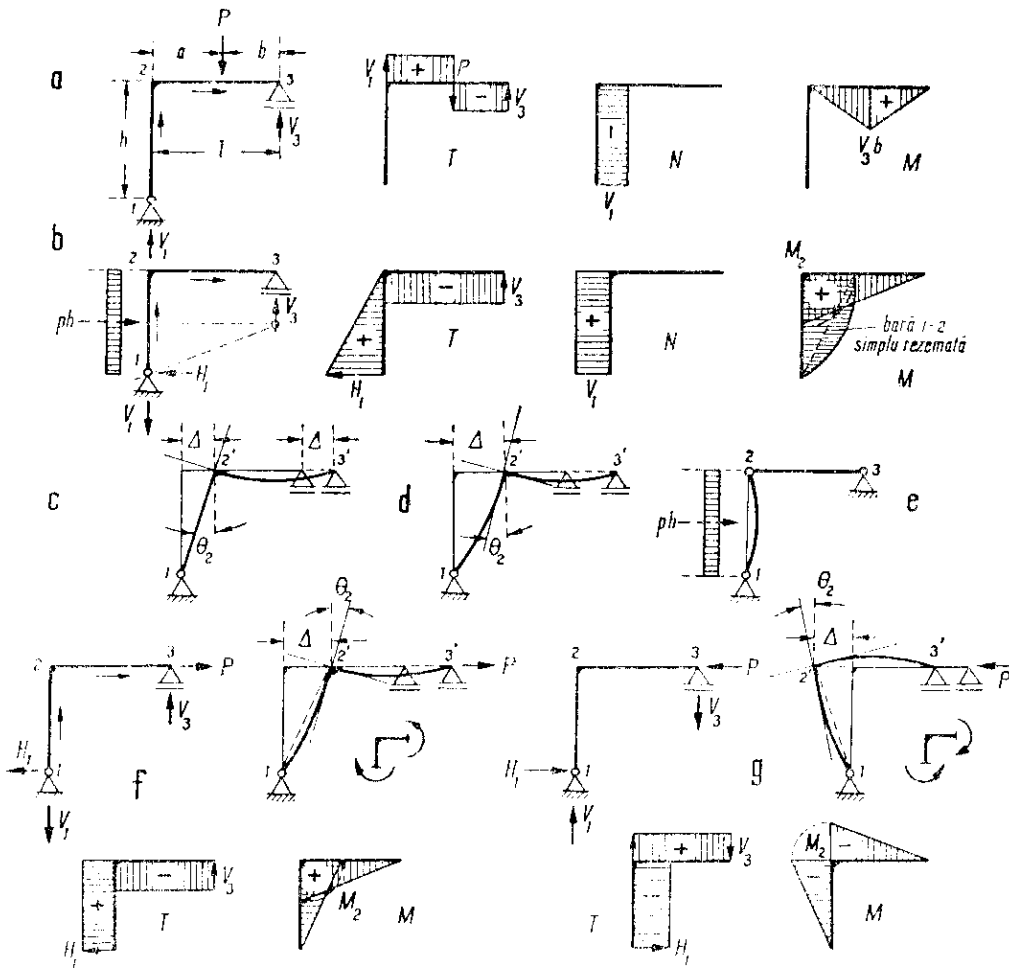


Fig. 34

Privitor la eforturile care se dezvoltă în secțiunile situate imediat de o parte și de alta a nodului rigid, trebuie reținute următoarele:

(1) Forța axială și forța tăietoare își modifică bruse valoarea, deoarece axele pe care se proiectează forțele situate la stînga secțiunii își schimbă orientarea cînd se trece de la o bară la cealaltă.

(2) Momentul încovoietor *rămîne același* în cele două secțiuni care încadrează nodul teoretic[1], deoarece acesta reprezintă pentru ambele centrul de greutate, în raport cu care se ia suma momentelor forțelor de la stînga secțiunii.

Exemplificări sînt date în figura 34, unde s-a considerat o bară cotită în unghi drept, articulată în extremitatea *1* și cu reazem simplu de reacțiune verticală în extremitatea *3*. Pentru sarcini verticale (fig. 34, *a*), reacțiunile din *1* și *3* sînt de asemenea verticale, astfel că bara *1-2* este supusă numai la efort axial; bara *2-3* nu are efort axial, iar diagramele *T* și *M* sînt aceleași ca la o grindă simplu rezemată. Poziția deformată se vede în figura 34, *c* și este caracterizată prin translația și rotirea nodului *2*. Mărimea Δ a translației rezultă din condiția ca tangenta în *2'* la ramura *2'-3'* în poziția deformată să rămînă normală pe noua poziție *1-2'* a barei verticale, care nu se deformează, deoarece în secțiunile sale nu se dezvoltă momente încovoietoare.

La trasarea alurei pozițiilor deformate se va ține seama că acestea *se încadrează în domeniul micilor deplasări* și, în consecință, se pot admite anumite aproximații, similar ca la operarea cu infiniți mici. Astfel, deplasarea unui nod se consideră normală pe raza la centrul de rotire și nu după un arc de cerc în jurul acestuia: deplasarea nodului *2* în poziția *2'* se face după normala la bara *1-2*. De asemenea, se neglijează variația de lungime a barelor, atît datorită deformării sub acțiunea forței axiale, cît și a încovoierii; înseamnă că nodul *2* nu se deplasează pe verticală, iar translațiile extremităților barei *2-3* sînt egale.

Cînd bara cotită este încărcată cu o sarcină orizontală (fig. 34,*b*), se produc reacțiunile arătate pe figură. Cuplul format de sarcina ph și reacțiunea $H_1=ph$ este echilibrat de cuplul reacțiunilor V_1 și V_3, ambele cu mărimea $ph^2/2\,l$. În reazemul simplu *3*, deplasarea pe orizontală nu este împiedicată, astfel că prin deformare bara cotită suferă o deplasare laterală în poziția *1-2'-3'* (fig. 34, *d*), iar nodul rigid se rotește. Unghiul dintre axele barelor *1-2* și *2-3* crește cînd acestea ajung în poziția *1-2'* și *2'-3'*, în timp ce unghiul dintre tangentele în *2'* la cele două ramuri ale deformatei rămîne același (ambele tangente se rotesc cu θ_2). Încastrarea dintre bare în nod este deci solicitată prin deformare și cele două bare sînt obligate să se deformeze spre interiorul barei cotite, deci în sens pozitiv conform convenției stabilite prin sensurile de parcurgere.

Diagramele de eforturi sînt arătate în figură. În diagrama *M*, porțiunea hașurată des corespunde barei *1-3* considerată simplu rezemată. Restul diagramei de pe cele două bare este format dintr-o pereche de triunghiuri cu vîrfurile în *1* și *3*, avînd ordonata comună $M_2=ph^2/2$ în nodul *2*. *Această pereche de triunghiuri reprezintă efectul rigidității nodului*. Dacă în nod ar fi o articulație (fig. 34, *e*), bara *2-3* ar juca rol de reazem simplu și bara *1-2* s-ar comporta ca simplu rezemată.

Efectul nodului rigid se poate urmări mai simplu în cazurile din figurile 34, *f* și *g*. Asupra barei cotite acționează numai o sarcină *P* aplicată în extremitatea *3*, care forțează unghiul dintre axele barelor *1-2* și *2-3* să se mărească,

[1] În diagrama *M*, ordonata din extremitatea uneia dintre bare se raportează, printr-un arc de cerc, la noua linie de referință formată de axa celeilalte bare.

respectiv să se micşoreze, cum se vede din poziţiile deformate corespunzătoare. Determinînd reacţiunile şi trasînd diagramele de eforturi, se constată că în diagrama M apare numai perechea de triunghiuri caracteristică nodului rigid. În primul caz, diagrama este pozitivă, deoarece unghiul dintre axele barelor se deschide, şi deci barele se încovoaie spre interior; în al doilea caz, diagrama este negativă, datorită închiderii unghiului care obligă barele să se încovoaie spre exterior.

Izolînd nodul unei grinzi cotite, *momentele aplicate pe cele două feţe trebuie să rezulte cu sensuri contrare*, spre a asigura echilibrul nodului. Această condiţie ajută la controlul schiţării poziţiei deformate, în ceea ce priveşte concordanţa sensurilor de deformare ale celor două bare care vin în nod.

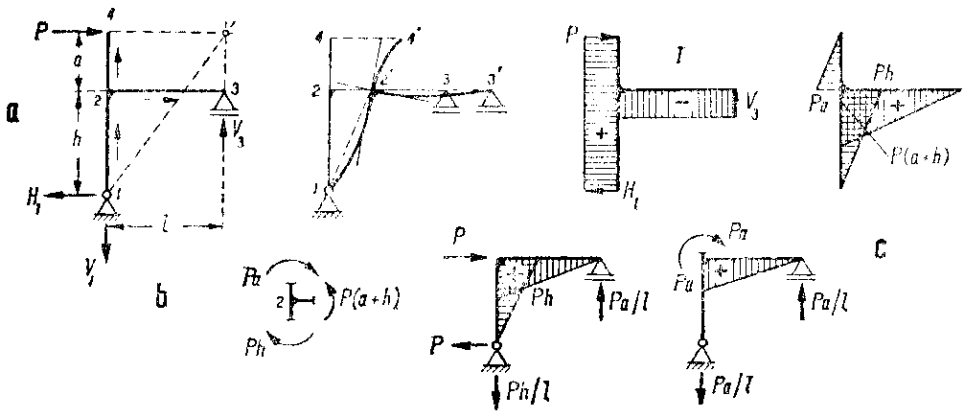


Fig. 35

În figura 35, *a* este examinat cazul unei bare cotite cu consolă. Deplasarea laterală, permisă de reazemul simplu din 3, măreşte unghiul dintre axele barelor în poziţia *1-2'-3'*, obligînd-le să se deformeze spre interior. Deformarea consolei se produce în sens contrar, astfel că ramura *1-2'-4'* a deformatei are punct de inflexiune în nodul 2. Mărimile reacţiunilor sînt $H_1 = P$ şi $V_1 = V_3 = P(a+h)/l$, conducînd la diagramele de eforturi din figură. Deoarece în nodul 2 se întîlnesc trei bare, trebuie verificat echilibrul nodului, cum se arată în figura 35, *b*.

Diagrama M pe bara cotită poate fi obţinută şi prin suprapunere, admiţînd suprimată consola şi efectul său asupra nodului 2 înlocuit cu o forţă orizontală P şi un moment Pa. Diagramele corespunzătoare se văd în figura 35, *c*.

3. Diagrame de eforturi

a. **Construirea diagramelor.** La cadre static determinate, trasarea diagramelor de eforturi şi a alurei poziţiei deformate se pot face folosind rezultatele

cunoscute de la studiul barelor drepte și a barelor cotite. Nu sînt necesare alte elemente teoretice; trebuie numai dată o atenție deosebită respectării proprietăților diagramelor și a convențiilor de semne stabilite. După aflarea reacțiunilor este indicat să se facă o verificare pe baza condiției de echilibru static, spre a depista eventuale erori înainte de a trece la trasarea diagramelor. De asemenea, și diagramele trebuie verificate folosind condiția de închidere, echilibrul nodurilor etc. În capitolul V se va arăta și un alt mod de verificare, cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale.

Pentru exemplificarea rezolvării unui cadru static determinat, fie structura din figura 36, *a*, formată din două bare cotite articulate între ele. Se începe cu schițarea determinării reacțiunilor pe cale grafică, folosind condiția de concurență a forțelor ph, R_1 și R_5: suportul reacțiunii R_5 trebuie să treacă prin articulația *3*, astfel că se obține și direcția reacțiunii R_1. Din poligonul de forțe (fig. 36, *b*) se găsesc sensurile reacțiunilor și componentelor lor H_1, V_1 și H_5, V_5.

Analitic, mărimile acestor patru componente rezultă folosind cele trei ecuații de echilibru static pentru ansamblul cadrului, precum și condiția de moment încovoietor nul în articulația *3*. Se obține

$$H_1+H_5=ph,\quad V_1=V_5=V,\quad V_5l=ph^2/2,\quad \text{și deci}\quad V_1=V_5=ph^2/2\,l,\quad V_5l/3\quad H_5h=0,$$

de unde $H_5=ph/6$ și $H_1=5\,ph/6$.

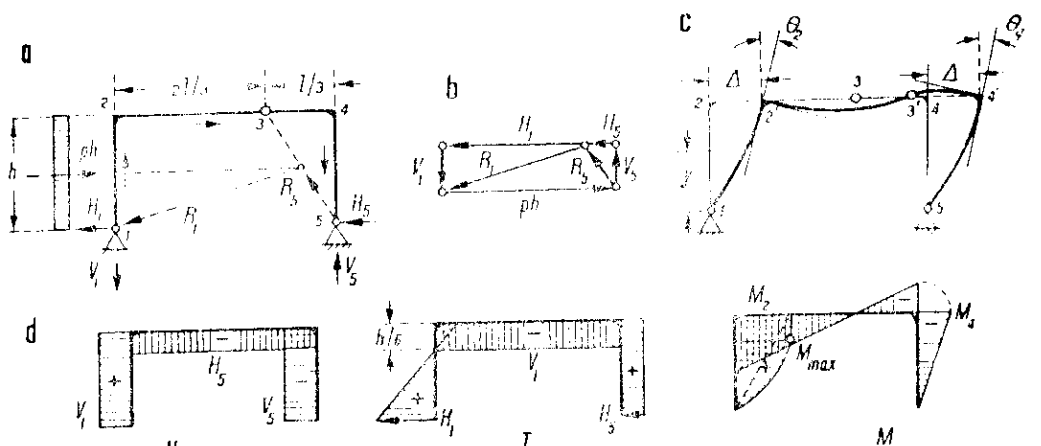


Fig. 36

Alura deformatei se vede în figura 36, *c*, caracterizată de o deplasare laterală în poziția *1-2'-3'-4'-5*; unghiul dintre axele *1-2'* și *2'-3'* se mărește față de situația inițială, în timp ce unghiul dintre axele *3'-4'* și *4' 5* se micșorează. Barele se deformează în sens pozitiv pentru porțiunea *1-2-3* și în sens negativ pentru porțiunea *3-4-5*.

Diagramele de eforturi sînt arătate în figura 36, *d*. La diagrama *T*, variația liniară de pe bara *1-2* este dată de ecuația

$$T_y=H_1-py=5\,ph/6-py,$$

care arată că diagrama se deschide cu H_1, se anulează pentru $y_m=5\,h/6$ și are valoarea $-ph/6$ în extremitatea superioară a stîlpului. În diagrama *M* apar perechile de triunghiuri

caracteristice nodurilor rigide *2* și *4*; pe bara *1-2* se adaugă și diagrama parabolică de bară simplu rezemată. În secțiunea curentă a acestei bare, momentul încovoietor are expresia

$$M_y = -5\ phy/6 - py^2/2 = py(5\ h - 3\ y)/6.,$$

astfel că în nodul *2* rezultă $M_2 = ph^2/3$. Momentul încovoietor maxim apare în secțiunea definită de $y_m = 5h/6$ și are valoarea

$$M_{max} = H_1 \cdot y_m/2 = 25ph^2/72,$$

unde s-a utilizat relația (2.6). În nodul *4*, ordonata este $M_4 = -ph^2/6$.

b. **Utilizarea simetriei și a antisimetriei.** La construcții civile sau industriale, la poduri etc., considerații de ordin funcțional, cerințe economice și de tipizare, sau cerințe estetice duc deseori la alegerea unor structuri de rezistență ale căror elemente portante principale sînt simetrice. Această particularitate poate fi folosită pentru simplificarea calculelor, atît la trasarea

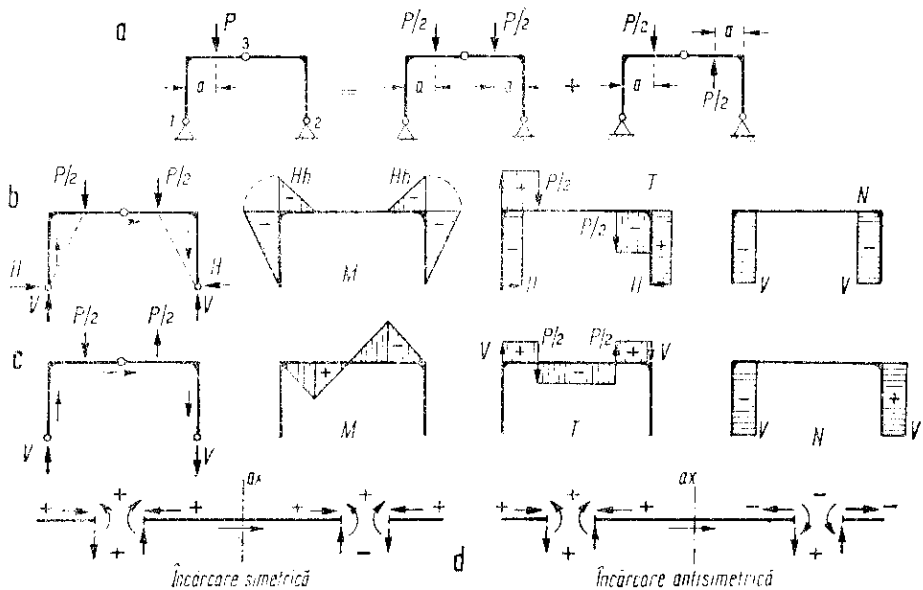


Fig. 37

diagramelor de eforturi la structuri static determinate, cît mai ales cu ocazia utilizării acestor diagrame la calculul deplasărilor elastice și la rezolvarea structurilor static nedeterminate.

Simetria unei structuri se referă atît la configurația geometrică (cele două jumătăți trebuie să se suprapună prin rabatere în jurul axei de simetrie), cît și la rezemări. O structură este simetrică față de o axă cînd barele și rezemările sale sînt dispuse simetric față de această axă[1].

[1] Pot fi și cazuri cînd structura se comportă simetric pentru *anumite încărcări*, deși rezemările sale nu sînt simetrice, dacă pentru acele încărcări rezultă *reacțiuni simetrice*.

Cît timp sarcinile aplicate pe o structură simetrică sînt oarecare, nu apar particularități pentru reacțiuni și eforturi. Este însă totdeauna posibil *să se descompună o încărcare oarecare în două componente, dintre care una simetrică și alta antisimetrică*, așa cum se vede de exemplu în figura 37, *a*. Fiecare dintre cele două componente este alcătuită din *perechi* de forțe avînd suporturile dispuse simetric față de axa de simetrie. La componenta simetrică, cele două forțe ale perechii sînt egale și au același sens, în timp ce la componenta antisimetrică sînt egale și au sensuri contrare. Mărimile forțelor componente se aleg astfel încît, prin suprapunere, să se regăsească situația de încărcare inițială.

Prin acest procedeu, încărcarea dată se înlocuiește cu două situații diferite de încărcare; acestea se rezolvă separat, determinîndu-le reacțiunile și diagramele de eforturi, urmînd ca prin suprapunere să se ajungă la reacțiunile și diagramele corespunzătoare încărcării date. Folosind această cale, sînt de trasat mai multe diagrame, dar construcția acestora este mai simplă și particularitățile lor conduc la simplificări substanțiale mai departe.

Descompunerea încărcării în cele două componente aduce structura simetrică în condiții specifice de comportare. Astfel, pentru o încărcare simetrică, starea de eforturi și poziția deformată trebuie să respecte condiția de simetrie față de axă; pentru o încărcare antisimetrică, starea de eforturi și poziția deformată trebuie să respecte condiția de antisimetrie. De aici rezultă anumite particularități, atît pentru reacțiuni, cît și pentru eforturi.

Privitor la reacțiuni, apare evident că pentru o încărcare simetrică acestea trebuie să rezulte simetrice. Astfel, în cazul din figura 37, *b* va rezulta $V_1 = V_2 = V$ și $H_1 = H_2 = H$. Totodată, acțiunea reciprocă din articulația *3* trebuie să fie orizontală; pe această bază se pot determina și direcțiile reacțiunilor R_1 și R_2, folosind condiția de concurență a cîte trei forțe pentru fiecare din cele două porțiuni (punctat pe figură). În mod asemănător, pentru o încărcare antisimetrică este evident că reacțiunile trebuie să fie antisimetrice. Din această cauză, la situația din figura 37, *c* cu încărcare antisimetrică verticală, nu pot apărea componente orizontale ale reacțiunilor (condiția de echilibru prin proiecție pe orizontală ar cere ca acestea să formeze o pereche simetrică). Se dezvoltă deci numai reacțiuni verticale; în articulația centrală, acțiunea reciprocă este de asemenea verticală.

Situația de simetrie și antisimetrie se întîlnește și la eforturi. Fie două secțiuni așezate simetric față de axa de simetrie (fig. 37, *d*), pentru care s-au reprezentat *sensurile* eforturilor ce corespund la o încărcare simetrică, respectiv la o încărcare antisimetrică. În primul caz, aceste sensuri respectă condiția de simetrie, în al doilea caz — condiția de antisimetrie.

Semnele eforturilor se determină conform convenției de semne adoptate și ținînd seama de sensul de parcurgere indicat (același pentru ambele părți). În secțiunea din partea stîngă se admit eforturi N, T, M pozitive, urmînd ca — în raport cu natura încărcării — să se stabilească semnele ce rezultă pentru eforturile secțiunii din dreapta, deoarece mărimile lor sînt evident aceleași. Se vede imediat că, în primul caz, eforturile N și M își păstrează semnele, iar T și-l inversează, în timp ce în al doilea caz N și M apar cu semne inversate, iar T rămîne cu același semn. Se ajunge la concluzia:

pentru o structură simetrică, la încărcări simetrice corespund diagrame N și M simetrice, precum și diagrama T antisimetrică; la încărcări antisimetrice corespund diagrame N și M antisimetrice, precum și diagrama T simetrică. În figurile 37, *b* și *c* sînt trasate diagramele corespunzătoare, care exemplifică aceste concluzii.

Mai trebuie menționat că, pentru *secțiunea din axa de simetrie* a unei structuri simetrice, descompunerea încărcării în componente simetrică și antisimetrică duce la situații particulare în ceea ce privește eforturile din secțiune, deoarece acestea trebuie să satisfacă condiția respectivă. Astfel, pentru o încărcare simetrică *forța tăietoare trebuie să fie nulă*, deoarece este reprezentată printr-o pereche antisimetrică de forțe. Asemănător, pentru o încărcare antisimetrică *forța axială și momentul încovoietor trebuie să fie nule*, deoarece sînt reprezentate prin perechi de forțe (momente) simetrice.

Prin descompunerea încărcării în componente, la structuri simetrice, diagramele de eforturi se pot construi numai pentru jumătate de structură, transpunîndu-le apoi pe a doua jumătate simetric sau antisimetric, după caz.

CAPITOLUL III

ARCE STATIC DETERMINATE

A. GENERALITĂȚI

1. Tipuri de structuri

Arcele sînt bare cu axă curbă plană. Sarcinile acționează în planul arcului și sînt dirijate de obicei în sens opus convexității. Arcele se întîlnesc ca elemente portante principale la susținerea acoperișurilor de hale industriale, la poduri etc.

Arcele static determinate conțin numărul minim de legături necesare fixării în plan. În această situație se găsesc *arcul cu o articulație și un reazem simplu* (fig. 38, *a*), la care direcția reacțiunii din reazemul simplu are o înclinare $\beta < 90^\circ$ față de orizontală și *arcul cu trei articulații* (fig. 38, *b*), care reprezintă tipul curent utilizat în aplicațiile practice[1].

Caracteristica principală a arcelor derivă din faptul că legăturile sînt dispuse astfel ca să împiedice sau să limiteze variația de distanță dintre extremitățile barei curbe. În consecință, datorită acestei dispuneri a legăturilor, arcele dau *împingeri laterale* asupra rezemărilor; se ajunge astfel la o comportare avantajoasă sub acțiunea sarcinilor, rezultînd o reducere importantă a momentelor încovoietoare față de cazul grinzii drepte. Modul favorabil în care un arc poate suporta sarcini a fost menționat și anterior, în legătură cu figura 15, arătîndu-se că prin forma curbă a axei se poate realiza o apropiere de un funicular al sarcinilor date.

Împingerile laterale date de arce trebuie preluate de elementele de construcție care susțin arcul. În cazul podurilor, arcele sprijină pe elemente masive (culee) care servesc drept fundație, astfel că împingerile laterale sînt ușor echilibrate. La construcții industriale însă, preluarea împingerilor laterale de către elementele de rezemare (stîlpi, ziduri) devine dificilă și neeconomică, astfel că de obicei extremitățile arcului — sau alte două puncte ale acestuia — sînt legate printr-un *tirant* (fig. 38, *c*). Deoarece tirantul reprezintă o legătură în plus, introducerea acestuia cere ca una dintre rezemări să devină reazem simplu, spre a se menține situația de determinare statică. Uneori, tirantul este suspendat de arc, spre a i se reduce lungimea liberă; în acest caz poate rămîne în linie dreaptă, sau poate fi așezat ca în figura 38, *d*, mărind gabaritul liber al halei.

---

[1] Privitor la terminologie: extremitățile unui arc poartă numele de *nașteri*, iar secțiunea cea mai depărtată — pe verticală — de linia nașterilor se numește *cheie*; segmentul de ordonată cuprins între cheie și linia nașterilor reprezintă *săgeata* arcului.

Modul de comportare a arcului cu trei articulații[1] se regăsește și la alte structuri alcătuite după aceeași schemă, cum sînt cele din figurile 38, *e* și *f*. Concluziile și formele sistematizate de calcul ce vor fi stabilite în cele ce urmează se pot deci aplica și cadrelor triplu articulate formate din bare drepte, întîlnite în capitolul precedent.

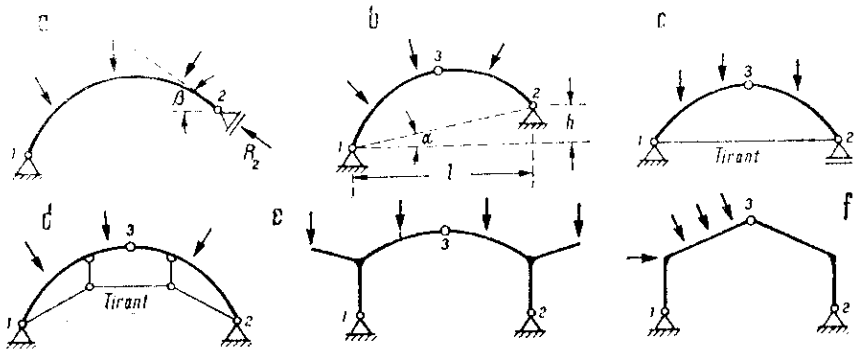


Fig. 38

O comportare asemănătoare se poate realiza și pentru grinzi drepte, dacă acestea sînt folosite împreună cu un lanț de bare articulate formînd împreună un sistem geometric invariabil. Asemenea *structuri mixte*[2] se întîlnesc uneori la construcția podurilor, la traversări pentru conducte etc.

2. Relații generale între sarcini și eforturi

La un arc este necesar să se aleagă în primul rînd un sistem de axe de referință pentru raportarea geometrică a ansamblului arcului (fig. 39, *a*). Față de acest sistem, o secțiune oarecare *i* este definită prin coordonatele x_i, y_i ale centrului său de greutate și prin înclinarea φ_i a tangentei la arc în acel punct. Pentru definirea eforturilor din secțiune se adoptă și un sistem de axe propriu al secțiunii, format din tangenta și normala la arc; acest sistem variază de la o secțiune la alta în lungul arcului. Deoarece toate forțele exterioare (sarcini și reacțiuni) acționează în planul arcului, rezultă că într-o secțiune oarecare *i* se dezvoltă eforturile N_i, T_i, M_i; în figura 39, *b* sînt arătate sensurile *pozitive* ale eforturilor, conform convenției de semne adoptate (v. fig. 8).

---

[1] Pentru arcul cu o articulație și un reazem simplu vezi S.C-1 (p. 224—232). Acest tip de arc nu are în general folosință practică, dar studiul său este interesant, deoarece prin variația înclinării reazemului simplu se obține trecerea de la comportarea de grindă pe două reazeme la cea de arc.

[2] Studiul structurilor mixte static determinate este dat în S.C-1 (p. 280—288).

Asemănător ca la bare drepte, se pot stabili și pentru arce relații generale între sarcini și eforturile care se dezvoltă în secțiune curentă. Acestea se obțin din considerarea echilibrului unui element infinit mic de arc.

Separînd un element ds, se introduc în extremități efectele restului arcului, anume N, T, M și $N+\mathrm{d}N$, $T+\mathrm{d}T$, $M+\mathrm{d}M$, unde $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}M$ reprezintă

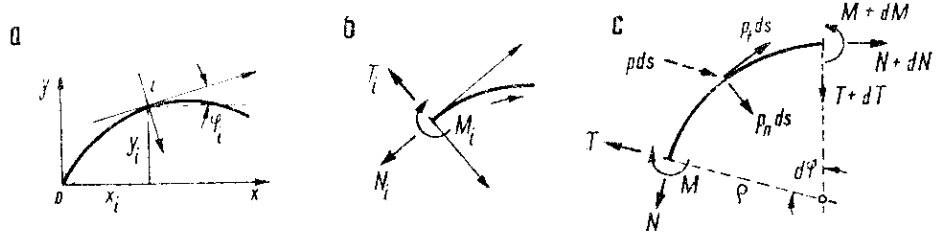


Fig. 39

variațiile eforturilor pe intervalul ds. Admițînd în secțiuni eforturi pozitive, se obține situația din figura 39, *c*. Deoarece elementul este infinit mic, se poate admite — oricare ar fi legea de distribuire a sarcinii — că pe element sarcina este uniform distribuită. Trebuie deci considerată o sarcină elementară pds de direcție oarecare, care se poate descompune în componentele $p_n ds$ și $p_t ds$, dirijate după normala și tangenta la arc în punctul său de aplicație.

Raza de curbură se poate de asemenea considera constantă pe element, deci $ds=\rho d\varphi$ sau $d\varphi=ds/\rho$. Totodată, ținînd seama că unghiul $d\varphi$ este infinit mic, se poate admite $\sin d\varphi \cong d\varphi = ds/\rho$ și $\cos d\varphi \cong 1$. La exprimarea echilibrului elementului se neglijează infiniții mici de ordin superior, cum sînt: proiecțiile componentelor sarcinii elementare cînd intervine $\sin d\varphi$, momentele acestor componente față de extremitățile elementului, momentul forței axiale dintr-o extremitate în raport cu cealaltă extremitate.

Ecuațiile de echilibru prin proiecții, după tangenta și normala la arc în secțiunea $s+ds$, dau

$$N+\mathrm{d}N-N-T\,ds/\rho+p_t ds=0 \quad \text{și} \quad T+\mathrm{d}T-T+N\,ds/\rho+p_n ds=0,$$

din care rezultă

$$\frac{\mathrm{d}N}{ds}=-p_t+\frac{T}{\rho} \quad \text{și} \quad \frac{\mathrm{d}T}{ds}=-p_n-\frac{N}{\rho}. \tag{3.1}$$

Se vede imediat că, pentru $\rho\to\infty$, se regăsesc sub formă de cazuri particulare relațiile (2.1) de la bare drepte. La bare curbe, relațiile (3.1) sînt mai greu de aplicat pentru trasarea diagramelor de eforturi, datorită intervenției curburii barei și a raportării la elementul ds pe curbă. Sînt și cazuri cînd utilizarea acestor relații duce la rezultate imediate, cum se va vedea mai departe în legătură cu figura 43, *c*.

Ecuația de echilibru prin momente, în raport cu centrul de greutate al secțiunii $s+ds$, dă

$$M+T\,ds-M-\mathrm{d}M=0, \quad \text{deci} \quad \mathrm{d}M/ds=T, \tag{3.2}$$

regăsind aceeași relație ca la barele drepte, care arată că în orice secțiune a arcului derivata momentului încovoietor, în raport cu abscisa s care fixează

poziția secțiunii pe arc, este egală cu forța tăietoare. Deoarece în dreptul unei sarcini concentrate (care nu este tangentă la arc) în mărimea forței tăietoare intervine un salt, rezultă că în secțiunea respectivă în diagrama M apare un vîrf, în timp ce pentru sarcini distribuite diagrama este mărginită de o curbă continuă.

B. REZOLVAREA ANALITICĂ A ARCULUI CU TREI ARTICULAȚII

1. Sarcini de direcție oarecare

Considerînd cazul general al unui arc cu extremități denivelate (fig. 40, *a*), reacțiunile R_1 și R_2 se pot descompune în două moduri, după cum se consideră ca axe linia articulațiilor și verticala, respectiv orizontala și verticala. În primul caz rezultă perechile de componente H_1', V_1' și H_2', V_2', iar în al doilea caz perechile H_1, V_1 și H_2, V_2. Corelația dintre perechile de componente care corespund aceleiași reacțiuni se găsește considerînd grupele de cîte două forțe egale și directe opuse în echilibru R_1 și $-R_1$, respectiv R_2 și $-R_2$, unde prima forță se descompune în componente de tip H', V' și a doua forță se descompune în componente de tip H, V, cum se vede în figura 40, *b*. Prin proiecții pe verticală și orizontală se obține

$$\begin{aligned} &\text{(articulația 1)} \quad H_1 = H_1' \cos\alpha, \qquad V_1 = V_1' + H_1' \sin\alpha = V_1' + H_1 \operatorname{tg}\alpha, \\ &\text{(articulația 2)} \quad H_2 = H_2' \cos\alpha, \qquad V_2 = V_2' - H_2' \sin\alpha = V_2' - H_2 \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \tag{3.3}$$

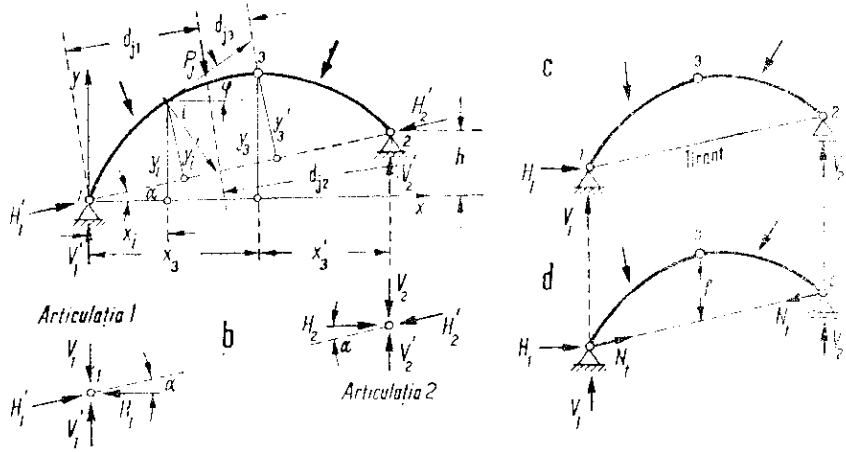


Fig. 40

Reacțiunile se pot determina mai simplu folosind componentele de tip H', V', după care se trece la celălalt tip de componente (mai ușor de utilizat în calculele practice), aplicînd relațiile (3.3). Sînt în total patru necunoscute.

și deci trebuie folosite patru condiții, de exemplu trei ecuații de echilibru pentru ansamblul arcului și condiția de moment încovoietor nul în articulația centrală. Ecuațiile de momente în raport cu extremitățile *1* și *2* dau

$$V_1' l - \sum_1^2 P_j d_{j1} = 0, \quad V_2' l - \sum_1^2 P_j d_{j1} = 0,$$

din care rezultă

$$V_1' = \sum_1^2 P_j d_{j2}/l, \quad V_2' = \sum_1^2 P_j d_{j1}/l. \tag{3.4}$$

Condiția de moment încovoietor nul în articulația centrală, scrisă pentru grupul de forțe exterioare de la stînga și respectiv de la dreapta acestei articulații[1], este

$$V_1' x_3 - H_1' y_3' - \sum_1^3 P_j d_{j3} = 0, \quad V_2' x_3' - H_2' y_3' - \sum_3^2 P_j d_{j3} = 0,$$

de unde se obține

$$H_1' = \frac{1}{y_3'}\left(V_1' x_3 - \sum_1^3 P_j d_{j3}\right), \quad H_2' = \frac{1}{y_3'}\left(V_2' x_3' - \sum_3^2 P_j d_{j3}\right). \tag{3.5}$$

Expresiile (3.4) și (3.5), împreună cu relațiile (3.3), arată că *reacțiunile arcului cu trei articulații nu depind de forma curbei care definește axa arcului, ci numai de poziția relativă a celor trei articulații*. Aceasta este datorită situației de determinare statică a arcului[2].

Trecînd la determinarea eforturilor N, T, M, fie o secțiune oarecare i pe arc (fig. 40, *a*), unde tangenta face cu orizontala unghiul φ. Pe baza convenției de semne stabilite pentru eforturi se poate scrie:

$$N_i = -H_1' \cos(\varphi - \alpha) - V_1' \sin\varphi + \sum_1^i {}_{pr.N} P_j = -H_1 \cos\varphi - V_1 \sin\varphi + \sum_1^i {}_{pr.N} P_j,$$

$$T_i = -H_1' \sin(\varphi - \alpha) + V_1' \cos\varphi + \sum_1^i {}_{pr.T} P_j = -H_1 \sin\varphi + V_1 \cos\varphi + \sum_1^i {}_{pr.T} P_j,$$

$$M_i = V_1' x_i - H_1' y_i' + \sum_1^i {}_{mom.i} P_j = V_1 x_i - H_1 y_i + \sum_1^i {}_{mom.i} P_j. \tag{3.6}$$

Semnele din relațiile (3.6) au caracter informativ, ele putîndu-se modifica atît datorită direcției sarcinilor, cît și direcției tangentei la arc în secțiune. Cînd se trece de la o secțiune la alta — în lungul arcului — variază atît unghiul φ, cît și coordonatele centrului de greutate al secțiunii în raport cu sistemul de axe. Din această cauză, trasarea pe cale analitică a diagramelor

[1] Însumînd aceste două relații, se obține ecuația de echilibru pentru ansamblul arcului, scrisă prin momente în raport cu articulația *3*. Înseamnă că de fapt s-au folosit trei ecuații de momente, în raport cu trei puncte necoliniare (cele trei articulații) și condiția de moment încovoietor nul în articulația centrală

[2] Se va vedea în capitolul XI că la arce static nedeterminate mărimile reacțiunilor depind de forma axei arcului și de variația momentului de inerție al secțiunii în lungul arcului.

N, T, M în cazul sarcinilor de direcţii oarecare este dificilă şi nu prezintă interes practic.

Pentru arce cu *tirant*, situaţia este arătată în figura 40, *c*. Arcul cu tirant formează un element invariabil geometric şi are în reazemări numai trei legături, cărora le corespund reacţiunile H_1, V_1 şi V_2; acestea se pot determina ca la orice element aşezat pe două reazeme. Se vede imediat că aici componenta H_1 are numai rolul de a echilibra proiecţia orizontală a rezultantei sarcinilor. Împiedicarea variaţiei de distanţă dintre extremităţi este realizată de către tirant, care se încarcă cu efortul N_t.

Comparînd situaţia arcului cu tirant (fig. 40, *d*) şi a arcului cu trei articulaţii (fig. 40, *a*), se vede că în articulaţia 2 va fi $N_t = H_2$ şi $V_2 = V_2'$, rezultanta fiind în ambele cazuri R_2. În articulaţia *1*, rezultanta forţelor H_1, V_1 şi N_t din primul caz trebuie să fie aceeaşi cu a forţelor H_1', V_1' din al doilea caz, anume R_1.

Privitor la eforturi, se constată că — prin introducerea tirantului — nu se aduce nici o modificare rezultantelor de reacţiuni din extremităţile arcului, astfel că eforturile din secţiuni vor fi *aceleaşi* ca în cazul arcului cu trei articulaţii.

2. Cazul sarcinilor verticale

a. **Expresiile reacţiunilor şi ale eforturilor.** Datorită situaţiei particulare a sarcinilor, se pot sistematiza expresiile generale (3.4)—(3.6). În acest scop, se consideră în paralel grinda simplu rezemată de aceeaşi deschidere cu arcul şi încărcată cu aceleaşi sarcini (fig. 41, *a*). Spre diferenţiere, se notează cu indicele „o" reacţiunile şi eforturile acestei grinzi.

Pentru reacţiunile verticale de tip V' se obţin prin ecuaţii de momente în raport cu extremităţile *1* şi *2*

$$V_1' = \sum_1^2 P_j b_j / l = V_1^0, \qquad V_2' = \sum_1^2 P_j a_j / l = V_2^0, \tag{3.7}$$

astfel că *aceste reacţiuni sînt aceleaşi cu ale grinzii simplu rezemate*. Din relaţiile (3.3) se obţin şi reacţiunile verticale de tip V, anume

$$V_1 = V_1^0 + H' \sin\alpha = V_1^0 + H \operatorname{tg}\alpha, \quad V_2 = V_2^0 - H' \sin\alpha = V_2^0 - H \operatorname{tg}\alpha, \tag{3.8}$$

de unde se vede că aceste reacţiuni diferă de cele ale grinzii simplu rezemate, intervenind o corecţie produsă de H datorită denivelării extremităţilor arcului. În cazul particular, cînd extremităţile ar fi de nivel ($\alpha = 0$), cele două tipuri de reacţiuni se confundă, deci $V_1' = V_1 = V_1^0$ şi $V_2' = V_2 = V_2^0$.

Deoarece toate sarcinile sînt verticale, rezultă că $H_1' = H_2' = H'$ şi $H_1 = H_2 = H$. Condiţia de moment încovoietor nul în articulaţia centrală are forma

$$V_1' x_3 - \sum_1^3 P_j (x_3 - a_j) - H' y_3' = 0,$$

unde $V_1' = V_1^0$, şi deci primii doi termeni reprezintă tocmai momentul încovo-

ietor M_3^0 din secțiunea 3 (în dreptul articulației centrale) a grinzii simplu rezemate. Condiția devine

$$M_3^0 - H' y_3' = 0, \quad \text{deci} \quad H' = M_3^0 / y_3' \quad \text{sau} \quad H = M_3^0 / f, \tag{3.9}$$

unde s-a ținut seama că $H = H' \cos \alpha$ și de asemenea că $y_3' / \cos \alpha = f$ (săgeata arcului). La arce cu extremități de nivel $H' = H = M_3^0 / f$.

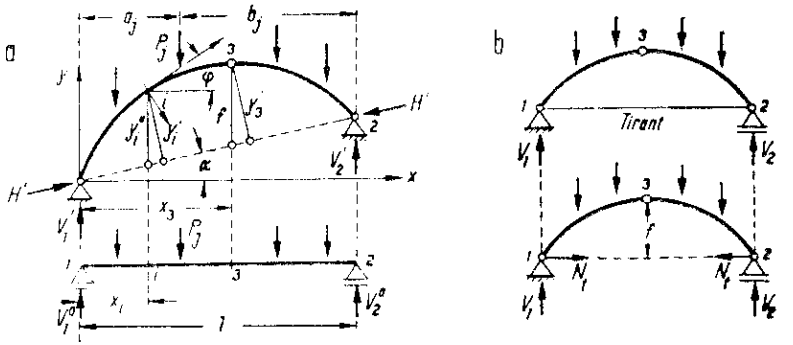


Fig. 41

Expresia (3.9) arată că, pentru același ansamblu de sarcini caracterizat prin M_3^0, *mărimea împingerii H variază invers proporțional cu săgeata arcului*; arcele înalte dau împingeri mici, arcele turtite (pleoștite) dau împingeri mari.

Se constată și aici că reacțiunile arcului cu trei articulații nu depind de forma axei arcului, ci numai de poziția relativă a celor trei articulații. Sistematizările făcute permit să se calculeze toate reacțiunile direct din expresiile stabilite, în funcție de elemente ale grinzii simplu rezemate corespunzătoare arcului dat.

Trecînd la eforturi, într-o secțiune oarecare i se obțin următoarele expresii pentru forța axială și forța tăietoare (semnul unghiului φ depinde de poziția secțiunii pe arc):

$$\begin{aligned} N_i &= -H' \cos(\varphi - \alpha) - \left(V_1^0 - \sum_1^i P_j \right) \sin \varphi = -H' \cos(\varphi - \alpha) - T_1^0 \sin \varphi, \\ T_i &= -H' \sin(\varphi - \alpha) + \left(V_1^0 - \sum_1^i P_j \right) \cos \varphi = -H' \sin(\varphi - \alpha) + T_1^0 \cos \varphi, \end{aligned} \tag{3.10}$$

unde s-a ținut seama că paranteza reprezintă mărimea forței tăietoare din secțiunea i a grinzii simplu rezemate avînd aceeași deschidere și aceleași sarcini ca și arcul. Dacă se lucrează cu împingerea orizontală H, se face înlocuirea $H' = H / \cos \alpha$. Cînd extremitățile arcului sînt de nivel, expresiile celor două eforturi devin

$$N_i = -H \cos \varphi - T_i^0 \sin \varphi \quad \text{și} \quad T_i = -H \sin \varphi + T_i^0 \cos \varphi. \tag{3.11}$$

Deoarece unghiul φ variază de la o secțiune la alta, este mai dificil să se traseze direct diagramele N și T. Obișnuit, trasarea se face prin puncte: se împarte axa arcului într-o serie de porțiuni, se calculează mărimile eforturilor în punctele de diviziune și se ridică în ordonată, unind apoi printr-o curbă continuă extremitățile ordonatelor.

Expresia momentului încovoietor în secțiunea i este

$$M_i = V_1' x_i - \sum_1^i P_j(x_i - a_j) - H' y_i,$$

unde primii doi termeni reprezintă momentul încovoietor M_i^0 din secțiunea i a grinzii simplu rezemate. Se poate deci scrie

$$M_i = M_i^0 - H' y_i' \text{ sau } M_i = M_i^0 - H y_i'', \tag{1.12}$$

unde s-a ținut seama că $H' = H/\cos\alpha$ și $y_i = y_i'' \cos\alpha$, notînd cu y_i'' segmentul pe verticală cuprins între secțiunea i și linia *1-2* a articulațiilor. Cînd extremitățile sînt de nivel, expresia devine $M_i = M_i^0 - H y_i$, unde y_i este ordonata secțiunii i.

Expresia (3.12) arată că momentul încovoietor într-o secțiune a arcului este egal cu momentul încovoietor din secțiunea corespunzătoare a grinzii simplu rezemate, micșorat cu cantitatea $H y_i''$. Aceasta înseamnă că *arcul lucrează mai favorabil decît grinda dreaptă pentru suportarea aceleași sarcini*. Din examinarea care urmează se va putea vedea că la arce diagramele de momente încovoietoare sînt în general mult mai reduse și că este posibil — în anumite cazuri particulare — ca această diagramă să dispară complet, secțiunile arcului lucrînd numai la compresiune centrică.

Cînd arcul are *tirant* (fig. 41, *b*), situația rămîne aceeași, deoarece efortul N_t din tirant joacă același rol ca împingerea orizontală H și are aceeași mărime. Sarcinile fiind verticale, în rezemarea *1* nu apare o componentă orizontală a reacțiunii. Se obține $V_1 = V_1^0$, $V_2 = V_2^0$ și $N_t = M_3^0/f$, astfel că diagramele de eforturi sînt aceleași ca pentru arcul cu trei articulații.

b. **Trasarea diagramei** M. Relația (3.12) arată că, în cazul sarcinilor verticale, se poate sistematiza construirea diagramei de momente încovoietoare folosind o suprapunere de două diagrame. Se determină mai întîi diagrama M^0 pentru sarcinile date pe grinda dreaptă corespunzătoare, apoi se scade corecția Hy'', unde succesiunea de segmente y'' reprezintă *suprafața cuprinsă între axa arcului și linia articulațiilor*, cu ordonate măsurate pe verticală. Acest mod de construire este arătat în figura 42, *a*, unde s-a hașurat diferența dintre cele două diagrame, care reprezintă diagrama M a arcului. Se vede astfel direct modul mult mai favorabil de comportare a arcului în raport cu grinda dreaptă.

În articulația centrală rezultă $M_3 = M_3^0 - Hf = 0$, deoarece $H = M_3^0/f$, iar în extremități $M_1 = M_2^0 = 0$ și $y_1'' = y_2'' = 0$. Înseamnă că cele două diagrame M^0 și $-Hy''$ au trei puncte comune, în dreptul celor trei articulații ale arcului unde momentele încovoietoare sînt nule. În zonele unde diagrama $-Hy''$ are ordonate mai mici decît M^0, rezultă diagrama M pozitivă pentru arc;

în caz contrar, această diagramă este negativă. Construcția făcută scoate în evidență faptul că *forma axei arcului are o influență hotărîtoare asupra diagramei M*.

Cîteva exemple sînt date în figurile 42, *b-d*. Astfel, în figura 42, *b* este arătată construcția diagramei M pentru un arc simetric cu trei articulații, încărcat cu o singură sarcină verticală P aplicată la cheie. Diagrama M^0 are formă

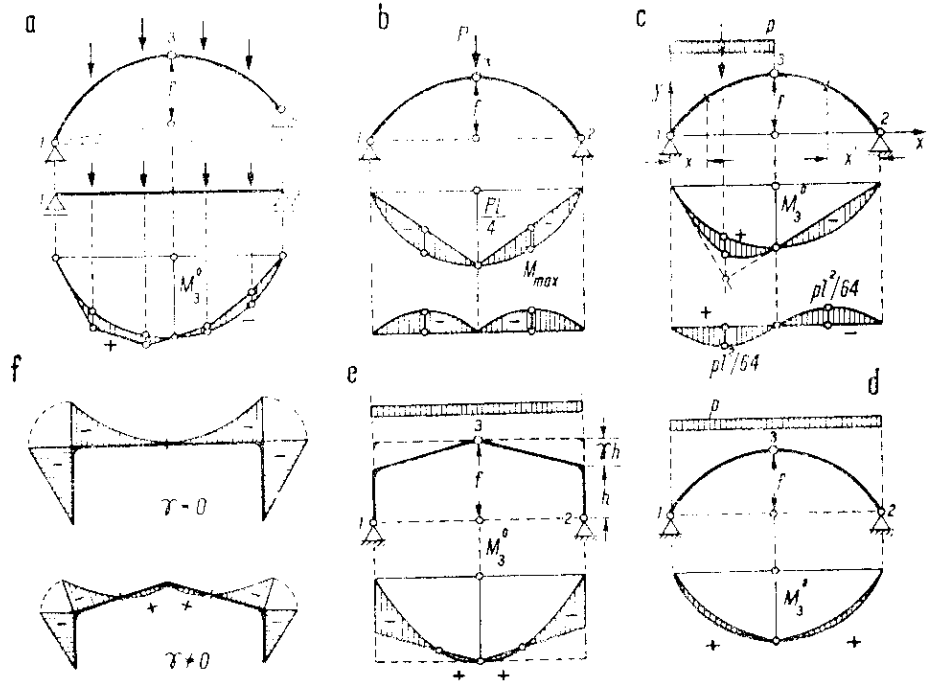


Fig. 42

triunghiulară și ordonată maximă egală cu $Pl/4$. Din aceasta se scade diagrama ordonatelor y (forma arcului) multiplicată cu constanta $H = M_3^0/f = Pl/4f$. Rezultă suprafața hașurată, care a fost apoi raportată la o axă de referință orizontală. Este ușor de văzut influența formei axei arcului asupra diagramei hașurate. Cînd porțiunile *1-3* și *3-2* de arc ar avea curbură mai redusă, ordonatele diagramei M scad; la limită — cînd cele două porțiuni ar deveni bare drepte — diagrama de momente încovoietoare dispare. Alte cazuri de construire a diagramei M la un arc cu trei articulații, pentru încărcare cu o sarcină uniform distribuită pe jumătate de deschidere sau pe întreaga deschidere, se văd în figurile 42, *c* și *d*.

Determinarea analitică a diagramei M se face calculînd mai întîi mărimea impingerii H și introducînd apoi în relația (3.12) expresiile lui M^0 și $-Hy$ în funcție de abscisa x. Se va ține seama de intervalele pe care una sau alta

dintre aceste expresii are forme diferite. Pentru claritate, se dă în continuare calculul analitic efectiv al cazului din figura 42, *c*, considerînd un arc simetric cu axă *parabolică*.

Ecuația axei arcului se poate scrie sub forma $y=Ax(l-x)$, care se anulează pentru $x=0$ și $x=l$. Din condiția ca la abscisa $x=l/2$ să rezulte $y=f$, se găsește $A=4f/l^2$, și deci ecuația devine $y=4fx(l-x)/l^2=4f\xi(1-\xi)$, unde s-a notat $\xi=x/l$.

$$y=4fx(l-x)/l^2$$

Pentru diagrama M_x^0 a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe jumătate de deschidere, se calculează mai întîi reacțiunile $V_1^0=3pl/8$ și $V_2^0=pl/8$. Expresiile momentului încovoietor în secțiunea curentă a zonei încărcate *1-3* și respectiv a zonei neîncărcate *3-2* sînt

$$\begin{aligned} &(1\text{-}3) \qquad M_x^0=V_1^0x-px^2/2=px(3l-4x)/8=pl^2\xi(3-4\xi)/8,\\ &(3\text{-}2) \qquad M_x^0=V_2^0x'=plx'/8=pl^2\xi'/8. \end{aligned} \tag{a}$$

Prima expresie indică o variație parabolică, iar a doua o variație liniară. În secțiunea de mijloc a grinzii, ambele expresii dau $M_3^0=pl^2/16$. Construcția diagramei M^0 se vede în figura 42, *c*; se începe cu trasarea diagramei triunghiulare, care ar corespunde unei sarcini concentrate $pl/2$ aplicată la mijlocul încărcării date, apoi se introduce variația parabolică tangentă la cele două laturi în dreptul secțiunilor *1* și *3*.

Trecînd la arc, expresiile momentului încovoietor în cele două zone se obțin aplicînd expresia (3.12); rezultă

$$\begin{aligned} &(1\text{-}3) \qquad M_x=M_x^0-Hy=\frac{pl^2}{8}\xi(3-4\xi)-\frac{pl^2}{16f}\cdot 4f\xi(1-\xi)=\frac{pl^2}{8}\xi(1-2\xi),\\ &(3\text{-}2) \qquad M_x=M_x^0-Hy=\frac{pl^2}{8}\xi'-\frac{pl^2}{16f}\cdot 4f\xi'(1-\xi')=-\frac{pl^2}{8}\xi'(1-2\xi'), \end{aligned} \tag{b}$$

unde s-a ținut seama că $H=M_3^0/f=pl^2/16f$, iar pentru expresia lui y de pe a doua zonă s-a făcut înlocuirea $\xi'=1-\xi$, unde $\xi'=x'/l=(l-x)/l$.

Expresiile (b) de pe cele două zone arată că diagrama M este *antisimetrică*. Poziția ordonatelor maxime rezultă din condiția $dM_x/dx=0$; se obține $\xi_m=1/4$ și $M_{max}=pl^2/64$ pentru prima zonă, respectiv $\xi_m'=1/4$ și $M_{max}=-pl^2/64$ pentru a doua zonă. Diagrama corespunzătoare este trasată în figura 42, *c* (jos).

Pentru comparație cu grinda dreaptă, din prima expresie (a) rezultă prin condiția $dM_x^0/dx=0$ că ordonata maximă a diagramei M^0 se găsește la abscisa $\xi_m=3/8$ și are valoarea $M_{max}^0=9pl^2/192\simeq pl^2/14{,}2$, față de $M_{max}=\pm pl^2/64$ în cazul arcului, care este de 4,5 ori mai mică.

Cînd sarcina distribuită se întinde pe întreaga deschidere (fig. 42, *d*), ordonatele diagramei M a arcului sînt foarte reduse și provin numai din diferența de curbură a două curbe care au trei puncte comune: diagrama parabolică M^0 și curba Hy dată de axa arcului. Dacă și arcul are formă *parabolică*, cele două curbe se suprapun în întregime, astfel că în toate secțiunile $M_x=M_x^0-Hy\equiv 0$, și deci diagrama de momente încovoietoare dispare. Spunem în acest caz că axa arcului are *formă de coincidență* pentru încărcarea dată[1].

În figura 42, *e* este arătată construirea prin suprapunere a diagramei M pentru un cadru triplu articulat, la care panta riglelor variază. Se trasează în același mod diagrama M^0 și apoi se scade diagrama Hy, care aici are formă

[1] O explicație sugestivă a acestei denumiri este dată mai departe la rezolvarea grafică a arcului cu trei articulații.

trapezoidală pe fiecare jumătate de deschidere. Ordonatele haşurate reprezintă mărimile momentelor încovoietoare din secţiunile corespunzătoare ale riglelor. Pentru o secţiune de pe stîlpi, expresia (3.12) se reduce la termenul $-Hy$, deoarece în dreptul stîlpilor avem $M_1^0=M_2^0=0$; înseamnă că momentele încovoietoare din secţiunile stîlpilor variază proporţional cu y (variaţie liniară). Raportînd diagrama M la axele cadrului, se obţin situaţiile din figura 42, *f* pentru cazurile $\gamma=0$ şi $\gamma\neq 0$.

3. Forma optimă a axei arcului

Faptul că forma axei unui arc influenţează hotărîtor asupra diagramelor sale de eforturi şi în primul rînd asupra diagramei M, indică posibilitatea de a alege în aşa fel această formă, încît să se obţină o soluţie cît mai economică. Este cunoscut că încovoierea constituie un mod de solicitare dezavantajos şi, în consecinţă, obiectivul ce trebuie urmărit este de a reduce cît mai mult ordonatele diagramei de momente încovoietoare a arcului. În anumite cazuri particulare de încărcări se poate ajunge chiar la eliminarea completă a diagramei M (arc cu formă de coincidenţă pentru încărcarea dată).

Pentru sarcini verticale (fig. 43, *a*) se poate porni de la relaţia (3.12), punînd condiţia

$$M_x=M_x^0-Hy=0, \quad \text{deci} \quad y=M_x^0/H, \tag{3.13}$$

care reprezintă ecuaţia axei arcului ce realizează forma de coincidenţă. Deoarece împingerea H este o constantă care depinde numai de poziţia relativă a celor trei articulaţii, înseamnă că de fapt diagrama M_x^0 defineşte forma optimă a axei arcului. Astfel, pentru cazul unui arc simetric cu trei articulaţii, încărcat cu o sarcină verticală uniform distribuită pe toată deschiderea (fig. 43, *b*), se găseşte

$$M_x^0=pl^2\xi(1-\xi)/2, \quad H=pl^2/8f, \quad y=M_x^0/H=4f\xi(1-\xi).$$

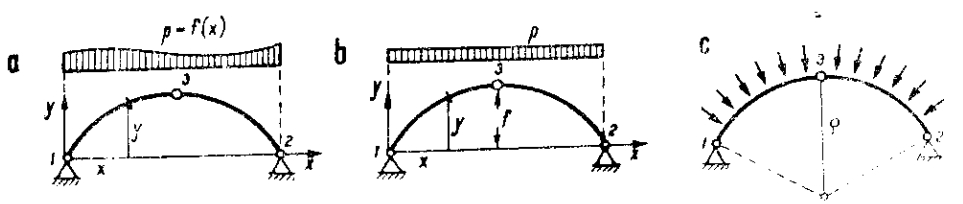


Fig. 43

ajungînd la ecuaţia cunoscută a *arcului parabolic simetric*, aşa cum s-a discutat mai înainte în legătură cu figura 42, *d*.

Pentru alte tipuri de sarcini verticale se pot obţine în acelaşi mod ecuaţiile corespunzătoare ale axei arcului. De exemplu, pentru o sarcină distribuită după legea $p_x=p_0+\gamma(f-y)$, unde p_0 şi γ sînt nişte constante, forma optimă a axei este o *catenoidă*; acest caz apare uneori la proiectarea bolţilor de poduri.

Un alt caz interesant este arătat în figura 43, *c*, unde *arcul* simetric cu trei articulații este încărcat cu *o sarcină uniform distribuită acționînd radial*, cum ar fi presiunea dată de apă asupra unui baraj în arc. Forma de coincidență se poate stabili aici folosind direct relațiile generale (3.1) dintre sarcini și eforturi, anume

$$dN/ds = -p_t + T/\rho \text{ și } dT/ds = -p_n - N/\rho.$$

În cazul considerat, condițiile sînt: $p_t = 0$, $p_n = p = \text{const.}$, $T \equiv 0$ și $M \equiv 0$. Din prima relație se deduce $dN/ds = 0$, și deci $N = \text{const}$. Făcînd în a doua relație $dT/ds = 0$, se obține $\rho = -N/p = \text{const.}$, deoarece atît N cît și p sînt în acest caz constante. Înseamnă că forma optimă a axei arcului este cea *circulară*, care este caracterizată prin $\rho = \text{const}$.

C. REZOLVAREA GRAFICĂ A ARCULUI CU TREI ARTICULAȚII

1. Sarcini de direcție oarecare

a. **Determinarea reacțiunilor.** Se consideră succesiv sarcinile aplicate pe porțiunile *1-3* și *3-2* de arc, se determină reacțiunile parțiale care le corespund și apoi se efectuează suprapunerea acestora. De fiecare dată se regăsește cazul din figura 12, *a*, unde porțiunea neîncărcată joacă rol de reazem simplu pentru cealaltă porțiune, astfel că direcția reacțiunii respective este cunoscută. Construcția se vede în figura 44, *a*.

Se începe prin determinarea rezultantelor grupelor de sarcini de pe cele două porțiuni de arc. Pentru aceasta se iau polurile oarecare O' și O'', se construiesc funiculare corespunzătoare care sprijină pe suporturile sarcinilor $P_a - P_b$ și $P_c - P_d$, apoi prin intersectarea laturilor extreme se găsesc punctele care fixează pozițiile rezultantelor parțiale R_{13} și R_{32}, ale căror direcții și mărimi sînt cunoscute din poligonul forțelor.

Cînd numai porțiunea *1-3* de arc este încărcată, reacțiunea R_2' este dirijată după linia articulațiilor *2-3*, intersectînd suportul rezultantei R_{13} în punctul A', prin care trebuie să treacă și suportul reacțiunii R_1'. Mărimile și sensurile reacțiunilor parțiale R_1' și R_2' se obțin în poligonul forțelor, folosind punctul a' de intersecție a paralelelor la aceste reacțiuni duse prin extremitățile rezultantei R_{13}. În mod asemănător, dacă numai porțiunea *3-2* de arc este încărcată, reacțiunea R_1'' este dirijată după linia articulațiilor *1-3*, intersectînd suportul rezultantei R_{32} în punctul A'', prin care trebuie să treacă și suportul reacțiunii R_2''. Mărimile și sensurile reacțiunilor parțiale R_1'' și R_2'' sînt definite de punctul a'' din poligonul forțelor.

Rămîne să se compună perechile de reacțiuni parțiale R_1', R_1'' și R_2', R_2'' spre a obține reacțiunile totale R_1 și R_2 din articulațiile *1* și *2*. Operația se face în poligonul forțelor, în modul arătat pe figură, aplicînd componentele R_2' și R_1'' în punctele a' și a'', prin construirea unui paralelogram. Se deter-

mină astfel punctul O, care definește reacțiunile căutate. Cele două contururi închise formate de forțele R_1, P_a, P_b, R_3 și R_3, P_c, P_d, R_2 în poligonul forțelor exprimă echilibrul porțiunilor *1-3* și *3-2* de arc în situația reală, deci când acționează totalitatea sarcinilor. Ele au o latură comună, pe care cele două contururi dirijate o parcurg în sensuri contrare; aceasta este R_3, care reprezintă în mărime și direcție acțiunea reciprocă R_3 din articulația centrală.

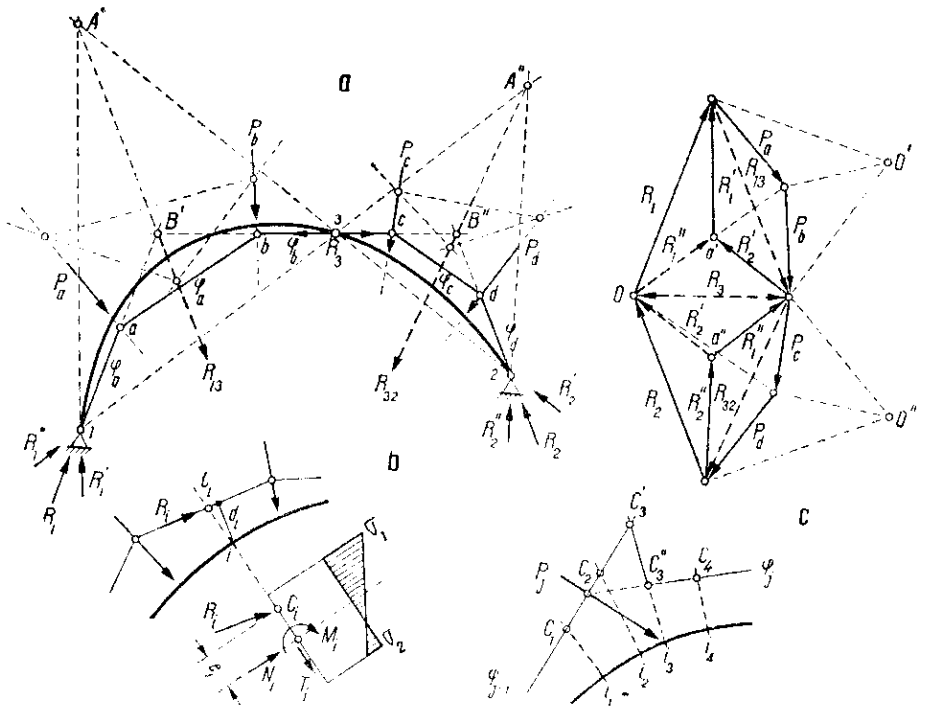


Fig. 44

Construcția făcută pentru determinarea reacțiunilor permite o observație importantă. Ducînd prin articulațiile *1* și *3* drepte paralele cu direcțiile reacțiunilor R_1 și R_3, acestea se vor intersecta în B' pe suportul rezultantei R_{13}, așa cum cere condiția de echilibru a porțiunii de arc *1-3*, care este acționată de R_1, R_{13} și R_3. Luînd drept *pol* punctul O din poligonul forțelor, cele două drepte pot fi considerate că reprezintă laturile extreme ale unui funicular al sarcinilor aplicate pe porțiunea *1-3* de arc. Funicularul se completează cu laturile sale, ducînd razele polare respective în poligonul forțelor (în figură funicularul are numai trei laturi φ_0, φ_a și φ_b). Acest funicular are proprietatea de a trece prin articulațiile *1* și *3*, laturile sale extreme fiind chiar suporturile reacțiunilor R_1 și R_3. Repetînd raționamentul pentru porțiunea de arc *3-2*, se obține un alt funicular (în figură având laturile φ_b, φ_c și φ_d), care are aceeași proprietate, dar referitor la reacțiunile R_3 și R_2; punctul O din poligonul forțelor este considerat și în acest caz drept pol.

Aceste două funiculare au același pol, iar laturile lor care trec prin articulația 3 se confundă; *ele formează astfel un singur funicular ce trece prin cele trei articulații*. Acest funicular particular, construit pentru ansamblul sarcinilor aplicate pe arc, reprezintă o soluție unică și se bucură de proprietatea remarcabilă că *laturile sale extreme sînt suporturile reacțiunilor arcului, iar latura care trece prin articulația centrală este suportul acțiunii reciproce din această articulație.* Mărimile reacțiunilor și a acțiunilor reciproce sînt date de razele polare corespunzătoare din poligonul forțelor.

Pentru aplicarea practică a acestei proprietăți se poate proceda în două moduri:

— se face determinarea reacțiunilor arcului cum s-a arătat în figura 44, *a* și cu polul *O* astfel obținut se trasează funicularul prin cele trei articulații;

— se execută, pentru sarcinile date, construcția cunoscută din Mecanică a funicularului particular ce trece prin trei articulații; polul *O* ce rezultă determină mărimile și direcțiile reacțiunilor.

Alternativa de aplicare depinde de specificul problemei tratate.

b. **Determinarea eforturilor; curba de presiune a arcului.** Funicularul particular ce trece prin cele trei articulații are și o altă proprietate remarcabilă, care permite determinarea directă a eforturilor din secțiunile arcului. Fie una dintre razele polare, de exemplu cea care unește polul *O* cu extremitatea sarcinii P_a. Această rază polară reprezintă în mărime și direcție rezultanta forțelor R_1 și P_a, care are ca suport latura φ_a a funicularului (fig. 44, *a*). Considerînd în același mod celelalte raze polare, se ajunge la proprietatea generală: *fiecare latură a funicularului reprezintă suportul rezultantei forțelor exterioare situate pe arc la stînga sa (inclusiv R_1); mărimea rezultantei este dată de raza corespunzătoare din poligonul forțelor.*

Pentru o secțiune *i* de pe arc, suportul rezultantei forțelor exterioare de la stînga secțiunii înțeapă planul acesteia în punctul C_i, numit *centru de presiune* (fig. 44, *b*). Rezultanta R_i reprezintă efectul întregii porțiuni de arc de la stînga secțiunii. În consecință, reducînd rezultanta în raport cu centrul de greutate al secțiunii, se obțin eforturile: N_i și T_i sînt proiecțiile rezultantei pe tangenta și normala la arc în *i*. M_i este momentul rezultantei în raport cu centrul de greutate și are mărimea

$$M_i = R_i \; d_i = N_i \; e_i,$$

unde d_i este distanța de la centrul de greutate la rezultantă, iar e_i — *excentricitatea* centrului de presiune. La determinarea eforturilor se va ține seama de convenția de semne stabilită.

Poligonul funicular particular al sarcinilor date, care trece prin cele trei articulații, poartă numele de *poligon de presiune*; în cazul sarcinilor distribuite, poligonul devine o curbă, numită *curbă de presiune*. Curba de presiune este deci reprezentată *de acel funicular particular al sarcinilor, la care fiecare latură este suportul rezultantei tuturor forțelor exterioare aplicate pe arc la stînga laturii respective*. De reținut că această semnificație are caracter general și se menține pentru orice tip de arc static determinat sau static nedeterminat; în fiecare caz,

funicularul particular corespunzător este definit prin cîte trei condiții impuse, care diferă de la un tip la altul. La arcul articulat, condițiile sînt ca funicularul să treacă prin cele trei articulații.

Trebuie remarcat că locul geometric al centrelor de presiune nu coincide totdeauna în întregime cu poligonul de presiune. Astfel, pentru situația din figura 44, *c*, secțiunile i_1 și i_2 sînt situate de aceeași parte a sarcinii concentrate P_j. Această sarcină nu intervine în rezultanta forțelor exterioare de la stînga ambelor secțiuni, care este aceeași și are ca suport latura φ_{1-j} a funicularului. Centrul de presiune C_1 al secțiunii i_1 este situat pe latura φ_{j-1}, în timp ce centrul C_2 al secțiunii i_2 se află pe *prelungirea* ei, acolo unde înțeapă planul secțiunii i_2. Pentru secțiunea i_3, din punctul de aplicație al sarcinii P_j, centrul de presiune este în C_3 sau în C_3', după cum secțiunea este considerată imediat la stînga sau la dreapta acelui punct. Centrul de presiune C_4 al secțiunii i_4 este situat pe latura φ_j a funicularului, de data aceasta sarcina P_j făcînd parte din rezultanta forțelor exterioare de la stînga secțiunii. Locul geometric al centrelor de presiune este deci reprezentat de laturile funicularului și prelungirile lor, avînd puncte de salt pe normalele la arc duse în punctele de aplicație a sarcinilor concentrate.

Curba de presiune joacă un rol esențial în studiul arcelor, deoarece caracterizează comportarea acestora sub acțiunea sarcinilor. Efortul unitar maxim care se dezvoltă într-o secțiune este dat de relația $\sigma_1 = N/A + My_1/I$, din care se vede importanța deosebită a micșorării momentelor încovoietoare pentru dimensionarea economică a arcului. Aceasta se obține prin *reducerea excentricităților centrelor de presiune, alegînd o formă favorabilă pentru axa arcului*. Într-adevăr, la o poziție dată a celor trei articulații și pentru un ansamblu de sarcini dat, funicularul particular care definește curba de presiune are o configurație bine precizată, deci asupra acestuia nu se mai poate interveni. Rezultă că o reducere a excentricităților se poate realiza numai prin adoptarea, între cele trei articulații, a unei forme pentru axa arcului *cît mai apropiată de curba de presiune*.

Forma *optimă* a axei arcului este aceea care s-ar suprapune în întregime cu curba de presiune. Aceasta se poate realiza practic pentru anumite cazuri particulare de încărcare, cărora le corespund curbe funiculare cu forme simple. Astfel, pentru o sarcină uniform distribuită pe întreaga deschidere, curba funiculară rezultă parabolică; pentru o sarcină uniform distribuită pe axa arcului, acționînd radial, curba de presiune rezultă circulară. Înseamnă că, adoptînd în aceste cazuri pentru axa arcului forma parabolică, respectiv forma circulară, se realizează coincidența între arc și curba de presiune, astfel că momentele încovoietoare sînt nule în toate secțiunile. Într-o asemenea situație se spune că arcul are *formă de coincidență* pentru sarcina dată[1].

Cînd se consideră mai multe situații de încărcare a arcului, forma optimă a axei rezultă din condiția celor mai mici excentricități, alegînd o curbă situată cît mai aproape de mijlocul intervalului dintre curbele de presiune extreme.

[1] Realizarea formei de coincidență pentru arcul cu trei articulații intervine și la rezolvarea arcelor static nedeterminate, unde acest criteriu servește la stabilirea formei axei arcului.

2. Cazul sarcinilor verticale

a. **Determinarea grafică a diagramei** M. Refăcînd construcția arătată în figura 44, *a* pentru cazul unui arc supus la sarcini verticale, se ajunge la situația din figura 45, *a*, unde este trasat funicularul care trece prin cele trei articulații. Aici apare particularitatea — controlabilă imediat în poligonul forțelor — că atît reacțiunile R_1 și R_2, cît și oricare dintre rezultantele forțelor

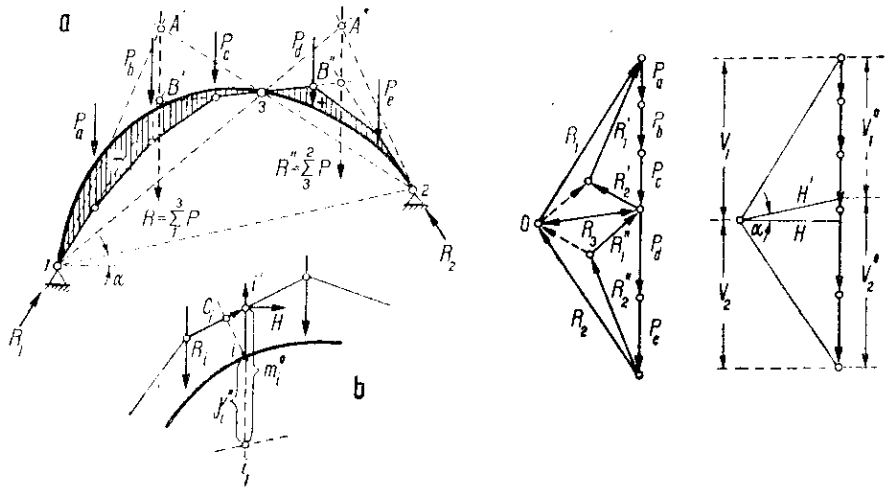


Fig. 45

exterioare de la stînga diferitelor secțiuni de pe arc, au aceeași proiecție pe orizontală, care este egală cu împingerea orizontală H.

Pentru aflarea momentului încovoietor M_i dintr-o secțiune i, rezultanta R_i (care are ca suport latura corespunzătoare a funicularului) trebuie redusă în raport cu centrul de greutate al secțiunii (fig. 45, *b*). În acest scop, se poate folosi o descompunere a reacțiunii R_i în componente — verticală și orizontală — efectuată în punctul i' de pe verticala centrului de greutate i. Rezultă $M_i = \overline{ii'}H$. Deoarece pentru oricare secțiune componenta orizontală a rezultantei este egală cu H, se ajunge la concluzia: *diagrama de momente încovoietoare a arcului este reprezentată de suprafața cuprinsă între funicular și arc, cu ordonate măsurate pe verticală și multiplicate cu împingerea orizontală* H. Înseamnă că, în cazul sarcinilor verticale, curba de presiune delimitează chiar diagrama de momente încovoietoare.

Semnele diagramei rezultă observînd că rezultantele R_i sînt dirijate astfel încît produc compresiune în secțiunile arcului. Momentele încovoietoare sînt deci pozitive pe toată zona unde funicularul trece *deasupra* arcului și negative în caz contrar. Cu cît forma axei arcului este mai apropiată de curba de presiune, ordonatele diagramei M se reduc; cînd este posibil să se aleagă ca axă a arcului chiar curba de presiune, se ajunge la forma de coincidență.

Concluziile de mai înainte se pot obține și pe o altă cale, pornind de la expresia (3.12) valabilă în cazul sarcinilor verticale, scriind-o sub forma

$$M_i = M_i^0 - H y_i'' = H\,(M_i^0/H - y_i'') = H\,(m_i^0 - y_i'').$$

Primul termen din paranteză reprezintă ordonata diagramei M^0, construită grafic cu o distanță polară egală cu împingerea H; al doilea termen dă chiar forma axei arcului. Spre a obține direct diferența, trebuie suprapusă diagrama M^0/H peste forma arcului, astfel ca ambele să aibă aceeași linie de referință și un punct comun în articulația *3*.

Diagrama M^0/H se obține folosind construcția arătată în figura 14, *b*. În loc de un funicular oarecare, aici trebuie folosit un funicular particular, care să îndeplinească condițiile arătate; acesta este tocmai funicularul care trece prin cele trei articulații, deoarece: (1) distanța polară ce rezultă din poziția polului *O*, cu care se trasează funicularul, este egală cu împingerea orizontală H; (2) funicularul trece prin articulațiile *1* și *2*, astfel că linia de închidere (care determină diagrama M^0/H) este chiar linia *1-2* a articulațiilor, de la care se măsoară și ordonatele y''; (3) în dreptul articulației *3*, funicularul și arcul au punct comun. Se poate deci scrie, folosind notațiile din figura 45, *b*

$$M_i^0/H = m_i^0 = \overline{i_1 i'}, \qquad y_i'' = \overline{i_1 i}, \qquad M_i = H(m_i^0 - y_i'') = \overline{i i'}\, H, \tag{3.14}$$

ajungînd la același rezultat.

b. **Posibilități de trasare directă.** Utilizarea curbei de presiune pentru determinarea diagramei de momente încovoietoare, la arce supuse la sarcini verticale, implică construirea funicularului care trece prin cele trei articulații. Deseori, acest funicular poate fi obținut cu ușurință pe baza proprietăților sale, anume: laturile extreme ale funicularului sînt suporturile reacțiunilor arcului, iar latura care trece prin articulația centrală este suportul acțiunii reciproce din articulație. Cînd — pentru anumite cazuri simple de încărcări — determinarea reacțiunilor se poate face direct, configurația curbei de presiune rezultă imediat.

În cazul din figura 46, *a*, unde pe structură acționează o singură sarcină concentrată, funicularul ce trece prin cele trei articulații are numai două laturi, care sînt chiar suporturile reacțiunilor R_1 și R_2, ce se determină ca în figura 12, *a* folosind condiția de concurență a trei forțe. Diagrama de momente este hașurată în figură, ordonatele urmînd a fi multiplicate cu constanta H. Pentru orice secțiune trebuie considerat segmentul cuprins între secțiunea respectivă și funicular; astfel, pentru o secțiune *i* de pe porțiunea curbă rezultă $M_i = \overline{ii'} \cdot H$, iar pentru o secțiune *j* de pe stîlp rezultă $M_j = \overline{j2} \cdot H$. Ambele momente încovoietoare sînt negative, deoarece în porțiunea considerată curba de presiune trece pe sub axa structurii.

O situație similară se vede în figura 46, *b*, cu deosebirea că aici intervine o sarcină distribuită. Pentru aflarea reacțiunilor se consideră rezultanta sarcinii, regăsind cazul precedent. La trasarea curbei de presiune, pe intervalul *1-3* trebuie introdusă curba funiculară a sarcinii distribuite, anume o parabolă tangentă în *1* și *3* la suporturile reacțiunilor, care trece prin mijlocul segmentului $\overline{cc_1}$.

Cadrul triplu articulat din figura 46, *c* este încărcat pe toată deschiderea cu o sarcină uniform distribuită. Simplificarea provine din considerarea simetriei structurii și a încărcării, care impune ca acțiunea reciprocă din articulația *3* să fie orizontală. Luînd separat fiecare din porțiunile *1-3* și *3-2*, direcțiile reacțiunilor R_1 și R_2 rezultă din condiția de concurență în punctele c' și c'' a grupelor de cîte trei forțe. Dacă structura ar fi încărcată cu cele două sarcini

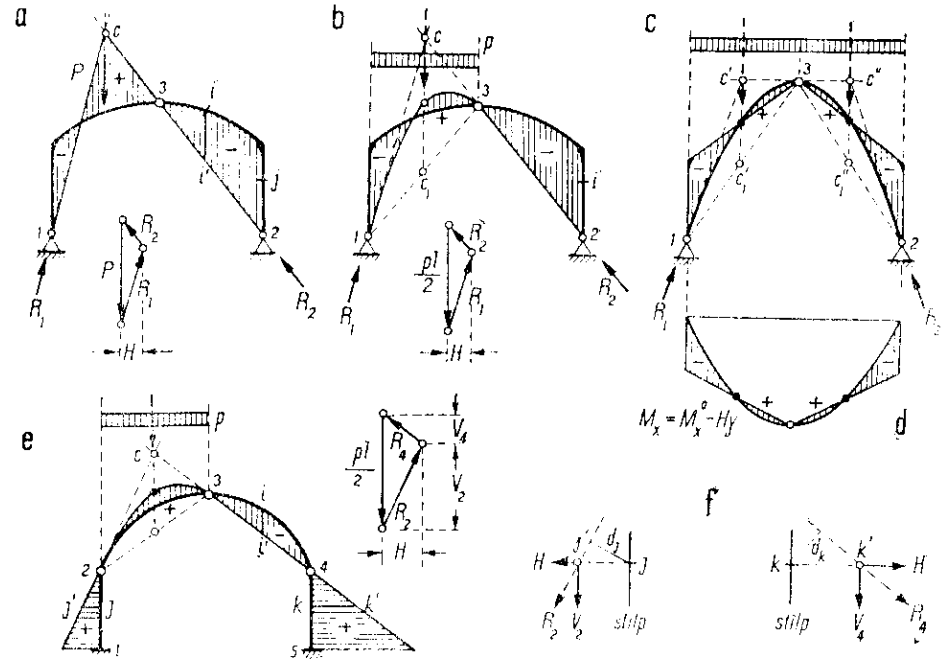


Fig. 46

concentrate figurate punctat, poligonul de presiune ar fi *1-c'-3-c''-2*. Trecînd la sarcina distribuită, **curba de presiune** este reprezentată de o parabolă tangentă în *1*, *3*, *2* la suporturile **reacțiunilor** și care trece prin mijloacele segmentelor $\overline{c'c_1'}$ și $\overline{c''c_1''}$.

Pentru comparație, în figura 46, *d* s-a trasat diagrama *M* a aceleiași structuri pe cale analitică, folosind suprapunerea $M_x = M_x^0 - Hy$. Este ușor de văzut că cele două moduri de determinare sînt echivalente: în diagrama mărginită de curba de presiune (fig. 46, *c*), ordonatele trebuie multiplicate cu *H* pentru a găsi ordonatele din diagrama trasată prin suprapunere (fig. 46, *d*).

Structura din figura 46, *e* este formată dintr-un arc triplu articulat, sprijinit pe extremitățile a doi stîlpi încastrați. Pentru porțiunea curbă, diagrama *M* se determină similar ca în figura 46, *b*; într-o secțiune oarecare *i* se poate scrie $M_i = \overline{ii'}H$. Stîlpii încastrați *1-2* și *5-4* au de asemenea diagramă de momente încovoietoare, datorită acțiunii orizontale — de mărime *H* — a arcului asupra extremităților lor. Aceste diagrame pot fi reprezentate prin suprafețele

cuprinse între suporturile reacțiunilor R_2 sau R_4 și axele stîlpilor corespunzători; *ordonatele trebuie măsurate pe orizontală și multiplicate cu* V_2, *respectiv* V_4. Într-adevăr, considerînd secțiunile j și k pe cei doi stîlpi, precum și forțele care acționează (fig. 46, *f*), se găsește

$$M_j = R_2 d_j = jj' V_2 \quad \text{și} \quad M_k = R_4 d_k = kk' V_4.$$

Zonele pozitive ale diagramelor sînt cele pentru care funicularul trece în afara structurii.

3. Cazul sarcinilor orizontale

Datorită paralelismului sarcinilor aplicate, și în acest caz se poate obține direct diagrama de momente încovoietoare a arcului folosind curba de presiune. Fie arcul din figura 47, *a*, încărcat cu un grup de sarcini concentrate orizontale aplicate pe porțiunea *1-3*. Poziția rezultantei R_{13} se determină cu ajutorul unui funicular oarecare (nu s-a mai figurat), iar direcțiile reacțiunilor R_1 și R_2 rezultă din condiția de concurență a trei forțe în punctul *c*. Ducînd în poligonul forțelor paralele la aceste direcții, se găsesc mărimile reacțiunilor.

Considerînd punctul *O* drept pol, suporturile reacțiunilor R_1 și R_2 reprezintă laturile extreme ale funicularului care trece prin cele trei articulații, cum s-a arătat în cazul general (v. fig. 44). Acest funicular are distanța polară egală cu mărimea *V* a componentei verticale a reacțiunilor; funicularul poate fi completat cu toate laturile sale, ca în figură.

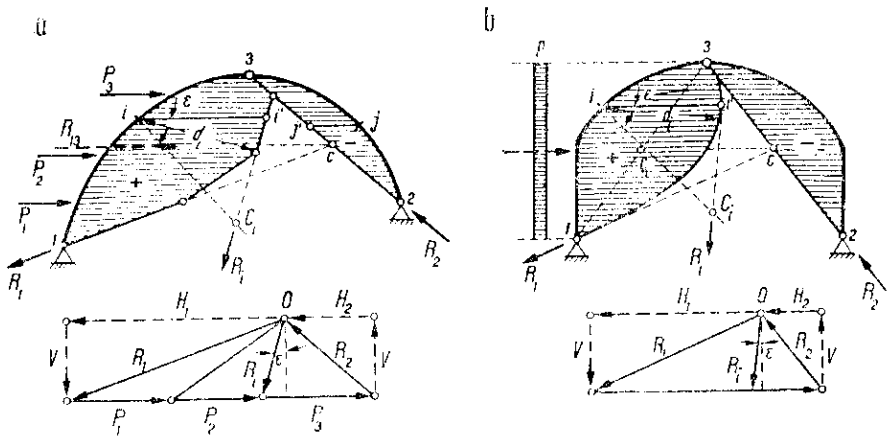


Fig. 47

Momentul încovoietor dintr-o secțiune oarecare *i* a arcului se determină cu ajutorul centrului de presiune. Mărimea rezultantei R_i a forțelor R_1, P_1 și P_2 de la stînga secțiunii rezultă din poligonul forțelor, iar suportul său este latura funicularului care urmează după ultima forță considerată. Această

latură înțeapă planul secțiunii în punctul C_i, astfel că momentul încovoietor este

$$M_i = R_i d_i = R_i \overline{ii'} \cos \varepsilon = \overline{ii'} V, \tag{3.15}$$

unde s-a ținut seama că din figură rezultă $d_i = \overline{ii'} \cos \varepsilon$ și $V = R \cos \varepsilon$.

Expresia (3.15) este asemănătoare cu expresia (3.14) de la cazul sarcinilor verticale. Ținînd seama că pentru orice secțiune de pe arc rezultanta forțelor exterioare de la stînga are aceeași proiecție pe verticală, egală cu componenta V, rezultă că *diagrama de momente încovoietoare a arcului este reprezentată de suprafața cuprinsă între funicular și arc, cu ordonate măsurate pe orizontală și multiplicate cu constanta V*. Privitor la semne, din sensurile reacțiunilor R_1 și R_2 se constată că pe porțiunea *1-3* diagrama este pozitivă, iar pe porțiunea *3-2* este negativă.

În figura 47, *b* este repetată aceeași construcție, pentru determinarea diagramei de momente încovoietoare la o structură triplu articulată încărcată cu o sarcină orizontală uniform distribuită. Adaptînd la cazul sarcinii distribuite observația făcută în legătură cu figura 44, *c*, înseamnă că rezultanta R_i a forțelor exterioare situate la stînga unei anumite secțiuni *i* are ca suport tangenta la curba de presiune din punctul *i'*. Acest punct este definit de o dreaptă dusă prin centrul de greutate al secțiunii, paralel cu direcția comună a sarcinilor elementare *pds*. Centrul de presiune este în C_i, unde tangenta înțeapă planul secțiunii. Raza polară paralelă cu această tangentă dă mărimea rezultantei R_i. Pe baza unui raționament analog celui din figura 47, *a* rezultă că diagrama de momente încovoietoare a structurii este reprezentată de suprafața haşurată pe figură, cu ordonate măsurate pe orizontală și multiplicate cu V.

STRUCTURI ARTICULATE PLANE STATIC DETERMINATE

A. GENERALITĂŢI

1. Caracteristici de alcătuire

În categoria structurilor articulate plane, numite obişnuit *grinzi cu zăbrele*, intră acele structuri care — prin schematizare — se reduc la un sistem de bare prinse între ele în noduri prin *articulaţii*, astfel ca să formeze o structură geometric invariabilă. Spre deosebire de structurile studiate în capitolele precedente, alcătuite din elemente cu secţiune plină şi în general solicitate dominant la încovoiere, se pot alcătui structuri cu caracteristici asemănătoare, compuse din elemente cu zăbrele. În figura 48 se arată cîteva structuri cu zăbrele, împreună cu structurile similare cu secţiune plină. Grinzile cu zăbrele prezintă

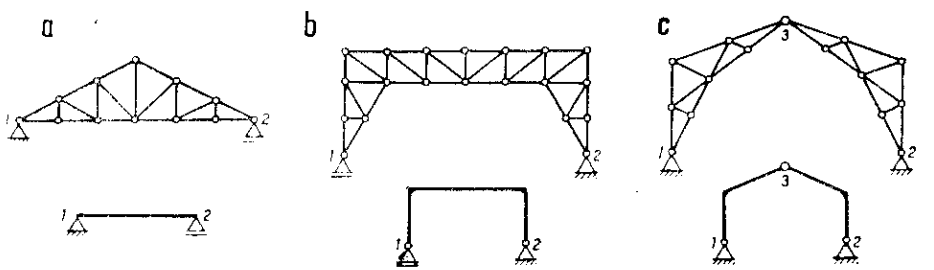


Fig. 48

o mare varietate de forme şi sînt folosite ca ferme pentru acoperişuri, cadre de hale industriale, grinzi principale la poduri, grinzi pentru poduri rulante etc.

Schematizarea structurilor articulate, aşa cum este admisă pentru calcul în baza definirii date (fig. 49, *a*), cuprinde anumite ipoteze simplificatoare, şi anume.

- în noduri se consideră articulaţii perfecte, astfel că în extremităţile barelor nu pot apărea momente încovoietoare;
- se admite că barele sînt perfect axate în nodul teoretic, astfel că acţiunile barelor asupra nodului reprezintă un mănunchi de forţe concurente;
- sarcinile pot fi aplicate pe structură numai în noduri, sub formă de forţe concentrate, caz specific transmiterii indirecte.

Ultimele două ipoteze corespund în genere situaţiei reale. Astfel, pentru axarea barelor în nod se folosesc anumite dispoziţii constructive de prindere (guseuri la construcţii metalice, noduri monolite la construcţii de beton armat

etc.), care realizează această cerință. Ca funcțiune, grinzile cu zăbrele se utilizează în construcții drept elemente principale de susținere, pe care sprijină — în noduri — elemente secundare așezate transversal (pane la acoperișuri, antretoaze la poduri etc.), astfel că sarcinile (cu excepția greutății proprii) se transmit indirect.

Prima ipoteză simplificatoare se îndepărtează mai mult de realitate, deoarece la structurile reale prinderea barelor în nod este obișnuit rigidă. Astfel, la

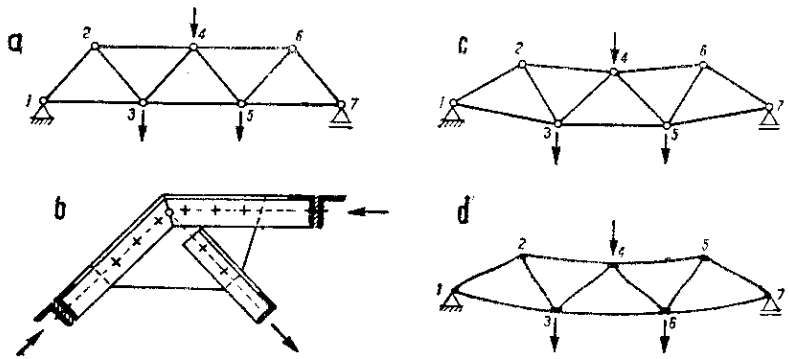


Fig. 49

construcții metalice barele se prind de obicei în nod prin intermediul unor piese speciale (gusee), solidarizate prin nituire sau sudură, cum se vede în figura 49, *b*; rezultă că unghiurile dintre bare în nod devin invariabile. La construcții de beton armat, nodurile sînt monolite, iar la construcții de lemn prinderea barelor se face cu buloane sau cu cuie, care rigidizează nodul.

Cît timp barele se consideră articulate în noduri și sarcinile se transmit indirect, în structură apar numai eforturi axiale. Poziția deformată este caracterizată prin variațiile de lungime ale barelor; barele rămîn rectilinii, deoarece rotirile între extremități în nod sînt libere (fig. 49, *c*). În structura reală, rigiditatea nodurilor obligă unghiurile dintre bare să rămînă invariabile, astfel că — alături de deformări axiale — barele sînt supuse și la încovoiere (fig. 49, *d*). Se dezvoltă astfel concomitent atît eforturi axiale, care sînt eforturile dominante, cît și momente încovoietoare, care reprezintă eforturi secundare. Un calcul corect al structurii cere să se determine ambele categorii de eforturi.

Pentru aceasta se împarte calculul *în două etape*: se consideră mai întîi structura cu noduri articulate și se determină eforturile axiale, apoi — pe baza configurației poziției deformate ce rezultă datorită variațiilor de lungime ale barelor — se introduce efectul rigidității nodurilor și se găsesc eforturile secundare. Înseamnă că *definirea dată structurilor articulate corespunde de fapt schematizării admise în prima etapă de calcul*, de care ne vom ocupa în acest capitol și pe baza căreia se pot afla eforturile dominante din bare.

În proiectare, calculul se limitează deseori la această primă etapă pentru multe din construcțiile curente, efectul eforturilor secundare rămînînd în limite

controlabile și nu prea ridicate. Astfel, la structuri metalice alcătuite din bare cu rigiditate redusă, corectarea eforturilor unitare nu depășește obișnuit 10—15%. Se poate ține seama de aceasta direct la dimensionare, prin corectări corespunzătoare. Pentru structuri importante supuse la sarcini mari, sau pentru elemente care se execută în serie (prefabricate), unde o dimensionare cît mai riguroasă se impune, este necesar să se efectueze și a doua etapă de calcul, introducînd efectul rigidității nodurilor. Aceasta conduce însă la rezolvarea unei probleme de nedeterminare statică multiplă, care va fi tratată în capitolul XII.

2. Condiția de invariabilitate geometrică și de determinare statică

a. **Controlul invariabilității geometrice.** În ipoteza simplificatoare a prinderilor articulate este necesar ca poziția fiecărui nod — în raport cu celelalte — să fie invariabilă cît timp lungimile barelor sînt considerate constante; totodată, structura trebuie fixată în planul său prin legare de baza de sprijinire. Pentru controlul alcătuirii este deci indicat să se stabilească numărul *minim* de legături necesar asigurării invariabilității geometrice și a fixării în plan, sub forma unei relații de condiție între elementele componente ale structurii.

Problema a fost examinată anterior, sub formă generală, în legătură cu figura 4 și s-a stabilit relația (1.2) pentru structuri plane oarecare. Această condiție poate fi utilizată și la grinzi cu zăbrele, considerînd barele drept corpuri, iar articulațiile din noduri drept legături interioare[1]. Este totuși preferabil să se adopte o altă interpretare, mai potrivită specificului structurilor articulate, anume să se considere nodurile drept corpuri (reduse la un punct), iar barele să fie privite ca legături.

Poziția relativă a unui nod *i* față de un nod *j* este invariabilă cînd cele două noduri sînt legate printr-o bară de lungime constantă (fig. 50, *a*). Un al treilea nod *k* necesită două bare *i-k* și *j-k* spre a fi legat de primele două; se obține un triunghi, care este cea mai simplă figură geometric invariabilă (fig. 50,*b*). Orice alt nod poate fi legat de restul structurii prin intermediul a două bare. Astfel, în cazul din figura 50, *c*, pornind de la nodurile *1* și *2* legate prin bara *1-2*, se poate fixa poziția nodului *3* prin barele *1-3* și *2-3*, a nodului *4* prin barele *1-4* și *3-4*, a nodului *5* prin barele *2-5* și *4-5* etc. Trebuie observat ca cele două bare care fixează poziția unui nod *să nu fie în prelungire*, deoarece s-ar ajunge la un sistem cu formă critică (fig. 50, *d*), nodul *5* putînd avea mici deplasări normale pe bare.

Examinarea făcută scoate în evidență relația dintre numărul de noduri *n* și numărul de bare *b*: pentru fiecare nod sînt necesare două bare, afară de primele două noduri pentru legarea cărora este suficientă o singură bară. Rezultă că, pentru realizarea unei structuri articulate care să aibă invaria-

[1] Se știe că un nod articulat în care se întîlnesc k bare este echivalent cu $k-1$ articulații simple, care reprezintă un număr de $2(k-1)$ legături.

bilitate geometrică proprie, este necesar un număr de $b=2n-3$ bare. În afară de acestea, mai trebuie prevăzut și numărul minim de legături în rezemări pentru fixarea în plan a structurii, dat de relația $r=3$. În total vor fi deci $b+r=2n$.

Scriind cele două condiții sub formă asemănătoare relației (1.4), se obține:

— condiția de invariabilitate geometrică proprie a structurii

$$d=b-2n+3\geqslant 0; \tag{4.1}$$

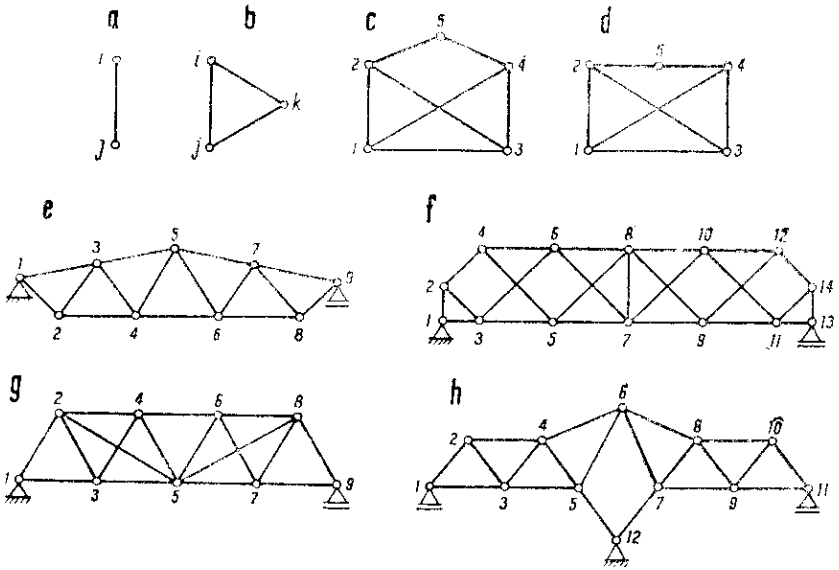


Fig. 50

— condiția de invariabilitate geometrică și fixare în plan a structurii

$$d=b-2n+r\geqslant 0. \tag{4.2}$$

În ambele cazuri, condiția $d=0$ corespunde numărului *minim* de legături necesar. Privitor la relația (4.2), se face aceeași observație ca la relația (1.2), anume că poate fi aplicată într-o accepție mai generală, deoarece un surplus de legături în rezemări poate suplini lipsa unui număr corespunzător de bare în alcătuirea structurii. Relația trebuie deci completată cu condiția $r\geqslant 3$ spre a putea fi aplicată oricărei alcătuiri de structură.

Aplicînd relațiile (4.1) și (4.2) la structurile din figurile 50, *e-h*, rezultă:

caz *e*): $b=15$, $n=9$, $r=3$; relația (4.1) dă $d=15-2\cdot 9+3=0$;
caz *f*): $b=25$, $n=14$, $r=3$; relația (4.1) dă $d=25-2\cdot 14+3=0$;
caz *g*): $b=17$, $n=9$, $r=3$; relația (4.1) dă $d=17-2\cdot 9+3=+2$;
caz *h*): $b=20$, $n=12$, $r=4$; relația (4.2) dă $d=20-2\cdot 12+4=0$.

Rezultă că structurile din cazurile *e*), *f*) și *g*) au invariabilitate geometrică proprie; primele două conțin numărul minim de legături necesar, în timp ce a treia are două bare în plus: se vede imediat că barele *2-5* și *5-8* pot fi scoase fără a influența asupra invariabilității geometrice a structurii (este formată prin juxtapunere de triunghiuri). Structura din cazul *h*), considerată independent de baza de sprijinire, nu este geometric invariabilă, deoarece conține un patrulater de bare *5-6-7-12* care își poate modifica configurația. Prin prevederea unui număr de patru legături în rezemări se compensează această lipsă, astfel că în ansamblu se asigură invariabilitatea geometrică și fixarea în plan.

Relațiile (4.1) și (4.2) stabilesc condiții *cantitative* între numărul nodurilor, al barelor și al legăturilor din rezemări, dar nu dau nici o indicație asupra modului de distribuire a acestor elemente. Înseamnă că satisfacerea condiției este necesară, dar nu totdeauna și suficientă. Mai trebuie controlat ca dispunerea legăturilor să fie făcută *judicios*, spre a nu ajunge la situația ca în anumite părți ale structurii să existe un surplus de legături, în timp ce în alte părți lipsa unui număr suficient de legături să creeze grade de libertate. Astfel, dacă la structura din figura 50, *e* s-ar muta o bară din poziția *5-6* în poziția *6-9*, condiția cantitativă rămîne satisfăcută în continuare. Totuși, structura nu ar mai fi geometric invariabilă, datorită patrulaterului de bare *4-5-7-6*, în timp ce porțiunea *6-7-9-8* ar avea o bară suplimentară.

b. **Condiția de determinare statică.** Această problemă a fost tratată în general, pentru orice structură plană static determinată, în capitolul I, pct. B. 3, a. Se pot regăsi aceleași concluzii pornind de la specificul grinzilor cu zăbrele. Fie o structură articulată oarecare (fig. 51, *a*), la care se pun în evidență toate forțele de legătură. Pentru aceasta se consideră suprimate rezemările și înlocuite cu reacțiunile respective, de asemenea se admit suprimate toate

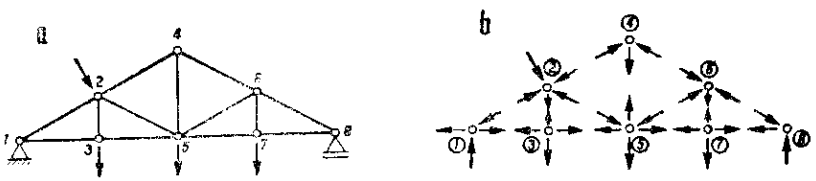


Fig. 51

barele, introducînd în locul lor perechi de forțe ce reprezintă efectul barei asupra nodurilor de la extremități. Se obține situația din figura 51, *b*, unde fiecare nod apare acționat de un mănunchi de forțe concurente, care trebuie să fie în echilibru.

Pentru un nod se pot scrie două ecuații, deci se dispune în total de $2n$ ecuații de echilibru, în care apar ca necunoscute eforturile din bare și reacțiunile din rezemări, în total $b+r$ necunoscute. Structura este static determinată cînd $b+r=2n$ sau $d=b-2n+r=0$, regăsindu-se relația (4.2). Înseamnă că această relație reprezintă în același timp condiția de invariabilitate geometrică și fixare în plan, cît și condiția de determinare statică. Cu alte cuvinte, grinzile cu zăbrele static determinate au numărul minim necesar de legături

pentru asigurarea invariabilității geometrice și a fixării în plan. Rezultă că structurile din figurile 50, *e*, *f* și *h* sînt static determinate, în timp ce structura din figura 50, *g* este de două ori static nedeterminată.

c. **Forme critice.** Posibilitatea existenței structurilor cu formă critică a fost examinată în capitolul I, pct. B. 3, *b*. Se știe că la asemenea structuri, datorită unei situații cu totul particulare de alcătuire, nu este asigurată o *strictă* invariabilitate geometrică, desi structura conține numărul minim de legături necesar. Considerînd drept fixe lungimile barelor, există o posibilitate limitată de deplasare a sistemului în raport cu poziția inițială. În structura reală, cînd intervin și variațiile de lungime ale barelor datorite deformării (asimilabile unor infiniți mici), deplasările nodurilor *devin finite*, și deci comportarea structurii *nu se mai încadrează în domeniul micilor deplasări*. În consecință, nu se mai pot folosi ecuațiile de echilibru scrise în raport cu poziția inițială, nefiind îndeplinite condițiile pentru aplicarea primei ipoteze simplificatoare.

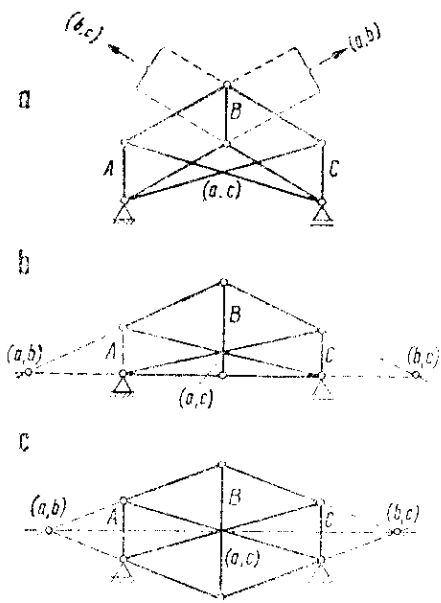


Fig. 52

S-a arătat că această situație poate fi recunoscută pe cale analitică, pornind de la ecuațiile de echilibru. Dacă se aplică izolarea nodurilor ca în figura 51, *b* și se scriu pentru fiecare nod cele două ecuații de proiecție corespunzătoare, se ajunge la un sistem de $2n$ ecuații cu $b+r=2n$ necunoscute, avînd forma generală

$$a_{i1}X_1+\ldots+a_{ii}X_i+\ldots$$

$$\ldots+a_{i,2n}X_{2n}+A_i=0,\quad (i=1,\ 2,\ldots 2n).$$

Mărimile necunoscutelor sînt $X_i=-D_i/D$. Sistemul de ecuații conduce la o soluție unică cît timp determinantul matricei coeficienților D este diferit de zero; în acest caz, structura este geometric invariabilă și static determinată. Dacă $D=0$, se ajunge teoretic la eforturi infinite, respectiv la eforturi nedeterminate, după cum $D_i\neq 0$ sau $D_i=0$. Asemenea rezultate nu pot fi acceptate, deoarece contrazic realitatea; înseamnă că sistemul de ecuații de echilibru — scris prin raportarea la poziția inițială a structurii — nu este aplicabil în acest caz. Se constată astfel prezența unei structuri cu formă critică.

Ecuațiile de echilibru ale nodurilor rezultă de obicei prin proiecții, deci coeficienții necunoscutelor apar sub formă de funcții trigonometrice. Înseamnă că mărimile coeficienților depind exclusiv de configurația structurii, și deci situația cînd $D=0$ provine dintr-o formă particulară a acestei configurații,

în care legăturile sînt defectuos distribuite. O modificare a poziţiilor relative pentru unele dintre noduri elimină situaţia de formă critică.

Aceasta se poate constata cu uşurinţă şi pe cale geometrică, analizînd alcătuirea structurii. Un exemplu se vede în figura 52, unde acelaşi ansamblu de bare este reprezentat în mai multe configuraţii. Trei dintre bare, notate cu A, B şi C, pot fi privite drept corpuri, iar restul barelor drept legături. Considerînd corpurile două cîte două, fiecare pereche este legată prin cîte două bare, ale căror axe se intersectează în punctele (a, b), (a, c) şi (b, c), care pot fi privite ca puncte de articulare indirectă (centre de rotire relativă), cum s-a arătat anterior în figura 4. În primele două cazuri, cele trei centre nu sînt coliniare, şi deci structura este geometric invariabilă. În al treilea caz, a cărui configuraţie prezintă simetrie faţă de două axe (verticală şi orizontală), centrele devin coliniare şi se ajunge la o situaţie similară cu cea din figura 4, *i*, care caracterizează forma critică. Modificînd puţin configuraţia, forma critică dispare; se vede deci că aceasta corespunde unei situaţii cu totul particulare de alcătuire.

Identificarea formelor critice este esenţială la examinarea alcătuirii structurilor, deoarece asemenea configuraţii sînt improprii utilizării în construcţii, datorită deformabilităţii lor accentuate şi a eforturilor foarte mari ce se dezvoltă. Pentru identificare se folosesc diferite procedee sistematizate, dintre care două vor fi prezentate mai departe. Astfel, se va expune în acest capitol un procedeu cu specific analitic, numit *procedeul sarcinii-zero*, care derivă din condiţia $D=0$ aplicată în legătură cu rezolvarea grinzilor cu zăbrele prin izolări de noduri. Un alt procedeu, cu specific geometric, va fi arătat în capitolul următor în legătură cu utilizarea teoremei coliniarităţii centrelor instantanee (acest procedeu apare de fapt sub formă particulară în discuţia făcută pentru figura 52).

3. Categorii de structuri articulate plane

Din punctul de vedere al modului de alcătuire este posibilă o împărţire a structurilor articulate plane în trei categorii:

(1) *Structuri articulate simple*, a căror alcătuire porneşte de la legarea invariabilă a trei noduri cu ajutorul a trei bare, formînd un triunghi, la care se adaugă succesiv o serie de noduri prin cîte două bare. Se obţine astfel o structură formată din juxtapunerea unor triunghiuri (care nu se suprapun), două cîte două avînd o latură comună; exemple se văd în figura 53, *a* şi *b*. O asemenea alcătuire conduce la sisteme cu invariabilitate geometrică proprie asigurată, care satisfac relaţia generală (4.1). Aceste structuri sînt cele mai răspîndite în practică. În raport cu modul cum cele două tălpi sînt legate prin zăbrele, se pot distinge: sistemul *triunghiular* de diagonale (fig. 53, *a*) şi sistemul *dreptunghiular* de diagonale (fig. 53, *b*).

(2) *Structuri articulate compuse*, care pot fi considerate ca rezultînd din combinarea sau suprapunerea mai multor sisteme articulate simple, astfel ca invariabilitatea geometrică să fie asigurată. Un exemplu este dat în figura 53, *c*, unde sistemul poate fi văzut ca format din perechea de triunghiuri juxta-

puse *1-3-6* și *3-6-5*, la care barele *1-3* și *3-5* sînt înlocuite prin grinzile cu zăbrele *1-2-3* și *3-4-5*. O asemenea dispoziție apare indicată pentru reducerea lungimii panourilor, prin introducerea unei serii de noduri intermediare în intervalele *1-3* și *3-5*, în care să poată fi rezemate elemente secundare transversale, cum sînt antretoazele.

(3) *Structuri articulate complexe*, a căror alcătuire nu se încadrează în definițiile date primelor două categorii. Astfel, în exemplul din figura 53, *d*, nu

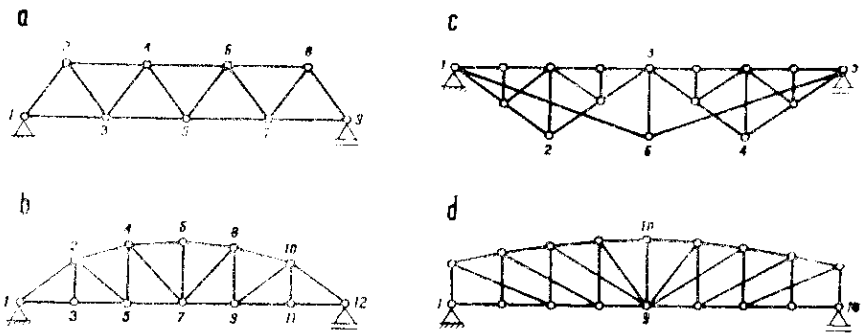


Fig. 53

apare o juxtapunere de triunghiuri și nici nu este posibilă o descompunere în sisteme articulate simple. Categoria structurilor articulate complexe cuprinde o mare varietate de posibilități de alcătuire, putîndu-se imagina numeroase modalități de legare invariabilă a n noduri prin numărul corespunzător de bare. Din punct de vedere practic însă, puține alcătuiri de structuri complexe conduc la forme constructive; trebuie dată atenție identificării formelor critice, care pot apărea frecvent.

Această clasificare convențională servește în principal la aprecierea aplicabilității diferitelor metode de rezolvare. În acest scop, la structuri complexe se admite uneori o delimitare mai restrînsă, în sensul de a cuprinde numai structurile la care nu există nici un nod cu mai puțin de trei bare (de exemplu, cazul din figura 52).

Pentru determinarea eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele există diferite metode. Dintre acestea, au largă aplicare practică metoda izolării nodurilor și metoda secțiunilor, care sînt cunoscute de la cursul de Mecanică teoretică. Ele sînt suficiente pentru rezolvarea structurilor articulate simple și a celor compuse, iar uneori și pentru structuri articulate complexe. În cele ce urmează se prezintă anumite caracteristici ale acestor metode și domeniul lor de aplicare; metoda izolării nodurilor este dată și în formulare matriceală.

Nu s-au inclus aici metodele specifice de rezolvare pentru structuri complexe[1], deoarece utilizarea practică a acestei categorii de structuri este redusă.

[1] Unele dintre aceste metode sînt expuse în S.C-1 (p. 317—324).

B. METODE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR

1. Metoda izolării nodurilor

a. **Specificul metodei și domeniul de aplicare.** Se procedează ca în figura 51, admițînd izolat fiecare nod al structurii. Barele și rezemările se înlocuiesc prin acțiunile lor asupra nodurilor, astfel că în fiecare nod rezultă cîte un mănunchi de forțe concurente, care trebuie să se găsească în echilibru. Sînt în total $b+r$ necunoscute, pentru care se dispune de $2n$ ecuații de echilibru, deoarece la fiecare nod (corp punctual în plan) se pot scrie două ecuații de proiecții pe direcții convenabil alese. La structuri care conțin numărul minim de legături necesar, $b+r=2n$, și deci ecuațiile de echilibru disponibile sînt suficiente pentru aflarea tuturor necunoscutelor.

Sub această formă, metoda se poate aplica oricărei structuri articulate, dar ea devine avantajoasă — cînd calculul se efectuează manual — numai dacă este posibil să se evite rezolvarea unui sistem de $2n$ ecuații cu $2n$ necunoscute. Aceasta se realizează cînd se poate găsi o ordine de parcurgere a nodurilor structurii astfel ca, la exprimarea echilibrului fiecăruia, să fie de determinat numai cîte două necunoscute. Este tocmai cazul structurilor articulate simple, la care legarea fiecărui nod de partea anterior alcătuită se face prin cîte două bare. După determinarea reacțiunilor, dacă se parcurg nodurile în ordine inversă celei folosite la alcătuirea structurii, se obține situația de a avea în fiecare nod numai cîte două necunoscute[1]. Rezultă că *metoda izolării nodurilor este o metodă specifică rezolvării structurilor articulate simple.*

De reținut că la determinarea prealabilă a reacțiunilor se folosesc trei ecuații de echilibru static, din totalul de $2n$ ecuații *distincte* care se pot scrie. Mai rămîn deci de folosit $2n-3$ ecuații pentru exprimarea echilibrului nodurilor. Rezultă că la penultimul nod mai este de determinat numai o singură necunoscută, iar cînd se ajunge la ultimul nod, toate forțele care-l acționează sînt cunoscute. Cele trei ecuații care se mai pot scrie pentru aceste noduri servesc drept *condiții de verificare.*

La examinarea echilibrului nodurilor sînt utile unele observații privind anumite situații particulare arătate în figura 54, *a*:

— cînd într-un nod se întîlnesc numai două bare de direcții diferite și în nod nu este aplicată nici o sarcină, *eforturile din cele două bare sînt nule* (două forțe își pot face echilibru numai dacă sînt egale și direct opuse);

— cînd într-un nod se întîlnesc trei bare, dintre care două sînt în prelungire, iar în nod nu este aplicată nici o sarcină, *efortul din cea de-a treia bară este nul* (proiecția acestuia pe normala la barele în prelungire trebuie să fie nulă);

---

[1] Inițial nu se cunoaște natura eforturilor din bare (întindere sau compresiune). Pentru unificare, se consideră la început că toate barele din jurul nodurilor sînt supuse la întindere (efort axial pozitiv), urmînd ca semnele reale să rezulte din calcul.

— cînd într-un nod se întîlnesc trei bare, dintre care două sînt în prelungire și în nod caleă o sarcină de direcție oarecare, se poate determina direct efortul din cea de-a treia bară printr-o proiecție pe normala la barele în prelungire.

Aceste observații pot fi utilizate direct la *identificarea barelor inactive* într-o structură pentru anumite situații particulare de încărcare. Un exemplu este dat în figura 54, *b*, unde se vede o structură articulată simplă acționată

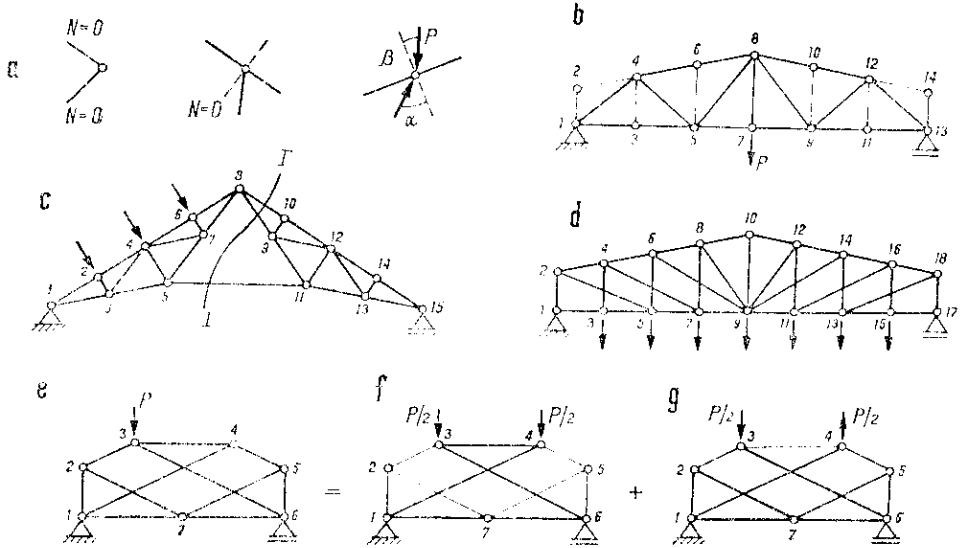


Fig. 54

de o singură sarcină concentrată aplicată în nodul 7. Prima observație arată că nu au efort barele *1-2* și *2-4*, respectiv *13-14* și *12-14*; a doua observație arată că nu au efort barele *4-3*, *5-6*, *9-10* și *11-12*. Din a treia observație rezultă că în bara centrală *7-8* se dezvoltă un efort de întindere avînd mărimea *P*. Pentru sarcina dată, în structură lucrează numai barele trasate plin pe figură.

Aceleași observații permit să se rezolve prin metoda izolării nodurilor și unele structuri articulate compuse. În figura 54, *c* se vede o fermă de acoperiș alcătuită din asamblarea grinzilor cu zăbrele *1-5-8* și *8-11-15* prin trei legături: articulația din nodul *8* și bara *5-11*. Dacă se aplică izolarea nodurilor începînd cu nodul *1* și trecînd apoi la nodurile 2, 3, ..., se constată că la nodurile *4* sau 5 operarea se blochează, deoarece rămîn cîte trei necunoscute. Această situație se datorește barei *5-11*, care provine de la alcătuirea structurii compuse. Trecînd direct în nodul *6* și aplicînd cea de-a treia observație, se poate determina efortul din bara *6-7*. În nodul *7* se determină în același mod efortul din bara *4-7*, astfel că dificultatea este înlăturată. Aceasta este posibil, deoarece barele *4-6* și *6-8*, respectiv *5-7* și *7-8*, sînt în prelungire. Pentru partea din dreapta a structurii, aplicarea celei de-a doua observații arată că nici una din

barele *9-10*, *9-12*, *11-12*, *12-13* și *13-14* nu are efort; în această porțiune lucrează numai tălpile *8-15*, *8-11* și *11-15*.

Metoda izolării nodurilor permite în unele cazuri și rezolvarea de structuri articulate complexe, de exemplu cea din figura 54, *d*. Determinînd în prealabil reacțiunile din rezemări, se consideră succesiv echilibrul nodurilor *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7* și *8*, unde de fiecare dată intervin numai cîte două necunoscute. Pentru a doua jumătate a grinzii se pornește de la nodul *17*, mergînd spre mijloc în același mod, astfel că ecuațiile de verificare apar la nodurile centrale *10* și *9*.

Uneori, metoda izolării nodurilor dă rezultate chiar la acele structuri complexe, la care din fiecare nod pornesc cel puțin cîte *trei* bare; nu există deci nici un nod de la care să poată începe aplicarea directă a metodei. La structuri *simetrice* se poate însă folosi descompunerea încărcării date într-o componentă simetrică și o componentă antisimetrică, cum se vede la exemplul din figurile 54, *e-g*:

— Pentru *componenta simetrică* (fig. 54, *f*), condiția de simetrie impune ca barele *2-7* și *5-7* să aibă eforturi egale și de *același semn*. Echilibrul nodului *7* — exprimat printr-o ecuație de proiecție pe verticală — nu este satisfăcut decît dacă aceste două eforturi sînt nule; rezultă că barele *2-7* și *5-7* sînt inactive. În aceste condiții, la nodurile *2* și *5* vin numai cîte două bare de direcții diferite, deci și barele *1-2* și *2-3*, respectiv *4-5* și *5-6* sînt inactive. Lucrează deci numai barele trasate plin pe figură; eforturile acestora se obțin din echilibrul nodurilor *3* și *1*.

— Pentru *componenta antisimetrică* (fig. 54, *g*), condiția de antisimetrie arată că bara *3-4* nu poate avea efort. Prin aceasta, în nodurile *3* și *4* rămîn numai cîte două necunoscute, astfel că metoda izolării nodurilor poate fi aplicată.

Efortul din fiecare bară rezultă suprapunînd eforturile găsite pentru cele două componente ale încărcării.

b. Aplicare grafică; epura Cremona. Metoda izolării nodurilor poate fi aplicată în două moduri, ambele cunoscute de la cursul de Mecanică teoretică: *analitic*, alegînd în mod convenabil la fiecare nod cele două axe de proiecții și scriind ecuațiile de echilibru respective, sau *grafic*. Utilizarea grafică a metodei este larg răspîndită în proiectare și de aceea se reamintește aici succint modul sistematizat de aplicare.

Epura constă din construirea succesivă a poligoanelor închise de forțe pentru fiecare nod, rezultate din condiția de echilibru a nodurilor; aceste poligoane se trasează în continuare, astfel ca să nu fie nevoie să se ducă de două ori același vector. Se dau mai jos aspectele caracteristice ale epurei, cu exemplificare pe cazul din figura 55, *a*.

(*a*) Se adoptă un sistem special de notații, care asigură epurei o deosebită claritate. Se notează cu cîte o cifră fiecare cîmp dintre două forțe, considerînd atît sarcinile și reacțiunile, cît și eforturile din bare. Fiecare forță este notată cu *doi indici*, anume cifrele corespunzătoare cîmpurilor alăturate, culese în ordinea dată de parcurgerea în jurul nodului respectiv într-un anumit sens, obișnuit sensul *orar*. Astfel, reacțiunea din stînga va fi notată cu $\overline{51}$, sarcina de la mijlocul tălpii inferioare cu $\overline{45}$ etc. Privitor la eforturi, se observă că un același efort își *inversează notația* cînd se trece de la o extremitate la alta a barei

respective. Astfel, efortul din bara superioară se notează *27* pentru acțiunea dată asupra nodului din stînga și *72* cînd se consideră nodul din dreapta. Prin acest mod de notare apare limpede că acțiunile barei asupra celor două noduri de la extremități sînt două forțe egale și de sens contrar.

(*b*) Se determină reacțiunile din rezemări după procedeele cunoscute, pe cale grafică sau chiar analitică în cazuri mai simple.

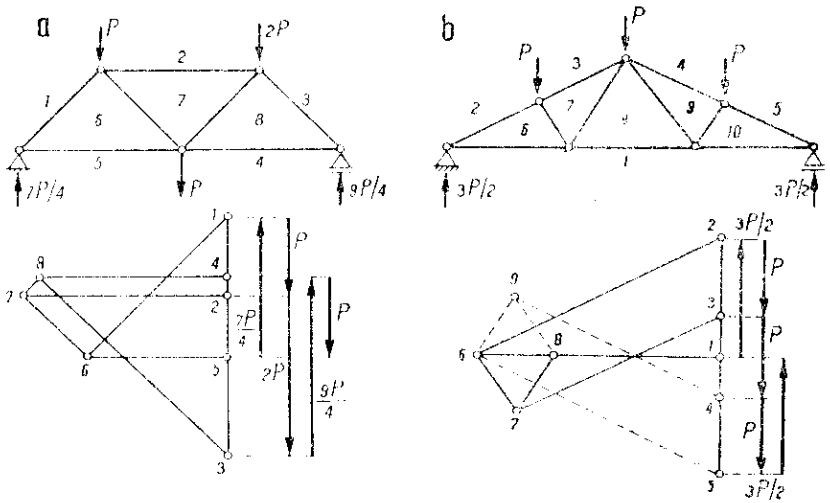


Fig. 55

(*c*) Se construiește un poligon de forțe închis cu toate forțele exterioare care acționează asupra grinzii cu zăbrele (sarcini și reacțiuni). Așezarea forțelor în acest poligon se face *în ordinea în care sînt întîlnite dacă se parcurge conturul grinzii* în sensul ales (sensul orar); astfel, în cazul considerat, succesiunea este *51*, *12*, *23*, *34* și *45*. Notarea forțelor în poligon se face folosind cei doi indici, primul indice reprezentînd originea, al doilea — extremitatea vectorului respectiv. Cînd toate forțele au aceeași direcție, pentru claritate poligonul de forțe se desfășoară pe drepte paralele, ca în figura 55, *a*; toate punctele sînt apoi aduse pe o linie de referință paralelă cu forțele.

(*d*) Se începe epura pornind de la un nod cu două bare, de exemplu reazemul din stînga, și se construiește poligonul de forțe închis respectiv, care este *51-16-65*; rezultă mărimile necunoscutelor *16* și *65*, definite prin poziția punctului *6* al epurei. Se trece la nodul următor, unde sînt cunoscute efortul *61* și sarcina *12*, rezultînd conturul închis *61-12-27-76* care determină necunoscutele *27* și *76* prin punctul *7* al epurei. Se continuă asemănător pînă la penultimul nod, unde este numai o singură necunoscută; închiderea conturului corespunzător *87-72-23-38* implică închiderea epurei, deci paralela dusă prin *3* la bara *3-8* trebuie să treacă prin punctul *8*. Pentru ultimul nod, poligonul

său de echilibru $\overline{34}$-$\overline{48}$-$\overline{83}$ se găsește gata construit pe epură. Ordinea de parcurgere a nodurilor trebuie aleasă astfel ca, de fiecare dată, să fie de determinat numai cîte două eforturi necunoscute.

(*e*) Natura unui anumit efort (întindere sau compresiune) rezultă citind denumirea efortului prin cei doi indici, la una dintre extremitățile barei și urmărind pe epură sensul indicat de acești doi indici. Astfel, pentru talpa superioară, efortul $\overline{27}$ de la nodul din stînga este arătat în epură ca apăsînd asupra nodului, deci bara este comprimată. Trecînd la nodul din dreapta, efortul $\overline{72}$ arată de asemenea apăsare asupra acestui nod, regăsind deci același rezultat.

Pe baza caracteristicilor arătate se poate construi epura Cremona pentru orice structură articulată plană care poate fi rezolvată prin metoda izolării nodurilor. În cazul cînd alcătuirea structurii și sarcinile sînt simetrice, este suficient să se construiască numai jumătate din epură; cealaltă jumătate este simetrica acesteia. Astfel, pentru cazul arătat în figura 55, *b*, se va trasa numai partea indicată cu linii pline. De observat că, în acest caz, nu se mai obține verificarea grafică prin închiderea epurei.

c. **Identificarea formelor critice prin metoda „sarcinii-zero".** Metoda izolării nodurilor poate servi și la identificarea structurilor cu formă critică, pornind de la constatarea — făcută anterior — că acestor configurații particulare le corespunde un determinant principal *nul* în sistemul de ecuații care exprimă echilibrul nodurilor. Înseamnă că nu se poate găsi o serie unică de valori pentru necunoscute.

Se admite că structura *nu este încărcată* ($D_i=0$). Urmează în mod necesar că reacțiunile din rezemări și eforturile din toate barele sînt egale cu zero. Aceasta ar trebui să fie singura serie de valori care să satisfacă ecuațiile de echilibru ale nodurilor; se ajunge la acest rezultat cînd $D\neq 0$. Dacă se mai poate găsi însă și *o altă serie de valori* (diferite de zero) pentru eforturile din bare, care să satisfacă de asemenea echilibrul nodurilor, înseamnă că $D=0$, și deci sistemul are formă critică.

O cale simplă de aplicare a acestei idei, utilizabilă la structuri compuse și chiar la unele structuri complexe, constă în identificarea barelor inactive pe baza cazurilor din figura 54, *a*. Se admite structura neîncărcată și se urmărește succesiv care sînt barele ce nu pot prelua efort; dacă toate barele se găsesc în această situație, structura este geometric invariabilă.

La structurile complexe, unde în noduri se întîlnesc cel puțin cîte trei bare, metoda „sarcinii-zero" trebuie aplicată sub o altă formă. Se admite că în una dintre bare s-ar dezvolta un efort de mărime oarecare (de exemplu egal cu unitatea) și se determină apoi eforturile corespunzătoare din celelalte bare pe baza echilibrului nodurilor. Pentru o structură geometric invariabilă, se ajunge totdeauna la constatarea că la unul dintre noduri *echilibrul este imposibil*; aceasta arată că ipoteza făcută (eforturi diferite de zero în bare) nu se poate realiza. De obicei, nu este necesară determinarea *mărimii* eforturilor, ci numai a *naturii* lor (întindere sau compresiune), pentru a pune în evidență imposibilitatea echilibrului în anumite noduri. Dacă se constată însă că echilibrul poate fi satisfăcut în *toate* nodurile cu eforturi diferite de zero, aceasta identifică prezența formei critice.

Pentru exemplificarea modului de aplicare, în figura 56 sînt reprezentate cîteva structuri articulate complexe, care au cel puțin cîte trei bare în fiecare nod. Structurile se consideră neîncărcate, și deci reacțiunile din rezemări sînt nule. În cazul din figura 56, *a*, pornind de la un efort de întindere în bara *3-6*, ținînd seama de simetrie și considerînd echilibrul nodurilor *3*, *2* și *6* se ajunge la sensurile eforturilor indicate pe figură. Echilibrul nodurilor *1* și

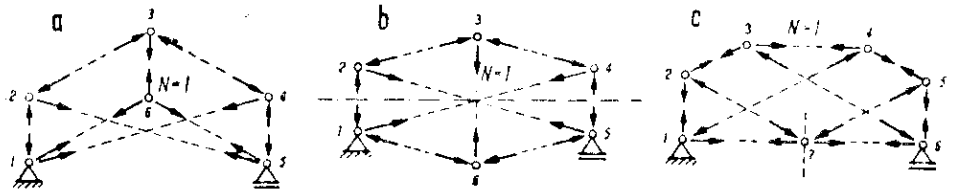


Fig. 56

5 nu este posibil, deoarece perechile de bare *1-6* și *1-4*, respectiv *5-6* și *2-5*, au rezultat cu eforturi de întindere. Ecuațiile de echilibru prin proiecții pe orizontală pot fi satisfăcute numai dacă eforturile din aceste bare sînt nule, deci dacă și efortul din bara 3-6 este nul. Înseamnă că structura are strictă invariabilitate geometrică.

La cazul din figura 56, *b*, se întîlnesc aceleași noduri și bare, dar într-o configurație modificată, caracterizată prin simetria în raport cu două axe (verticală și orizontală). Admițînd și aici un efort diferit de zero în bara *3-6*, condițiile de echilibru ale nodurilor conduc la eforturi în bare avînd sensurile din figură. Aici se constată imediat că echilibrul este posibil în toate nodurile, cît timp se menține dubla simetrie[1], deci sistemul are formă critică; se regăsește concluzia din figura 52, *c*.

La structura din figura 56, *c* se consideră un efort diferit de zero în bara *3-4*. În continuare, echilibrul nodurilor cere ca sensurile eforturilor din bare să fie cele din figură. Printr-o proiecție pe verticală se constată că în nodul 7 echilibrul este imposibil, deoarece barele *2-7* și *5-7* au rezultat ambele comprimate. Structura are deci asigurată invariabilitatea geometrică.

2. Formulare matriceală a metodei izolării nodurilor

Se utilizează o modalitate mai sistematizată de aplicare a metodei izolării nodurilor, astfel ca sistemul ecuațiilor de condiție să poată fi alcătuit direct, oricare ar fi grinda cu zăbrele. Pentru aceasta, se stabilesc mai întîi elementele ce derivă din echilibrul unei bare, apoi se trece la asamblarea barelor în noduri și se scrie echilibrul nodurilor.

[1] Dacă sistemul nu ar fi simetric față de axa orizontală, barele *2-3* și *1-6* nu ar mai fi egal înclinate, și deci eforturile respective ar rezulta neegale. Aceasta ar conduce pentru bara *1-2* la eforturi diferite în cele două extremități, ceea ce contravine condiției de echilibru. Structura nu mai are în acest caz formă critică.

Grinda cu zăbrele se raportează la un sistem general de axe (fig. 57, *a*), față de care o bară curentă *j-k* apare definită prin coordonatele nodurilor de la extremități (x_j, y_j) și (x_k, y_k). Direcția axei barei se raportează la sistemul general folosind unghiul de înclinare α față de axa x, sub forma

$$\cos\alpha = (x_k - x_j)/l \text{ și } \sin\alpha = (y_k - y_j)/l,$$

$$\text{unde} \quad l = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}\,.$$

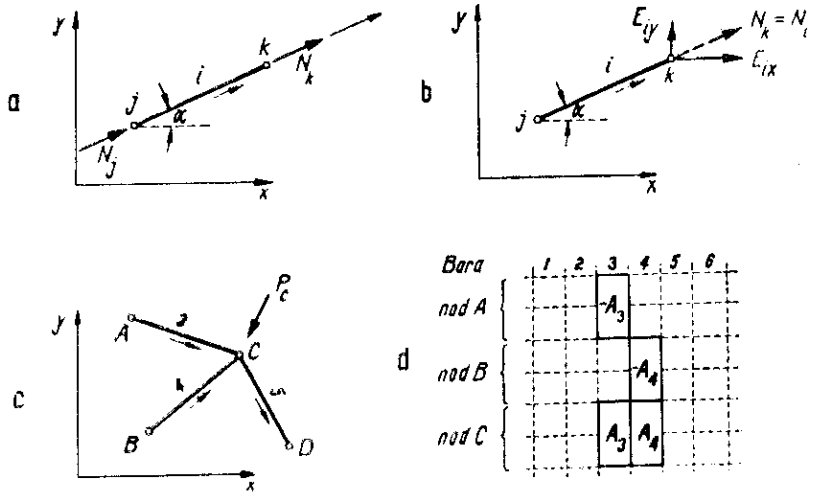


Fig. 57

Pentru sistematizare, bara se admite parcursă în sensul $j \to k$, unde $j < k$; înseamnă că prin numerotarea nodurilor se stabilește implicit care sînt respectiv nodul k și nodul j pentru fiecare bară în parte; corespunzător, rezultă și semnele pentru sin α și cos α.

În continuare, se examinează mai întîi cazul barei, apoi al nodului.

(a) *Bare.* Se lucrează cu *eforturile din extremitățile barelor*; la grinzi cu zăbrele apar numai eforturi axiale. Se admite drept sens pozitiv pentru eforturile N_j și N_k din extremitățile unei bare oarecare i, sensul $j \to k$ stabilit pentru axa acesteia (fig. 57, *a*). Din echilibrul barei rezultă

$$N_j + N_k = 0, \quad \text{deci} \quad N_j = -N_k.$$

În loc de a lucra cu două eforturi, legate prin relația precedentă, este mai simplu să se considere efortul N_i din bară (efort pozitiv reprezintă întindere): se admite inițial ca pozitiv efortul $N_k = -N_i$ din extremitatea k, urmînd ca pentru extremitatea j să se introducă $N_j = -N_i$. Fiecare bară aduce deci o necunoscută.

În vederea asamblării barelor în noduri, eforturile N_i trebuie descompuse în componente după axele sistemului general (fig. 57, *b*), anume

$$\begin{aligned} E_{xi} &= N_i \cos\alpha, \\ E_{yi} &= N_i \sin\alpha, \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} [N_i] \qquad (4.3)$$

unde $\mathbf{A}_i$ este o matrice de transformare a axelor, prin care se efectuează trecerea la componente. Rezultă deci

$$\text{extremitatea } k\text{:}\quad \mathbf{E}_i = \mathbf{A}_i N_i; \qquad \text{extremitatea } j\text{:}\quad -\mathbf{E}_i = -\mathbf{A}_i N_i. \qquad (4.4)$$

(b) *Noduri.* Pentru barele care vin într-un anumit nod, acesta poate fi extremitate *j* sau extremitate *k*, în raport cu sensurile axelor barelor respective; de exemplu, în figura 57, *c* nodul *C* este extremitate *k* pentru barele *3* și *4*, respectiv extremitate *j* pentru bara *5*. Asamblarea barelor în nod constă în exprimarea condiției de echilibru static a nodului, raportată la sistemul general de axe.

Acțiunea unei bare asupra nodului este egală și direct opusă cu efortul din extremitatea respectivă a barei. Înseamnă că se poate exprima condiția de echilibru a nodului sub forma: rezultanta eforturilor din extremitățile tuturor barelor care vin în nod trebuie să coincidă cu rezultanta sarcinilor aplicate pe nod. Astfel, pentru nodul *C*

$$E_{x3} + E_{x4} - E_{x5} = P_{xc} \quad \text{și} \quad E_{y3} + E_{y4} - E_{y5} = P_{yc}.$$

În formulare matriceală, se scrie pe baza relațiilor (4.3)

$$\text{sau} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_5 = \mathbf{P}_c, \\ &\mathbf{A}_3 N_3 + \mathbf{A}_4 N_4 - \mathbf{A}_5 N_5 = \mathbf{P}_c, \end{aligned} \qquad \text{unde } \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} P_{xc} \\ P_{yc} \end{bmatrix}. \qquad (4.5)$$

Dacă se exprimă condiția de echilibru în toate nodurile, se ajunge la un sistem de ecuații liniare, care se poate scrie sub forma

$$\mathbf{AN} = \mathbf{P} \quad \text{și deci} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}, \qquad (4.6)$$

unde matricea **A** a coeficienților rezultă din asamblarea matricelor $\mathbf{A}_i$ provenite de la bare și are dimensiunea $(2n.b)$ — cîte două rînduri pentru fiecare nod (două ecuații), cîte o coloană pentru fiecare bară (necunoscută). Matricea-coloană **N** cuprinde eforturile N_1, N_2, ... ale barelor, iar matricea-coloană **P** cuprinde perechile de componente (cu semnele respective) ale sarcinilor aplicate în nodurile *A*, *B*, ...

Grinda cu zăbrele este static determinată cînd sistemul de ecuații (4.6) se poate rezolva, deci cînd matricea **A** este *pătrată*. Aceasta conduce la condiția $b = 2n$, care este cunoscută și a fost stabilită anterior în relația (4.2). Trebuie precizat că prin *b* se înțeleg aici toate necunoscutele, atît eforturile din bare, cît și forțele de legătură din rezemări. Pentru a se ajunge la o reprezentare unitară, legăturile simple din rezemări trebuie înlocuite prin bare dublu articulate (ca în figura 2, *e*). În acest mod, reacțiunile apar tot ca eforturi în bare, iar condiția de echilibru se scrie pentru cele *n* noduri ale structurii.

Din relațiile (4.5) se vede că matricea globală **A** se poate forma *direct* prin depunerea matricelor $\mathbf{A}_i$ și $-\mathbf{A}_i$ pentru fiecare bară i la nodurile pe care le leagă. De exemplu, bara *3* din figura 57, *c* leagă nodurile *A* și *C* (*C*>*A*); urmează că în coloana 3 trebuie depusă matricea $\mathbf{A}_3$ în dreptul nodului *C* și matricea $-\mathbf{A}_3$ în dreptul nodului *A* (fig. 57, *d*). În acest mod direct de formare a matricei **A** constă de fapt obiectivul urmărit prin sistematizarea făcută, care elimină scrierea explicită a ecuațiilor de echilibru pentru cazul particular al grinzii date. Matricele de forma $\mathbf{P}_c$ se depun în matricea-coloană **P** în dreptul nodului respectiv.

Urmează rezolvarea sistemului de ecuații (4.6), deci matricea pătrată **A** trebuie inversată și multiplicată cu matricea-coloană **P**, obținînd direct mărimile eforturilor axiale din bare. Întreaga rezolvare este reprezentată în schema logică din figura 58.

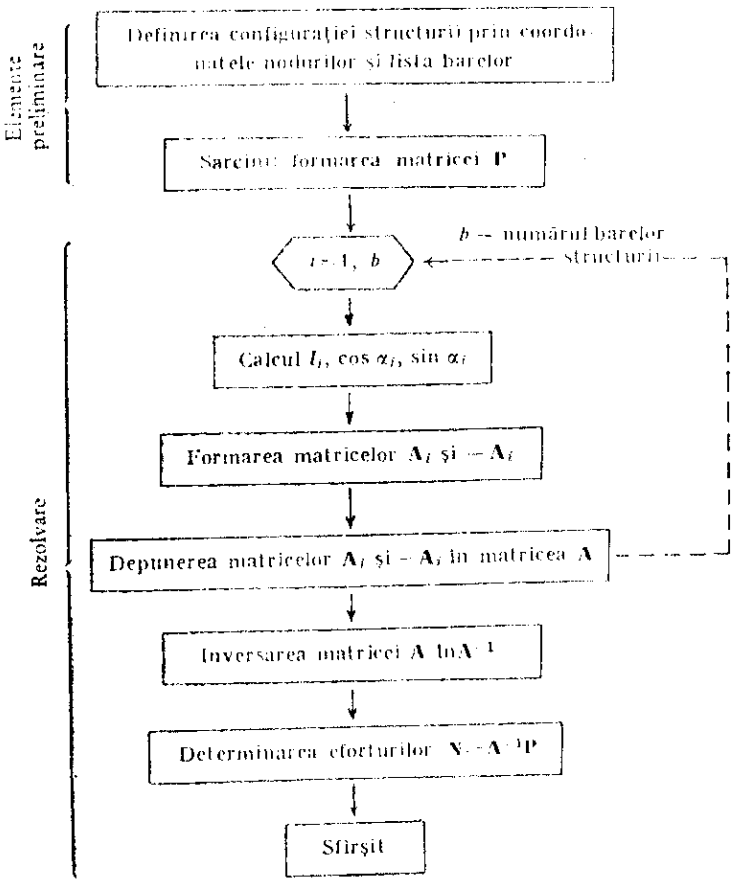


Fig. 58 Schemă logică de aplicarea metodei izolării nodurilor.

Pentru exemplificare, se determină eforturile din barele structurii articulate arătată în figura 59. Se începe cu stabilirea coordonatelor nodurilor, precum și cu calculul valorilor cos α și sin α pentru fiecare bară în parte, cum se vede în tabelele din figură. Se trece apoi la alcătuirea matricei pătrate **A** și a matricei-coloană **P**, obținînd:

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{nod } B \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \\
\text{nod } C \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \\
\text{nod } D \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.
\end{array}
\underbrace{\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\end{array}}_{\mathbf{A}}
\begin{bmatrix}
-0{,}707 & 0 & -1 & -0{,}707 & 0 & 0 \\
+0{,}707 & 0 & 0 & -0{,}707 & 0 & 0 \\
0 & +0{,}707 & 1 & 0 & +0{,}707 & 0 \\
0 & +0{,}707 & 0 & 0 & -0{,}707 & 0 \\
0 & 0 & 0 & +0{,}707 & -0{,}707 & -1 \\
0 & 0 & 0 & +0{,}707 & +0{,}707 & 0
\end{bmatrix}
\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}},
$$

iar după inversarea matricei **A** se ajunge la:

$$
\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-0{,}354 & +1{,}061 & -0{,}354 & +0{,}354 & 0 & +0{,}707 \\
+0{,}354 & +0{,}354 & +0{,}354 & +1{,}061 & 0 & +0{,}707 \\
-0{,}500 & -0{,}500 & +0{,}500 & -0{,}500 & 0 & -1 \\
-0{,}354 & -0{,}354 & -0{,}354 & +0{,}354 & 0 & +0{,}707 \\
+0{,}354 & +0{,}354 & +0{,}354 & -0{,}354 & 0 & +0{,}707 \\
-0{,}500 & -0{,}500 & -0{,}500 & +0{,}500 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -88{,}4 \\ -38{,}9 \\ +55{,}0 \\ -31{,}8 \\ -38{,}9 \\ +5{,}0 \end{bmatrix}
$$

unde au rezultat eforturile din bare. Conform convenției făcute ($N_k = N_i$), valorile pozitive reprezintă întindere.

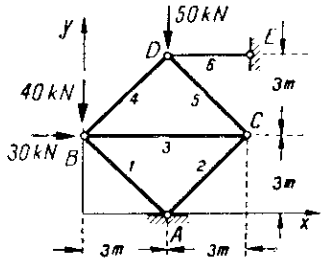


Fig. 59

Nod	x	y
B	0	3
C	6	3
D	3	6

Bara	1	2	3	4	5	6
Noduri	A – B	A – C	B – C	B – D	D – C	D – E
cos α	– 0,707	0,707	1	0,707	– 0,707	1
sin α	+ 0,707	0,707	0	0,707	+ 0,707	0

3. Metoda secțiunilor

Spre deosebire de metoda izolarii nodurilor, prin care se determină succesiv eforturile din toate barele unei structuri articulate, metoda secțiunilor permite să se afle *direct* eforturile din numai una sau din cîteva bare, după necesitate. Prin aceasta, prima metodă corespunde specificului de proiectare, unde trebuie cunoscute eforturile din toate barele în vederea dimensionării. A doua metodă este indicată pentru verificarea dimensionării unor anumite bare, la trasarea liniilor de influență etc.

În metoda secțiunilor se izolează porțiuni de structură și se folosesc ecuațiile de echilibru ale acestora. Izolarea se obține admițînd suprimate barele care leagă porțiunea considerată de restul structurii, înlocuindu-le cu efectul lor asupra nodurilor de la extremități. Astfel, prin secțiunile *I-I* și *II-II* (fig. 60, *a*) se separă din grindă porțiunile rigide *1-2-3* și *8-11-12*, acționate fiecare de sarcinile și reacțiunile care le revin, precum și de eforturile necunoscute

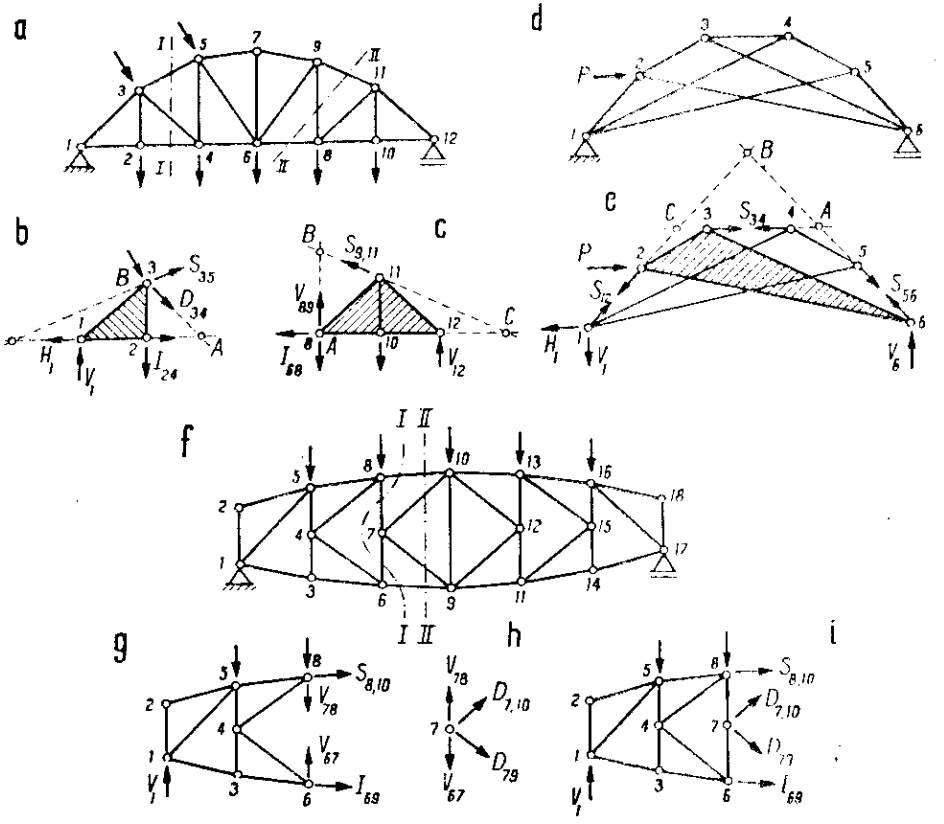


Fig. 60

din barele suprimate (fig. 60, *b* și *c*). Pentru o porțiune rigidă în plan sînt disponibile trei ecuații de echilibru static, deci se pot determina numai trei necunoscute; înseamnă că metoda este utilă *cînd secționarea se poate face numai prin trei bare cu efort necunoscut*. Acest lucru este totdeauna posibil la structuri articulate simple, datorită alcătuirii dintr-o succesiune de triunghiuri.

Cele trei bare secționate *nu trebuie să fie concurente sau paralele*[1]. Într-adevăr, rezultanta sarcinilor și a reacțiunilor de pe porțiunea izolată este echilibrată

[1] Aceasta concordă cu condiția discutată în legătură cu figurile 4, *c* și *d*, privitor la legarea invariabilă a două porțiuni rigide prin intermediul a trei bare.

de rezultanta celor trei eforturi necunoscute. Problema se reduce în fond la a descompune o forță egală și direct opusă cu prima rezultantă după direcțiile barelor secționate[1], ceea ce nu este posibil dacă aceste direcții sînt concurente sau paralele. Apare astfel bine definit domeniul avantajos de aplicare al metodei secțiunilor.

La scrierea ecuațiilor de echilibru pentru porțiunea izolată se va urmări obținerea unor ecuații cît mai simple, de preferință cu cîte o singură necunoscută. Aceasta este posibil dacă se folosesc ecuații de momente în raport cu punctele convenabil alese, care să elimine două din cele trei necunoscute. Astfel, la porțiunea izolată din fig. 60, *b*, echilibrul se poate exprima prin ecuații de momente în raport cu punctele necoliniare *A* pentru necunoscuta S_{35}, *B* pentru necunoscuta I_{24} și *C* pentru necunoscuta D_{34}. Asemănător, la porțiunea izolată din figura 60, *c*, eforturile se obțin succesiv din ecuații cu cîte o singură necunoscută, dacă ecuațiile de momente se iau în raport cu punctele *A* pentru $S_{9\text{-}11}$, *B* pentru I_{68} și *C* pentru V_{89}. Prealabil aplicării ecuațiilor de echilibru pentru porțiunile izolate este necesar să se determine reacțiunile, considerînd echilibrul structurii în ansamblul său.

La determinarea eforturilor din barele unor structuri articulate este deseori indicat să se folosească metoda secțiunilor împreună cu metoda izolării nodurilor. De exemplu, pentru montantul central *6-7* (fig. 60, *a*) se izolează nodul *7*, după ce în prealabil s-a determinat efortul din una dintre barele alăturate de la talpa superioară. Combinarea metodelor se dovedește în special avantajoasă la rezolvarea structurilor articulate compuse. Astfel, la ferma din figura 51, *c* se poate evita ca aplicarea metodei izolării nodurilor să se blocheze la nodul *5*, dacă se începe prin izolarea porțiunii *1-5-8* efectuînd secționarea *1-1* și se determină direct efortul din bara *5-11* printr-o ecuație de momente în raport cu punctul *8*.

Sînt cazuri cînd chiar la structuri articulate complexe metoda secțiunilor poate da rezultate. Structura din figura 60, *d* are în fiecare nod cîte trei bare, ceea ce exclude aplicarea metodei izolării nodurilor; de asemenea, o secționare care să taie numai trei bare nu apare posibilă la prima vedere. Totuși, se poate face o asemenea secționare dacă se suprimă barele *1-2*, *3-4* și *5-6*, izolînd porțiunea rigidă *2-3-6* acționată de sarcina *P*, reacțiunea V_6 și eforturile necunoscute S_{12}, S_{34} și S_{56} (fig. 60, *e*). Determinarea acestor eforturi prin ecuații cu cîte o singură necunoscută se face folosind ecuații de momente în raport cu punctele *A* pentru S_{12}, *B* pentru S_{34} și *C* pentru S_{56}.

Un alt exemplu se referă la o grindă cu zăbrele avînd diagonale în sistem *K* (fig. 60, *f*), urmînd să se determine eforturile din barele celui de-al treilea panou. Aici nu se poate face o secționare care să taie numai trei bare; dificultatea se ocolește folosind două secționări, precum și izolări de noduri, în modul următor:

— secționarea *I-I* izolează porțiunea arătată în figura 60, *g*, care permite determinarea eforturilor $S_{8\text{-}10}$ și I_{69} din tălpi prin ecuații de momente în raport cu punctele *6* și *8*;

[1] În aceasta constă de altfel aplicarea *grafică* a metodei secțiunilor (metoda lui *Culmann*), cunoscută de la cursul de Mecanică teoretică.

— izolarea nodului 7 (fig. 60, *h*) și scrierea unei ecuații de proiecție pe orizontală conduce la o primă relație între eforturile $D_{7\text{-}10}$ și D_{79} din cele două diagonale ale panoului;

— secționarea *II-II* izolează porțiunea arătată în figura 60, *i*, la care printr-o proiecție pe verticală se obține a doua relație între eforturile din aceleași două diagonale, astfel că mărimile acestora pot fi determinate.

După cunoașterea eforturilor din barele tălpilor și din diagonale, se pot găsi eforturile din montanți prin izolarea nodurilor de la extremitățile acestora.

4. Descompunerea structurilor articulate compuse în sisteme simple

Determinarea eforturilor din barele unei structuri compuse poate fi făcută prin metodele examinate mai înainte, obișnuit prin folosirea combinată a metodei secțiunilor cu metoda izolării nodurilor. O altă cale, care se dovedește deseori utilă, constă în descompunerea structurii date în sistemele simple care o alcătuiesc, stabilind pentru fiecare încărcările ce-i revin; eforturile totale se obțin apoi prin suprapunere. Acest procedeu are avantajul de a scoate în evidență cu claritate rolul diferitelor bare în structură.

În figura 61 este arătată o grindă trapezoidală, la care fiecare bară a tălpii superioare este formată din cîte o mică grindă cu zăbrele; aceasta devine ne-

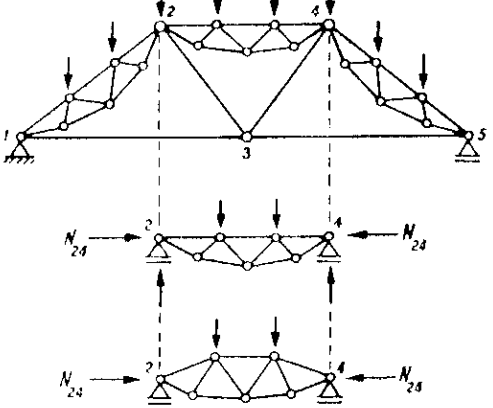


Fig. 61

cesar cînd sarcinile trebuie să se aplice în mai multe puncte ale tălpii superioare. Grinzile cu zăbrele *1-2*, *2-4* și *4-5* au în structură un *rol dublu*. Pe de o parte se comportă ca *sisteme secundare* care preiau sarcinile ce se aplică direct asupra lor, transmițîndu-le la extremitățile în nodurile *sistemului principal*, format din schema geometric invariabilă *1-2-3-4-5*. Pe de altă parte, îndeplinesc funcția de bare în sistemul principal și, ca atare, se încarcă cu eforturile corespunzătoare acestei situații. În figurile inferioare s-a reprezentat

sistemul secundar încărcat cu sarcini și cu perechile de forțe N_{24}, care reprezintă efortul din bara *2-4* a sistemului principal; apar astfel cu claritate cele două funcțiuni. S-au considerat două variante: cu una din tălpi dreaptă, sau cu ambele tălpi poligonale. În primul caz, perechea N_{24} produce eforturi numai în barele tălpii rectilinii, deci numai aceste bare au două funcțiuni. În al doilea caz, perechea N_{24} dă eforturi în toate barele sistemului secundar; aceste eforturi trebuie suprapuse cu cele ce se dezvoltă datorită funcției de sistem secundar, încărcat cu sarcinile ce se aplică în nodurile intermediare. Barele *1-3*, *2-3*, *3-4* și *3-5* lucrează numai ca bare ale sitemului principal.

În general, identificarea sistemului principal rezultă reținînd numai acele bare care formează împreună cea mai simplă schemă geometric invariabilă pentru ansamblul structurii date. Sistemele secundare reazemă în nodurile sistemului principal și funcțiunea lor este limitată numai pentru sarcinile care le acționează direct. Se poate utiliza una sau mai multe grupe de sisteme secundare, după caz; este posibil uneori ca, la aceeași structură, să se aleagă în mod diferit sistemul principal, după cum se consideră mai multe sau mai puține sisteme secundare. Criteriul de orientare în această direcție trebuie să fie ușurință de rezolvare.

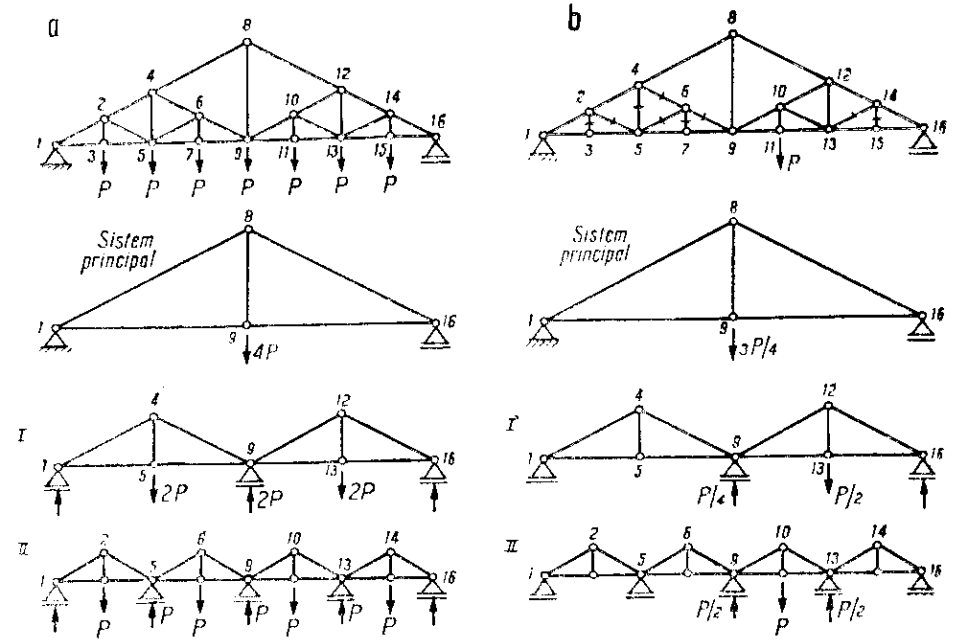


Fig. 62

Un exemplu de descompunere în sisteme simple este dat în figura 62, *a*, pentru o structură articulată la care a fost necesar să se introducă o succesiune de noduri la talpa inferioară, spre a permite sprijinirea unor elemente transversale care aduc încărcări de mărime P. Modul de descompunere se

vede în figurile inferioare. Ca sistem principal a fost considerat ansamblul barelor *1-8*, *1-9*, *8-9*, *8-16* și *9-16*. Pe acesta sînt suprapuse sistemele secundare (*I*) *1-4-5-9* și *9-12-13-16*, care reazemă în nodurile *1* și *9*, respectiv *9* și *16* ale sistemului principal. Un al doilea grup de sisteme secundare (*II*), și anume *1-2-3-5*, *5-6-7-9*, *9-10-11-13* și *13-14-15-16*, reazemă în nodurile sistemelor secundare (*I*). Este ușor de controlat că atît structura dată, cît și toate sistemele componente, satisfac condiția $b - 2n = 3$ de invariabilitate geometrică proprie. Înseamnă că, prin introducerea sistemelor secundare în sistemul principal, noilor bare adăugate le corespund și noi noduri articulate, astfel că relația care controlează prezența numărului minim de legături necesar rămîne neschimbată[1].

Pe figură se poate urmări transmiterea sarcinilor de la un sistem la altul. Astfel, sistemele secundare (*II*) transmit sarcinile *P* care sînt aplicate direct asupra lor (în nodurile *3*, *7*, *11* și *15*) la sistemele secundare (*I*) în nodurile *5* și *13*, iar acestea le transmit mai departe — împreună cu sarcinile ce le revin direct — la nodurile sistemului principal. Înseamnă că sistemele secundare (*I*) trebuie calculate la sarcini de mărime $P \mid P \quad 2P$; sistemul principal este acționat în nodul *9* de reacțiunile $P \mid 2P \quad 3P$ și de sarcina *P* aflată în nod, în total $4P$. După determinarea separată a eforturilor pentru fiecare sistem, se efectuează suprapunerea de efecte.

Urmărind schema structurii și modul de descompunere, se pot distinge mai multe categorii de bare, după cum acestea îndeplinesc una sau mai multe funcțiuni, astfel:

— barele *1-8*, *8-9* și *8-12* fac parte numai din sistemul principal, bare ca *1-6* și *4-5* lucrează numai în sistemul secundar (*I*), iar bare ca *2-5* și *2-3* numai în sistemul secundar (*II*);

— barele *2-4* și *12-14* fac parte atît din sistemul principal cît și din sistemul secundar (*I*), iar barele *6-9* și *9-10* fac parte din ambele sisteme secundare (*I*) și (*II*);

— barele *1-2* și *14-16*, cît și toate barele de la talpa inferioară fac parte din toate cele trei sisteme.

Din această examinare apare clar rolul fiecărei bare din structură și măsura în care efortul său este influențat de sarcinile aplicate în diferite noduri. Astfel, barele care fac parte numai din sisteme secundare nu iau efort decît pentru sarcini aplicate în nodurile care le aparțin direct; se pot deci stabili cu ușurință *barele inactive* pentru o anumită situație de încărcare. Spre exemplificare, în figura 62, *b* s-a considerat aceeași structură compusă încărcată numai cu o sarcină *P* aplicată în nodul *11*. În figurile inferioare, unde s-a repetat descompunerea în sisteme simple, se poate urmări modul cum se face trasmiterea sarcinii de la un sistem la altul. Dintre sistemele secundare (*II*) lucrează numai sistemul *9-10-11-13*, care încarcă sistemul secundar (*I*) *9-12-13-16* cu o sarcină $P/2$ aplicată în nodul *13*, iar acesta la rîndul său încarcă sistemul principal. În nodul *9* se cumulează astfel reacțiunile $P/2 + P/4$.

[1] Din acest punct de vedere rezultă că denumirea *sisteme cu bare suplimentare*, care se dă uneori sistemelor de acest fel, nu este corectă din punct de vedere static.

$= 3P/4$. Toate barele care nu fac parte măcar din unul dintre aceste trei sisteme sînt inactive (sînt însemnate cu o liniuță pe schema structurii) și ar putea lipsi pentru încărcarea considerată.

C. STRUCTURI ARTICULATE SIMPLE SUPUSE LA SARCINI VERTICALE

1. Expresii generale pentru eforturi

Situația particulară de încărcare considerată permite să se sistematizeze rezolvarea structurilor articulate simple, în sensul de a stabili expresii generale pentru eforturile din diferite categorii de bare. Asemenea expresii ușurează calculul practic și totodată arată care sînt elementele ce determină distribuirea eforturilor în structură. Ca referință, se vor considera diagramele de eforturi ale unei grinzi drepte avînd același rezemări și aceleași sarcini. În raport cu configurația structurii se va putea urmări influența formei tălpilor (tălpi paralele, talpă parabolică, fermă triunghiulară etc.) asupra naturii și a mărimii eforturilor din bare. Concluzii de acest fel sînt utile în practică, pentru orientare la alegerea formelor constructive care conduc la soluții economice.

a. **Eforturi în barele tălpilor.** Fie o grindă cu zăbrele sistem triunghiular (*fig. 63, a*), arătată împreună cu grinda dreaptă corespunzătoare. Pentru determinarea efortului dintr-o bară a tălpii *superioare*, de exemplu bara *2-4*, se face secționarea *I* izolînd porțiunea ridigă arătată hașurat. Echilibrul acestei porțiuni se poate exprima printr-o ecuație de momente în raport cu punctul *3*; se obține

$$V_1 x_3 - \sum P_j (x_3 - x_j) + S_{24} h'_3 = 0,$$

unde $V_1 = V_1^0$ și h'_3 este distanța de la nodul *3* la bara *2-4*. Primii doi termeni reprezintă momentul încovoietor din secțiunea *3* a grinzii drepte corespunzătoare (M_3^0), deci

$$M_3^0 + S_{24} h'_3 = 0, \quad \text{de unde} \quad S_{24} = -M_3^0 / h'_3. \tag{4.7}$$

Situația este asemănătoare pentru orice altă bară a tălpii superioare. Astfel, făcînd secționarea *II* care izolează porțiunea rigidă *5-6-7* și exprimîndu-i echilibrul printr-o ecuație de momente în raport cu punctul 5, se ajunge la

$$M_5^0 + S_{46} h'_5 = 0, \quad \text{de unde} \quad S_{46} = -M_5^0 / h'_5.$$

Relația de tipul (4.7) arată că efortul dintr-o bară a tălpii superioare se obține din momentul încovoietor al grinzii drepte corespunzătoare, considerat în secțiunea din dreptul nodului *opus barei*, împărțit cu distanța acestui nod la bară și luat cu *semn schimbat*. Momentelor încovoietoare pozitive le corespudn eforturi de compresiune, iar momentelor încovoietoare negative — eforturi de întindere. Înseamnă că pentru o grindă cu zăbrele simplu rezemată la extremități, la care diagrama M^0 este în întregime pozitivă, toate barele tălpii superioare sînt *comprimate*. Cînd grinda cu zăbrele ar avea console, sau ar fi

alcătuită pe schema unei grinzi cu console și articulații (v. fig. 65), expresia efortului dintr-o bară a tălpii superioare are tot forma (4.7). De data aceasta, diagrama M^0 are zone pozitive și negative deoarece se referă la grinda dreaptă corespunzătoare structurii date, care este o grindă cu consolă sau o grindă cu console și articulații.

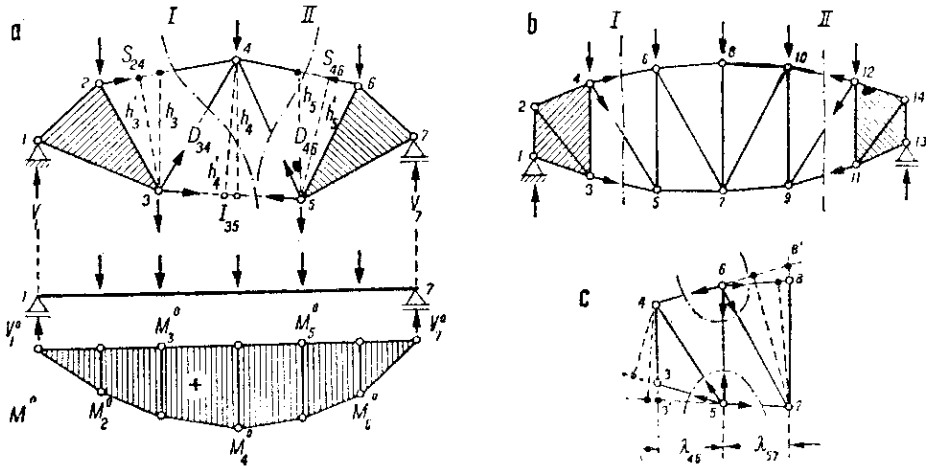


Fig. 63

Pentru efortul dintr-o bară a tălpii *inferioare*, de exemplu bara *3-5*, echilibrul porțiunii rigide *1-2-3* exprimat printr-o ecuație de momente în raport cu punctul *4* dă

$$M^0_4 - I_{35} h'_4 = 0, \quad \text{de unde} \quad I_{35} = +M^0_4/h'_4, \tag{4.8}$$

expresie asemănătoare cu (4.7), cu deosebirea că semnul efortului concordă cu semnul lui M^0 în secțiunea din dreptul nodului opus barei. Înseamnă că barele tălpii inferioare sînt întinse cînd M^0 este pozitiv și comprimate cînd M^0 este negativ. La o grindă cu zăbrele simplu rezemată toate barele tălpii inferioare sînt întinse, în timp ce la o grădină cu console și articulații la talpa inferioară vor fi atît bare întinse, cît și bare comprimate, în concordanță cu diagrama M^0.

Dacă în loc de distanțele h'_3 și h'_4, normale pe barele *2-4* și *3-5*, se folosesc distanțele *pe verticală* h_3 și h_4, care reprezintă înălțimile grinzii cu zăbrele în dreptul nodurilor *3* și *4*, se constată că

$$h'_3 = h_3 \cos \alpha_{24} \quad \text{și} \quad h'_4 = h_4 \cos \beta_{35},$$

unde α_{24} și respectiv β_{35} sînt înclinările barelor *2-4* și *3-5* față de orizontală. Expresiile (4.7) și (4.8) devin

$$S_{24} \cos \alpha_{24} = -M^0_3/h_3 \quad \text{și} \quad I_{35} \cos \beta_{35} = +M^0_4/h_4, \tag{4.9}$$

care dau mărimile *proiecțiilor pe orizontală* ale eforturilor din barele tălpilor.

La o grindă cu zăbrele sistem dreptunghiular (fig. 63, *b*) se ajunge la expresii în totul asemănătoare pentru eforturile din barele tălpilor. Astfel, făcînd secți-

onarea *I* și exprimînd echilibrul porțiunii rigide *1-2-3-4* prin ecuații de momente în raport cu punctele *5* și *4*, se obține

$$S_{46}' = -M_5^0/h_5' \text{ și } I_{35} = M_4^0/h_4' \tag{4.10}$$

sau

$$S_{46}\cos\alpha_{46} = -M_5^0/h_{56} \text{ și } I_{35}\cos\beta_{35} = M_4^0/h_{34},$$

unde h'_5 și h'_4 sînt distanțele de la nodurile *5* și *4* la barele opuse lor, în timp ce înălțimile h_5 și h_4 ale grinzii cu zăbrele în dreptul nodurilor *5* și *4* sînt în acest caz chiar lungimile h_{56} și h_{34} ale montanților *5-6* și *3-4*.

Cele stabilite mai sus arată că expresiile eforturilor din barele tălpilor au aceeași formă generală, oricare ar fi distribuția zăbrelelor. Din expresii rezultă că, variind configurația grinzii, natura eforturilor din barele tălpilor rămîne aceeași, dar mărimea lor se schimbă în raport cu variația înălțimilor *h* respective.

b. **Eforturi în diagonale.** Considerînd din nou grinda cu zăbrele sistem triunghiular din figura 63, *a* și folosind tot secționarea *I*, se poate exprima echilibrul porțiunii rigide *1-2-3* printr-o ecuație de proiecții pe orizontală

$$S_{24}\cos\alpha_{24} + I_{35}\cos\beta_{35} + D_{34}\cos\gamma_{34} = 0,$$

unde forțele exterioare nu apar, deoarece au toate direcție verticală. Utilizînd relațiile (4.9), se obține pentru efortul din diagonala *3-4* care *urcă* spre dreapta

$$D_{34}\cos\gamma_{34} = M_3^0/h_3 - M_4^0/h_4. \tag{4.11}$$

În mod asemănător, cu ajutorul secționării *II* se obține pentru diagonala *4-5* care *coboară* spre dreapta

$$S_{46}\cos\alpha_{46} + I_{35}\cos\beta_{35} + D_{45}\cos\gamma_{45} = 0,$$

unde, ținînd seama că $S_{46}\cos\alpha_{46} = -M_5^0/h_5$ și $I_{35}\cos\beta_{35} = M_4^0/h_4$, se ajunge la

$$D_{45}\cos\gamma_{45} = -M_5^0/h_5 - M_4^0/h_4.$$

Relația de tipul (4.11) arată că proiecția pe orizontală a efortului dintr-o diagonală este dată de diferența a doi termeni, în care apar momentele încovoietoare ale grinzii drepte corespunzătoare în secțiunile indicate de nodurile de la *extremitățile diagonalei*; fiecare din momente este împărțit cu înălțimea grinzii cu zăbrele din dreptul nodului respectiv. La scrierea relației (4.11) *termenul pozitiv corespunde capătului inferior al diagonalei, iar termenul negativ — capătului superior*; valorile momentelor încovoietoare se introduc apoi în relație cu semnele lor, conform diagramei M^0. Rezultînd din diferența a doi termeni, natura efortului din diagonală (întindere sau compresiune) depinde de forma tălpilor grinzii și de poziția sarcinilor.

În cazul unei grinzi cu zăbrele sistem dreptunghiular (fig. 63, *b*), procedeul este același și conduce la expresii asemănătoare. Astfel, pentru diagonala *4-5* care *coboară* spre dreapta se obține

$$D_{45}\cos\gamma_{45} = -M_5^0/h_{56} - M_4^0/h_{34},$$

iar pentru diagonala *9-12* care *urcă* spre dreapta rezultă

$$D_{9,12}\cos\gamma_{9,12}=-M_9^0/h_{9,10}-M_{12}^0/h_{11,12}.$$

c. **Eforturi în montanți.** Se folosește de data aceasta condiția de echilibru a nodurilor de la extremitățile montantului. Va trebui ținut seama dacă sarcinile sînt aplicate în nodurile de la talpa superioară, sau în cele de la talpa inferioară.

Pentru sarcini aplicate la *talpa superioară*, efortul din montant se obține prin izolarea nodului de la extremitatea inferioară. Astfel, pentru montantul *5-6* se izolează nodul *5* și se exprimă echilibrul acestuia printr-o ecuație de momente în raport cu punctul *4* (fig. 63, *c*). Se obține

$$V_{56}\lambda_{46}+I_{57}h_{3'4}\cos\beta_{57}-I_{35}h_{34}\cos\beta_{35}=0,$$

unde λ_{46} este deschiderea panoului din stînga montantului; brațele de pîrghie indicate punctat pe figură au fost exprimate în funcție de înălțimile h_{34} și $h_{3'4}$. Eforturile din cele două bare ale tălpii inferioare sînt

$$I_{57}\cos\beta_{57}=M_6^0/h_{56}\ \text{și}\ I_{35}\cos\beta_{35}=M_4^0/h_{34},$$

astfel că pentru efortul din montant rezultă expresia

$$V_{56}=\frac{1}{\lambda_{46}}\left[M_4^0-M_6^0\frac{h_{3'4}}{h_{56}}\right]. \tag{4.12}$$

Pentru sarcini aplicate la talpa *inferioară* se izolează nodul *6* de la extremitatea superioară și i se exprimă echilibrul printr-o ecuație de momente în raport cu punctul 7. Se obține

$$V_{56}\lambda_{57}+S_{46}h_{78'}\cos\alpha_{46}-S_{68}h_{78}\cos\alpha_{68}=0,$$

unde λ_{57} este deschiderea panoului din dreapta montantului; și aici brațele de pîrghie indicate punctat pe figură au fost exprimate în funcție de înălțimile h_{78} și $h_{78'}$. Introducînd expresiile

$$S_{46}\cos\alpha_{46}=-M_5^0/h_{56}\ \text{și}\ S_{68}\cos\alpha_{68}=-M_7^0/h_{78},$$

se obține

$$V_{56}=\frac{1}{\lambda_{57}}\left[M_5^0\frac{h_{78'}}{h_{56}}-M_7^0\right]. \tag{4.13}$$

Privitor la relațiile (4.12) și (4.13), trebuie remarcat că pentru fiecare intervin numai elemente referitoare la un singur panou alăturat montantului, anume acel panou care nu aduce diagonală în extremitatea montantului de la talpa încărcată.

2. Influența formei tălpilor asupra eforturilor din bare

Pornind de la expresiile stabilite mai sus pentru eforturile din diferite categorii de bare, se arată în cele ce urmează caracteristicile de comportare ale cîtorva forme particulare de grinzi cu zăbrele curent folosite în practică.

a. **Grinda cu tălpi paralele.** Pentru eforturile din *barele tălpilor* se folosesc expresiile (4.7) și (4.8); astfel, pentru barele *4-6* și *3-5* (fig. 64, *a*) se obține

$$S_{46}=-M_5^0/h \text{ și } I_3=+M_4^0/h, \tag{4.14}$$

unde h este constant pentru toate barele și reprezintă înălțimea grinzii cu zăbrele. Rezultă că diagrama M^0 a grinzii drepte corespunzătoare, redusă în raportul $1/h$, dă în ordonate chiar mărimile eforturilor din barele tălpilor. Ordonata din dreptul unui nod reprezintă efortul din bara opusă nodului.

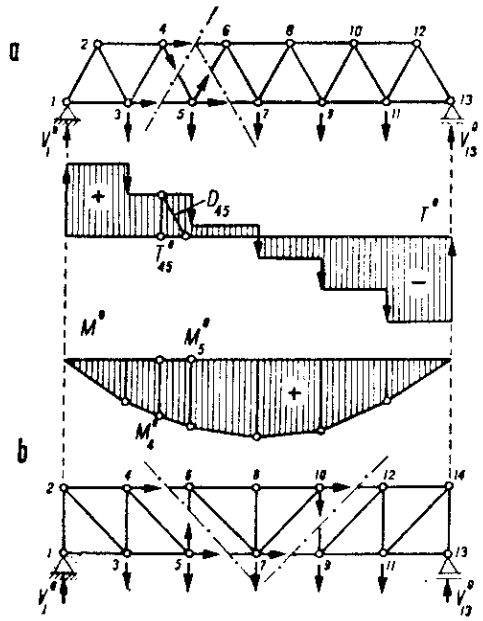


Fig. 64

Dacă diagrama M^0 se construiește grafic, așa cum s-a arătat anterior în figura 14, *b*, momentul încovoietor din dreptul unui nod — de exemplu nodul *6* — este $M_6^0=m_6 H$, iar efortul din bara opusă nodului are expresia

$$I_{57}=M_6^0/h=m_6 H/h.$$

Admițînd *o distanță polară egală cu înălțimea grinzii* ($H=h$) și măsurînd-o la scara lungimilor, rezultă că ordonatele diagramei M^0 — măsurate la scara forțelor — dau chiar eforturile din barele tălpilor. Mai rezultă că variația eforturilor din succesiunea de bare care alcătuiesc o talpă este asemenea variației ordonatelor din diagrama M^0. Pentru o grindă cu zăbrele simplu rezemată, *eforturile din barele tălpilor cresc de la extremități spre mijlocul grinzii*. Bara cea mai solicitată este cea opusă nodului aflat pe ordonata M^0_{max}: bara *6-8* la grinda din figura 64, *a*, sau barele *6-8* și *8-10* la grinda din figura 64, *b*.

Pentru eforturile din *diagonale*, la grinda cu tălpi paralele se pot stabili expresii mai simple decît (4.11), dacă se folosesc secționările din figura 64, *a* și se exprimă echilibrul porțiunilor izolate prin ecuații de proiecții pe *verticală*. Astfel, pentru diagonalele *4-5* și *5-6* se obține

$$V_1^0-\sum P_j-D_{45}\sin\gamma_{45}=0 \quad \text{și} \quad V_1^0-\sum P_j+D_{56}\sin\gamma_{56}=0,$$

unde suma se referă în fiecare caz la toate sarcinile aplicate pe porțiunea izolată. Primii doi termeni din fiecare ecuație reprezintă forța tăietoare din grinda simplu rezemată, în intervalul din dreptul diagonalei considerate, deci

$$T^0_{45}-D_{45}\sin\gamma_{45}=0 \quad \text{și} \quad T^0_{56}+D_{56}\sin\gamma_{56}=0,$$

de unde

$$D_{45}=T^0_{45}/\sin\gamma_{45} \quad \text{și} \quad D_{56}=-T^0_{56}/\sin\gamma_{56}. \tag{4.15}$$

Rezultă că eforturile din diagonale se determină folosind diagrama T^0 a grinzii drepte corespunzătoare.

Forma simplă a relațiilor (4.15) permite și aplicarea lor grafică. Din extremitatea segmentului T^0 respectiv se duce o paralelă la diagonală pînă la axa de referință a diagramei; segmentul astfel obținut (fig. 64, *a*) este tocmai $T^0/\sin\gamma$, deci măsurat la scara forțelor dă efortul din diagonala considerată.

Privitor la *semne*, efortul din diagonalele care *coboară* spre dreapta are același semn cu T^0, în timp ce pentru diagonalele care *urcă* spre dreapta semnul se inversează. Înseamnă că în zona pozitivă a diagramei T^0, diagonalele care coboară spre dreapta sînt întinse, iar cele care urcă spre dreapta sînt comprimate. Totodată, relațiile (4.15) mai arată că variația eforturilor din succesiunea de diagonale este asemenea variației ordonatelor din diagrama T^0. Pentru o grindă cu zăbrele simplu rezemată, *eforturile din diagonale scad de la extremități spre mijlocul grinzii*.

Pentru eforturile din *montanți* se folosesc secționări ca în figura 64, *b*, exprimînd echilibrul porțiunii izolate prin ecuații de proiecții pe verticală. Astfel, pentru montanții *5-6* și *9-10* rezultă

$$V_1^0 - \Sigma P_j + V_{56} = 0 \quad \text{și} \quad V_1^0 - \Sigma P_j - V_{9,10} = 0,$$

unde suma se referă în fiecare caz la toate sarcinile aplicate pe porțiunea izolată. Și aici primii doi termeni din expresie reprezintă forța tăietoare dintr-un anumit panou. De observat însă că — în acest caz — panoul în care trebuie considerată valoarea T^0 diferă, după cum sarcinile se aplică la talpa superioară sau la cea inferioară. Astfel, pentru sarcini la talpa superioară, ultima sarcină de pe porțiunea izolată este cea din nodul *4*, respectiv din nodul *10*, în timp ce pentru sarcini la talpa inferioară ultima sarcină de pe porțiunea izolată este cea din nodul *5*, respectiv din nodul *7*. Rezultă deci:

— sarcini la talpa superioară

$$V_{56} = -T^0_{46} \quad \text{și} \quad V_{9,10} = +T^0_{10,12},$$

— sarcini la talpa inferioară (4.16)

$$V_{56} = -T^0_{57} \quad \text{și} \quad V_{9,10} = +T^0_{79}.$$

Aceste expresii arată că eforturile din montanți au *semn contrar* cu ordonatele corespunzătoare din diagrama T^0, cînd montantul este cuprins între diagonale ce *coboară* spre dreapta, și au *același semn* cînd montantul este cuprins între diagonale care *urcă* spre dreapta. Din expresiile (4.15) și (4.16) se vede că totdeauna montantul și diagonala care se întîlnesc în nodul de la talpa neîncărcată au eforturi de semne contrare, așa cum rezultă de altfel și din condiția de echilibru a acestui nod.

Pentru montanții cu situații particulare, de exemplu montanții de capăt *1-2* și *13-14*, sau montantul central *7-8*, mărimile eforturilor rezultă direct din echilibrul nodurilor *1* și *13*, respectiv a nodului *8*, fiind egale cu mărimile forțelor exterioare aplicate acolo.

Utilizînd expresiile (4.14)—(4.16), este suficient să se traseze diagramele T^0 și M^0 ale grinzii drepte corespunzătoare, spre a determina natura și mărimea

eforturilor din toate barele unei grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele. Un exemplu este dat în figura 65 pentru o grindă cu zăbrele alcătuită pe schema unei grinzi cu console și articulații. Construirea diagramelor T^0 și M^0 s-a făcut grafic, asemănător ca în figura 31, folosindu-se un poligon funicular cu o distanță polară egală cu înălțimea h a grinzii. În aceste condiții, ordonatele diagramei M^0 din dreptul nodurilor, măsurate la scara forțelor, dau eforturile

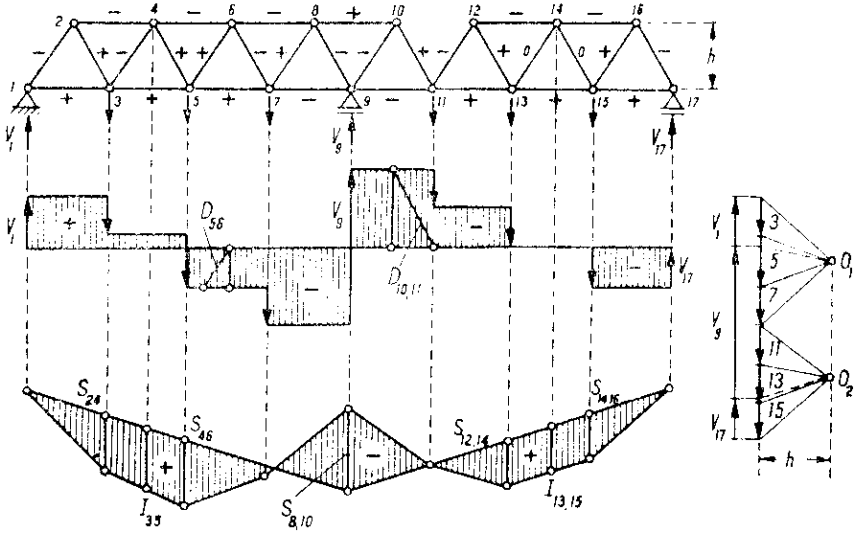


Fig. 65

din barele tălpilor opuse acestor noduri; semnele eforturilor concordă cu semnele ordonatelor M^0 pentru barele tălpii inferioare și sînt inversate pentru barele tălpii superioare. La diagonale, semnele eforturilor concordă cu semnele diagramei T^0, cînd diagonala coboară spre dreapta, și sînt inversate la diagonale care urcă spre dreapta. Pe figură sînt indicate semnele eforturilor din toate barele; pe diagramele T^0 și M^0 s-a arătat modul cum se obțin mărimile acestor eforturi.

b. **Grinda cu talpă parabolică.** Fie un caz particular de încărcare (sarcină uniform distribuită), care pune în evidență specificul de comportare al acestei grinzi. Datorită transmiterii indirecte, diagrama M^0 are contur poligonal cu vîrfuri situate pe o parabolă; datorită formei grinzii, nodurile tălpii superioare sînt de asemenea situate pe o parabolă. Rezultă $M_i^0/h_i = \text{const}$, în dreptul oricărui montant i, de înălțime h_i.

În aceste condiții, aplicînd expresiile (1.10) și (1.11) pentru eforturile din barele unui panou oarecare j-k (fig. 66, *a*), se obține

$$S_{jk}\cos\gamma_{jk} = -M_k^0/h_k = \text{const.}, \qquad I_{jk} = M_j^0/h_j = \text{const.},$$

$$D_{jk}\cos\gamma_{jk} = M_k^0/h_k - M_j^0/h_j = 0.$$

Din aceste expresii rezultă:

— toate barele tălpii inferioare (care este dreaptă) au același efort;

— în barele tălpii superioare, proiecțiile pe orizontală ale eforturilor sînt egale; datorită înclinării diferite a barelor (care crește spre capete), eforturile din barele tălpii superioare cresc de la mijloc spre extremități, dar creșterea este mică;

— în diagonale eforturile sînt nule (bare inactive);

— eforturile din montanți sînt nule cînd sarcinile se aplică la talpa superioară; pentru sarcini aplicate la talpa inferioară, eforturile sînt egale cu sarcinile ce calcă în extremitățile montanților.

În concluzie, cînd grinda cu talpă parabolică este încărcată cu o sarcină uniform distribuită, sistemul se comportă ca un *arc cu tirant*, arcul fiind alcătuit dintr-un lanț de elemente articulate. Diagonalele sînt inactive, iar montanții servesc numai pentru transmiterea sarcinilor, aplicate în extremitățile inferioare, la nodurile tălpii superioare. Se ajunge la această situație deoarece, pentru încărcarea considerată, talpa superioară a grinzii cu zăbrele are forma unui funicular al sarcinilor aplicate în noduri. Cînd pe grindă ar acționa sarcini oarecare, situația se modifică și diagonalele preiau anumite eforturi, dar de mărime redusă.

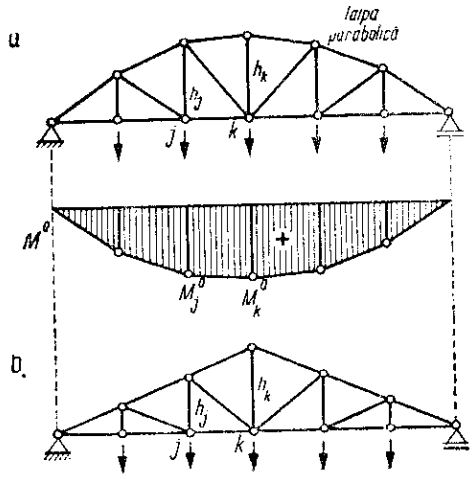


Fig. 66

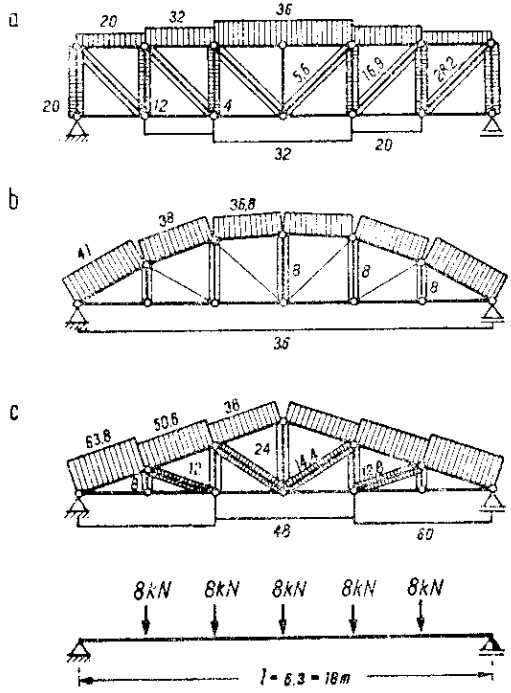


Fig. 67

c. **Grinda de formă triunghiulară.** În acest caz, înălțimea montanților variază liniar de la mijloc spre extremitățile grinzii, în timp ce vîrfurile ordonatelor M^0 se găsesc pe un contur poligonal (fig. 66, *b*). Înseamnă că rapoar-

tele M_i/h_i cresc de la mijloc spre capete; mărimea diferenței dintre rapoartele corespunzătoare montanților ce mărginesc un panou scade însă cu cît ne apropiem de extremități.

În aceste condiții, pornind de la expresiile eforturilor din barele unui panou oarecare *j-k*

$$S_{jk}\cos\alpha_{jk}=-M_k^0/h_k,\quad I_{jk}=+M_j^0/h_j,\quad D_{jk}\cos\gamma_{jk}=M_{ki}^0/h_k-M_j^0/h_j,$$

se ajunge la următoarele concluzii:

— eforturile din barele tălpilor scad de la capete spre mijlocul grinzii;

— diagonalele care coboară spre dreapta sînt comprimate ($M_{ki}^0/h_k>M_j^0/h_j$) și eforturile respective cresc de la capete spre mijloc; cînd se urmărește evitarea diagonalelor comprimate, acestea trebuie așezate invers decît în figura 66, *b*.

Aceste concluzii arată cît de deosebită este distribuția eforturilor într-o fermă triunghiulară, față de grinda cu tălpi paralele.

Pentru aprecierea ordinului de mărime al eforturilor din bare și a modului cum variază acestea în lungul grinzii, în figura 67 sînt date comparativ mărimile eforturilor axiale la trei grinzi cu zăbrele avînd forme de tălpi diferite, dar considerate în aceleași condiții: aceeași înălțime a montantului central (3 m) și aceleași sarcini aplicate în nodurile tălpii *inferioare*. Diagramele haşurate indică eforturi de compresiune, iar cele albe — eforturi de întindere.

CAPITOLUL V

UTILIZAREA PRINCIPIULUI DEPLASĂRILOR VIRTUALE

A. CARACTERISTICI

1. Exprimarea condiției de echilibru static

a. **Semnificația deplasărilor virtuale.** Exprimarea stării de echilibru a unui sistem oarecare, supus acțiunii unui ansamblu de forțe, poate fi făcută folosind *principiul deplasărilor virtuale* cunoscut din Mecanica teoretică. Pe această cale se poate dezvolta întregul studiu al echilibrului, obținîndu-se metode de lucru care conduc la soluții simple, sugestive și elegante. Principiul deplasărilor virtuale are o aplicare cu totul generală și constituie un instrument esențial al Staticii construcțiilor.

Pentru precizarea noțiunii de *deplasare virtuală*, așa cum aceasta intervine în calculul structurilor, se consideră un sistem oarecare avînd unul sau mai multe grade de libertate. Un asemenea sistem are mai puține legături decît cele minim necesare pentru asigurarea invariabilității geometrice și fixării în plan (este un mecanism), astfel că din alcătuirea sa rezultă *anumite posibilități de deplasare cinematică*. Legăturile existente îi pot permite să ia anumite poziții deplasate, în timp ce îl împiedică de a lua altele. Primul caz se referă la deplasări *compatibile cu legăturile*, în timp ce deplasările care s-ar putea imagina, dar care nu sînt permise de legăturile existente, reprezintă *deplasări incompatibile*.

Fiecare grad de libertate al sistemului permite o deplasare *distinctă*, compatibilă cu legăturile. Pentru sisteme cu un singur grad de libertate apare o singură posibilitate de deplasare, cum se vede în figurile 68, *a* sau *b*; deplasarea poate fi dată într-un sens sau celălalt, ambele alternative constituind o singură deplasare distinctă permisă de legături. La sisteme cu mai multe grade de libertate se pot obține diferite posibilități de deplasări compatibile cu legăturile, dar *numărul deplasărilor distincte este egal cu cel al gradelor de libertate*[1]; orice altă deplasare poate fi obținută din acestea prin combinare.

Pentru exemplificare, fie sistemul din figura 68, *c*, care are două grade de libertate ($d = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -2$). Menținînd fixe barele *1-2* și respectiv *4-5*, rezultă posibilitățile de deplasare (1) și (2) compatibile cu legăturile. Alte deplasări posibile sînt de exemplu (3) și (4), dar se constată ușor că deplasarea (3) rezultă din suprapunerea deplasărilor (1) și (2), în timp ce deplasarea (4) se obține suprapunînd deplasarea (2), dată în sens invers, cu deplasarea

[1] Semnificația gradelor de libertate a fost discutată anterior în legătură cu figura 10. La structuri plane, numărul acestor grade rezultă din condiția generală $d = l + r - 3c < 0$, respectiv din condiția $d = b + r - 2n < 0$ pentru specificul structurilor articulate.

(1). Situații asemănătoare se întîlnesc la orice alte sisteme avînd mai multe grade de libertate. Posibilitățile de deplasări distincte compatibile cu legăturile constituie astfel o *caracteristică de alcătuire* a unui sistem, în funcție de numărul gradelor sale de libertate.

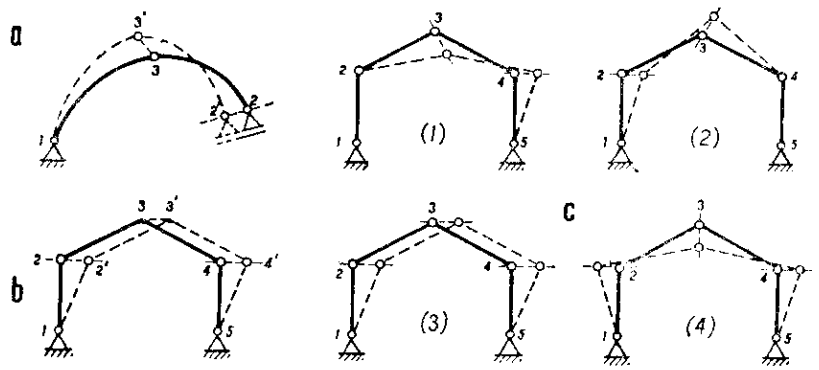


Fig. 68

Fie acum un sistem oarecare — cu grade de libertate — supus unui ansamblu de forțe, distribuit astfel încît sistemul să se găsească *în echilibru*. Datorită stării de echilibru, acțiunea forțelor aplicate nu produce în sistem nici o deplasare cinematică *reală*. Se poate totuși *imagina* că — independent de acțiunea forțelor exterioare — s-ar da sistemului o deplasare foarte mică, compatibilă cu legăturile, care să-l ducă într-o poziție infinit vecină. O asemenea deplasare poartă numele de *deplasare virtuală* și trebuie înțeleasă ca *o deplasare posibilă infinit mică, permisă de legăturile existente în sistem, dar independentă de modul de acțiune a forțelor aplicate, care se găsesc în echilibru*.

Înseamnă că posibilitățile de deplasări compatibile cu legăturile, care rezultă din modul de alcătuire a sistemelor cu grade de libertate, reprezintă deplasări virtuale ce pot fi date acestor sisteme. O deplasare virtuală trebuie văzută ca infinitul mic de la începutul unei mișcări, astfel că *direcția deplasării unui punct al sistemului coincide cu direcția vitezei din acel punct*. Studiul deplasărilor virtuale se va face deci după legile cinematicii pentru mișcări *infinit mici*.

b. **Lucru mecanic virtual.** Parcurgînd o anumită deplasare virtuală, ansamblul de forțe în echilibru aplicat pe sistem produce un lucru mecanic, numit *lucru mecanic virtual*. Pentru evaluarea acestuia se folosesc elementele cunoscute din Mecanica teoretică.

Considerînd o forță P aplicată în punctul i (fig. 69, *a*), deplasarea punctului său de aplicație din i în i' cu mărimea $\overline{ii'}=ds$ produce un lucru mecanic elementar

$$dL=\overline{P}\cdot\overline{ds}=P\,ds\cos(\overline{P},\ \overline{ds})=Pds^e$$

dat de produsul scalar dintre vectorul-forță și vectorul-deplasare, care este egal cu produsul dintre mărimea forței și proiecția deplasării pe direcția forței. Proiecția $ds^c = \overline{ii''} = ds \cos(\overline{P}, \overline{ds})$ poartă numele de *deplasare corespunzătoare* forței P. Rezultă că lucrul mecanic elementar este nul cînd deplasarea corespunzătoare este nulă, deci cînd punctul de aplicație i se deplasează *nor-*

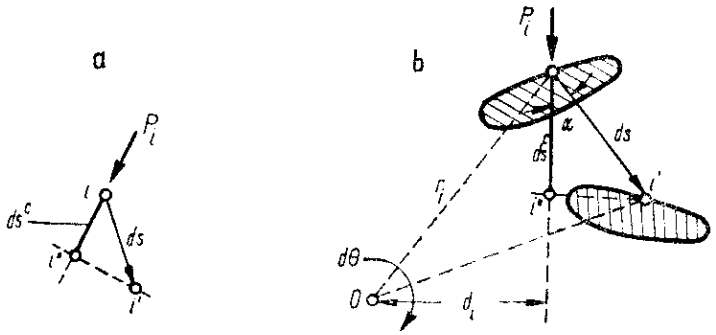


Fig. 69

mal pe direcția forței. Privitor la semne, lucrul mecanic este *pozitiv* cînd deplasarea corespunzătoare se produce în *sensul de acțiune al forței*.

Fie acum un ansamblu de forțe oarecare P_i, aplicate în diferite puncte i, care parcurg deplasările ds_i. Lucrul mecanic elementar total este

$$dL = \sum \overline{P}_i \cdot \overline{ds}_i = \sum P_i \, ds_i \cos(\overline{P}_i, \overline{ds}_i) = \sum P_i \, ds_i^c. \tag{5.1}$$

Dacă se folosesc componentele X_i și Y_i ale forței curente P_i, de asemenea componentele dx_i și dy_i ale deplasării ds_i, același lucru mecanic se poate scrie sub forma

$$dL = \sum (X_i \, dx_i + Y_i \, dy_i), \tag{5.2}$$

deoarece deplasarea corespunzătoare proiecției unei forțe pe o axă este reprezentată de proiecția deplasării pe acea axă.

Cînd ansamblul de forțe P_i este aplicat asupra unui corp rigid care parcurge o *translație* de mărime ds (dx, dy), aceeași pentru toate punctele corpului, relația (5.2) devine

$$dL = \sum (X_i dx_i + Y_i dy_i) = dx \sum X_i + dy \sum Y_i = X dx + Y dy, \tag{5.3}$$

unde X și Y sînt componentele *rezultantei* forțelor P_i.

Cînd ansamblul de forțe este aplicat pe un corp rigid care se rotește cu $d\theta$ în jurul unui punct O din plan (fig. 69, *b*), deplasările ds_i ale punctelor de aplicație i sînt normale pe razele r_i duse de la punctul O și au mărimea $ds_i = r_i d\theta$. Se poate deci scrie

$$dL = \sum P_i ds_i \cos(\overline{P}_i, \overline{ds}_i) = d\theta \sum P_i r_i \cos(\overline{P}_i, \overline{ds}_i) = d\theta \sum P_i d_i = M_0 \, d\theta, \tag{5.4}$$

unde s-a ținut seama că $r_i \cos(\overline{P}_i, \overline{ds}_i) = d_i$ și, de asemenea, că $\sum P_i d_i$ reprezintă momentul M_0 al ansamblului de forțe P_i în raport cu punctul O. Re-

zultă că lucrul mecanic se obține multiplicînd acest moment cu rotirea $d\theta$ a corpului; aici, vectorii $\overline{M}_0$ și $\overline{d\theta}$ au același suport (normala la plan).

Dacă asupra unui sistem spațial oarecare acționează atît forțele P_i, aplicate în punctele i, unde se produc deplasările liniare ds_i, cît și momente exterioare M_j, aplicate în punctele j, unde apar rotirile $d\theta_j$, lucrul mecanic are mărimea

$$dL = \sum \overline{P}_i \cdot \overline{ds}_i + \sum M_j \cdot \overline{d\theta}_j = \sum P_i \, ds_i^c + \sum M_j \, d\theta_j^c, \tag{5.5}$$

unde rotirea $d\theta_j^c$ reprezintă deplasarea corespunzătoare momentului M_j, anume proiecția vectorului-rotire $\overline{d\theta}_j^c$ pe direcția vectorului-moment $\overline{M}_j$.

Din relațiile de forma (5.1)—(5.5) se vede că, pentru evaluarea lucrului mecanic virtual, sînt la dispoziție două căi: (1) se identifică direct care sînt deplasările corespunzătoare forțelor date, multiplicînd aceste deplasări cu forțele; (2) se efectuează descompunerea forțelor și a deplasărilor în componente după axele de referință, utilizînd apoi expresiile respective. Se va vedea mai departe că în Statica construcțiilor se adoptă de obicei prima cale, care apare mai adecvată specificului problemelor acestei discipline.

c. **Condiția de echilibru.** Se consideră din nou un sistem oarecare avînd grade de libertate, supus unui ansamblu de forțe care-i asigură echilibrul. Deoarece sistemul se află în echilibru sub acțiunea sarcinilor date, înseamnă că se poate utiliza — pentru exprimarea situației de echilibru — principiul deplasărilor virtuale, cunoscut din Mecanica teoretică. Acest principiu poate fi enunțat în modul următor:

„Pentru ca un sistem să fie în echilibru, este necesar și suficient ca suma lucrurilor mecanice virtuale corespunzătoare tuturor forțelor care acționează asupra sistemului să fie nulă pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile."

Introducînd în relația (5.5) notațiile admise pentru deplasări virtuale[1], se obține condiția

$$\sum \overline{P}_i \cdot \overline{\delta}_i + \sum \overline{M}_j \cdot \overline{\theta}_j = \sum P_i \delta_i^c + \sum M_j \theta_j^c = 0, \tag{5.6}$$

care este *ecuația generală a echilibrului* scrisă cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Privitor la această ecuație generală sînt de făcut unele observații esențiale:

(1) Ansamblul forțelor exterioare este alcătuit din sarcinile aplicate (care reprezintă *forțe active*) și din forțele de legătură din rezemări sau legături interioare. Forțele de legătură corespund împiedicării de către legăturile respective a anumitor deplasări ale sistemului. Dînd deplasări virtuale compatibile cu legăturile, înseamnă că aceste împiedicări sînt respectate, și deci nu se produc deplasări pe direcțiile forțelor de legătură. Astfel, în rezemări nu se produc deplasări corespunzătoare reacțiunilor, deoarece deplasarea virtuală respectă rezemările, de exemplu articulația *1* în figura 68, *a* sau articulațiile *1* și *5* în figura 68, *c*. Punctele unde sistemul are legături interioare își schimbă

[1] Pentru simplificarea scrierii și adoptarea unor notații unitare, în cele ce urmează deplasările virtuale vor fi notate în modul următor: deplasarea liniară cu δ (în loc de ds) și rotirea cu θ (în loc de $d\theta$). Să se rețină că acestea reprezintă deplasări infinit mici.

poziția în timpul deplasării virtuale, de exemplu articulațiile *2* și *4* din figura 68, *b*. Forțele de legătură respective sînt însă două cîte două egale și de sens contrar, în timp ce deplasarea lor este una și aceeași, astfel că lucrul mecanic virtual corespunzător fiecărei *perechi* de forțe de legătură este nul. Rezultă că *în ecuația generală a echilibrului, scrisă prin deplasări virtuale, trebuie introdus numai lucrul mecanic virtual dat de forțele active*[1].

(2) Condiția generală (5.6) servește la scrierea ecuațiilor de echilibru la un sistem oarecare. Pentru fiecare deplasare virtuală dată se poate scrie o asemenea ecuație. Numărul de ecuații *diferite* ce se pot obține pentru un anumit sistem este egal cu numărul deplasărilor virtuale *distincte* care pot fi date, deci cu numărul gradelor de libertate ale sistemului.

(3) Ecuațiile de echilibru scrise prin deplasări virtuale prezintă avantajul esențial *de a nu conține forțele de legătură*. Ele stabilesc *relații directe* între diferitele forțe active care acționează asupra sistemului. Prin aceasta, caracterul lor diferă de cel al ecuațiilor folosite anterior (ecuații de proiecții și de momente), conducînd la obținerea unui instrument de lucru deosebit de suplu și mai adecvat interpretării de ansamblu a fenomenelor studiate.

(4) Deplasările virtuale examinate aici au caracter *cinematic*, deoarece sînt impuse unor sisteme cu grade de libertate cinematică (mecanisme). Porțiunile componente ale sistemului sînt considerate corpuri rigide, astfel că în ecuația generală (5.6) intră numai forțele exterioare active. Utilizarea ecuației servește la exprimarea condiției de echilibru static a sistemului.

Domeniul de aplicare al principiului deplasărilor virtuale este însă mai larg și se poate extinde la sisteme care nu conțin grade de libertate (sisteme static determinate sau static nedeterminate). În acest caz, condiția de compatibilitate cu legăturile conduce la deplasări virtuale cu *caracter elastic*, reprezentate de anumite poziții deformate. Aici va trebui considerată starea de echilibru dintre forțele exterioare și forțele interioare, acestea figurînd împreună în ecuația de echilibru. Sub această formă, utilizarea deplasărilor virtuale permite să se exprime condiția generală a echilibrului în poziția deformată, cu cele două laturi ale sale: condiția de echilibru static și condiția de compatibilitate, așa cum se arată în capitolul VIII.

2. Aplicarea condiției de echilibru static

a. **Specificul ecuațiilor de echilibru.** La un sistem cu grade de libertate, echilibrul nu este posibil pentru sarcini oarecare, ci numai pentru anumite situații particulare de încărcare. Înseamnă că între sarcinile aplicate trebuie să existe anumite relații de condiție. Acestea se pot obține exprimînd echilibrul cu ajutorul deplasărilor virtuale distincte, compatibile cu legăturile, care pot fi date sistemului; pentru fiecare dintre acestea se scrie că lucrul mecanic virtual trebuie să fie nul. Numărul condițiilor necesare va fi astfel egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului. La sisteme cu un singur grad de libertate, sarcinile aplicate trebuie să satisfacă o singură relație de condiție.

[1] De remarcat că această concluzie este valabilă considerînd că în legăturile sistemului *nu sînt frecări*, situație general admisă în calculul structurilor.

Exemplificările ce urmează urmăresc să scoată în evidență specificul ecuațiilor de echilibru scrise cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Grinda din figura 70, *a* are un grad de libertate datorit articulației din *3*. Deplasarea virtuală corespunzătoare se obține admițînd o rotire infinit mică dată porțiunii *1-2-3* în jurul reazemului *2*; respectarea legăturilor din *3* și *4* obligă porțiunea *3-4-5* să se rotească în jurul reazemului *4*. Punctele de apli-

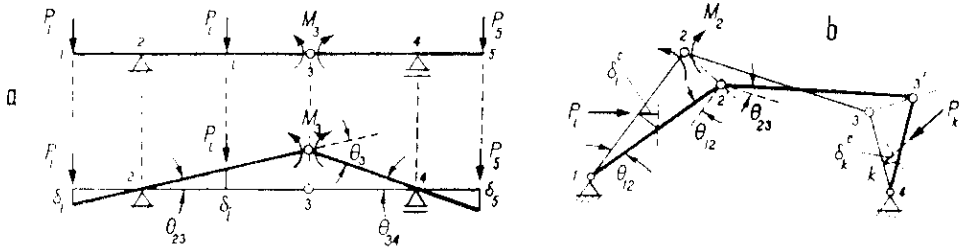


Fig. 70

cație a sarcinilor P_1, P_i și P_5 parcurg deplasările corespunzătoare δ_1, δ_i și δ_5. Lucrul mecanic virtual dat de *perechea* de momente M_3 este $M_3(\theta_{23}+\theta_{34})=M_3\theta_3$, unde θ_3 reprezintă rotirea *relativă* care se produce în articulația *3* între porțiunile de grindă *1-3* și *3-5*. *Rotirea relativă* θ_3 *este deplasarea corespunzătoare perechii de momente* M_3. Ecuația de echilibru este

$$P_1\delta_1 - P_i\delta_i + P_5\delta_5 + M_3\theta_3 = 0, \text{ deci } M_3 = P_i\delta_i/\theta_3 - P_1\delta_1/\theta_3 - P_5\delta_5/\theta_3,$$

rezultînd mărimea perechii de momente M_3 care asigură echilibrul sistemului încărcat cu sarcinile P_1, P_i și P_5. Rapoartele de forma δ_i/θ_3 reprezintă mărimi finite, care se pot determina prin corelații geometrice pe schema deplasării virtuale; aceasta depinde de un singur parametru, de exemplu rotirea infinit mică θ_3.

Sistemul din figura 70, *b* are un singur grad de libertate. Deplasarea virtuală compatibilă rezultă admițînd dată o rotire infinit mică θ_{12} barei *1-2*, care duce sistemul în poziția vecină *1-2'-3'-4*. Deplasările corespunzătoare sarcinilor P_i și P_k sînt δ_i^c și δ_k^c, care reprezintă proiecțiile deplasărilor efective ale secțiunilor i și k pe suporturile acestor sarcini. Deplasarea corespunzătoare perechii de momente M_2 este rotirea relativă $\theta_2=\theta_{12}+\theta_{23}$ care apare în articulația *2* între barele *1-2* și *2-3*. Condiția de echilibru este

$$P_i\delta_i^c - P_k\delta_k^c - M_2\theta_2 = 0, \text{ deci } M_2 = P_i\,\delta_i^c/\theta_2 - P_k\,\delta_k^c/\theta_2,$$

găsind mărimea perechii de momente M_2 care asigură echilibrul sistemului. Deplasarea virtuală fiind caracterizată de mărimea arbitrar aleasă a rotirii θ_{12}, toate celelalte elemente care intervin în ecuație pot fi exprimate în funcție de această rotire, pe bază de corelații geometrice.

Examinarea făcută arată că scrierea ecuațiilor de echilibru este simplă, deoarece nu intervin decît forțele active care acționează sistemul. La sisteme cu un singur grad de libertate, una dintre forțele active trebuie considerată

ca necunoscută și mărimea acesteia se obține sub forma unei relații liniare în funcție de celelalte sarcini, coeficienții fiind rapoarte de deplasări ce provin din schema deplasării virtuale date. Calculul acestor coeficienți necesită determinarea corelației dintre diferitele deplasări corespunzătoare forțelor active aplicate, care rezultă din studiul configurației deplasării virtuale. Problema capătă astfel *aspect geometric*, care este specific aplicării principiului deplasărilor virtuale la exprimarea condiției de echilibru static.

Pentru sisteme plane de formă oarecare, configurațiile deplasărilor virtuale se studiază cu ajutorul *centrelor instantanee* și al *diagramelor de deplasări*, cum se arată în paragrafele următoare.

b. **Aplicare la structuri static determinate.** Structurile static determinate conțin numărul de legături necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan; în consecință, nu sînt posibile deplasări virtuale compatibile cu legăturile. Se poate totuși ocoli această situație, creînd posibilitatea de a utiliza deplasările virtuale. Fie o anumită necunoscută (reacțiune sau efort) ce trebuie determinată. Se consideră legătura respectivă suprimată și efectul său înlocuit prin forța de legătură. Prin aceasta, situația de echilibru a sistemului nu este afectată, dar în alcătuirea sistemului s-au produs modificări esențiale, anume: (1) sistemul a căpătat un grad de libertate, astfel că i se poate da o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile rămase; (2) necunoscuta a devenit acțiune exterioară, intrînd în categoria forțelor active care asigură echilibrul sistemului.

Scriind pentru acest sistem transformat condiția de echilibru prin deplasări virtuale, se obține *o ecuație cu o singură necunoscută*, din care se determină forța de legătură considerată. Aplicarea deplasărilor virtuale la studiul structurilor static determinate prezintă aspectul caracteristic de a permite stabi-

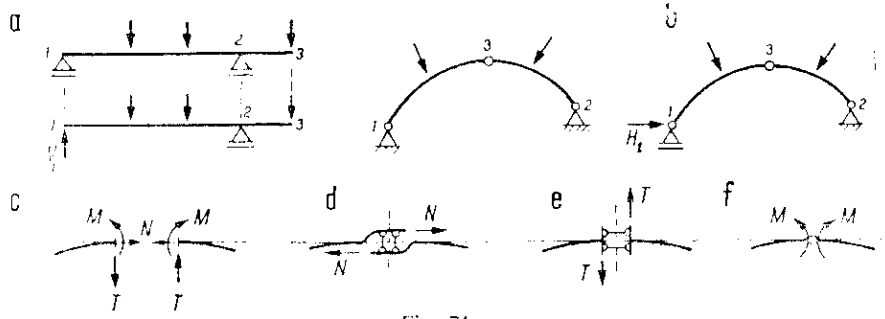


Fig. 71

lirea unor corelații directe între sarcinile aplicate și o necunoscută oarecare. Corelația rezultă din schema deplasării virtuale date, care caracterizează gradul de libertate introdus prin suprimarea legăturii corespunzătoare necunoscutei.

Pentru o anumită reacțiune dintr-o rezemare, sistemul transformat se obține considerînd suprimată numai legătura respectivă. Astfel, la grinda din figura 71, *a*, reacțiunea V_1 este pusă în evidență prin suprimarea reazemului simplu din extremitatea *1*. Pentru componenta orizontală H_1 a reacțiunii din extre-

mitatea *I* a arcului cu trei articulații (fig. 71, *b*), se suprimă numai împiedicarea de deplasare pe orizontală din acea rezemare; rămîne deci un reazem simplu de reacțiune verticală, iar H_1 se introduce ca acțiune exterioară.

O situație asemănătoare apare la determinarea unui anumit efort dintr-o secțiune dată. Admițînd secționată o bară a unei structuri plane, pe cele două fețe ale secțiunii trebuie aplicate eforturile *N*, *T* și *M* (fig. 71, *c*), care înlocuiesc cele trei legături ce asigură continuitatea barei. Se introduc astfel *trei* grade de libertate, care conduc la trei posibilități distincte de deplasare *relativă* între fețele secțiunii: deplasări relative după tangenta și normala la axă, precum și rotire relativă.

Obținerea unui singur grad de libertate implică considerarea unei *secționări făcute incomplet*, anume suprimarea unei singure legături, celelalte două rămînînd neatinse; prin aceasta, un singur efort este pus în evidență sub formă de acțiune exterioară. Astfel:

(*a*) Pentru *forța axială* *N* se suprimă împiedicarea de deplasare relativă după *tangenta* la axa barei, în timp ce rotirea relativă între porțiuni, precum și deplasarea relativă după normala la axă, nu sînt posibile. Schematic se poate folosi reprezentarea din figura 71, *d*, unde cele două legături pendulare paralele, normale pe axă, permit numai deplasarea pe direcția perechii de forțe *N*.

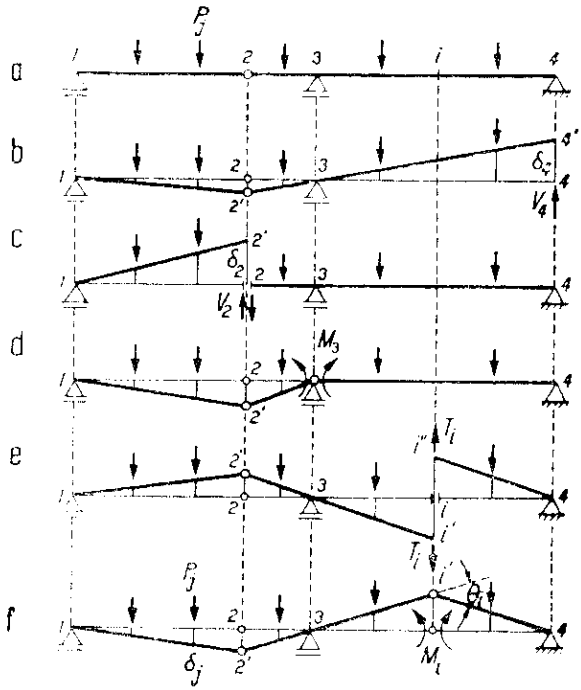


Fig. 72

(*b*) Pentru *forța tăietoare* *T* se suprimă împiedicarea de deplasare relativă după *normala* la axa barei, în timp ce atît rotirea relativă între porțiuni, cît și deplasarea relativă după tangenta la axă nu sînt posibile. Această secționare incompletă se poate reprezenta schematic ca în figura 71, *e*.

(*c*) Pentru *momentul încovoietor* *M* se suprimă împiedicarea de rotire relativă între cele două porțiuni, centrele de greutate ale fețelor secțiunii rămînînd în contact în timpul deplasării. Aceasta revine la a considera introdusă *o articulație* în secțiune (fig. 71, *f*).

Admiterea unei secționări incomplete duce la un sistem transformat cu un singur grad de libertate, astfel că *necunoscuta respectivă poate fi determinată dintr-o ecuație cu o singură necunoscută*. Exemple sînt date în figura 72 pentru

o grindă cu console și articulații. Astfel, reacțiunea V_4 se obține considerînd sistemul transformat din figura 72, *b*, unde reazemul simplu *4* a fost înlocuit prin efectul său V_4. Acestui sistem i se poate da deplasarea virtuală indicată pe figură, care rezultă deplasînd pe verticală extremitatea *4* cu cantitatea infinit mică $\overline{44'}=\delta_4$ și respectînd celelalte legături. Condiția de echilibru se scrie

$$V_4\delta_4+\sum P_j\delta_j=0, \quad \text{deci} \quad V_4=-\sum P_j\delta_j/\delta_4,$$

unde cu δ_j s-a notat deplasarea corespunzătoare sarcinii curente P_j (admisă pozitivă în sensul de acțiune al forței P_j).

Asemănător, în figura 72, *c* se vede deplasarea virtuală care servește la determinarea acțiunii reciproce V_2 din articulația *2*. Desfăcînd această articulație și introducînd perechea de forțe V_2, se constată că porțiunea *2-3-4* nu se poate deplasa, fiind static determinată. Deplasare poate avea numai porțiunea *1-2*, ca în figură; deplasarea corespunzătoare perechii de forțe V_2 este în acest caz $\overline{22'}=\delta_2$. Pentru momentul încovoietor din secțiunea de pe reazemul *3*, sistemul transformat este arătat în figura 72, *d*: se suprimă continuitatea prin introducerea unei articulații și se aplică perechea de momente M_3. Porțiunea *3-4* nu se poate deplasa, astfel că deplasarea virtuală este posibilă numai prin rotirea porțiunii *2-3* în jurul reazemului *3*; este antrenată și porțiunea *1-2*, ajungîndu-se la configurația *1-2'-3* care respectă toate legăturile rămase.

În figurile 72, *e* și *f* se văd deplasările virtuale ce trebuie folosite pentru determinarea eforturilor T_i și M_i din secțiunea *i* a grinzii. În primul caz s-a făcut o secționare incompletă de tipul celei din figura 71, *e*, care permite numai deplasarea relativă după normala la axă a celor două fețe ale secțiunii, în timp ce rotirea relativă trebuie să fie nulă. Înseamnă că porțiunile *2-3-i'* și *i''-4* trebuie să rămînă paralele; deplasarea corespunzătoare perechii de forțe *T* este deplasarea relativă $\overline{i'i''}=\delta_i$. În al doilea caz se introduce o articulație în secțiunea *i* și se produce acolo o rotire relativă θ_i între fețele secțiunii. Aceasta este posibil numai prin rotirea porțiunilor *2-3-i* și *i-4* în jurul reazemelor *3* și *4*, ajungînd la configurația *1-2'-3-i'-4* din figură. Rotirea relativă θ_i este deplasarea corespunzătoare perechii de momente M_i, astfel că din ecuația de echilibru se obține $M_i=-\sum P_j\delta_j/\theta_i$.

B. CENTRE INSTANTANEE, DIAGRAME DE DEPLASĂRI

1. Centre instantanee

La aplicarea condiției de echilibru static prin deplasări virtuale se utilizează obișnuit sisteme cu un singur grad de libertate, care rezultă suprimînd o anumită legătură și punînd în evidență forța de legătură respectivă ca necunoscută. Deplasarea unei porțiuni determină deplasarea tuturor celorlalte, deci configurația deplasării virtuale depinde de un singur parametru. Apare

astfel necesar să găsim modalitatea de a determina corelațiile dintre deplasările diferitelor porțiuni ale sistemului.

Din Mecanica teoretică se știe că deplasarea infinit mică a unei porțiuni rigide, în plan, poate fi totdeauna privită ca o rotire în jurul unui anumit punct din plan, numit *centru instantaneu*. Înseamnă că *direcția* deplasării unui anumit punct de pe o porțiune rigidă este normală pe raza care unește punctul

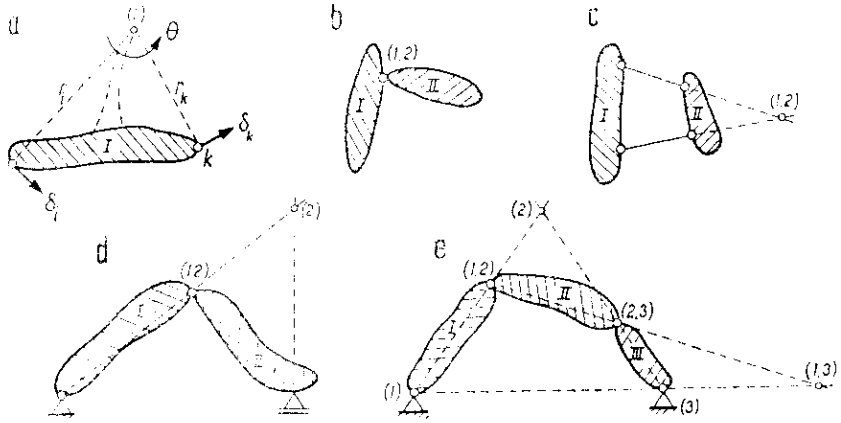


Fig. 73

cu centrul instantaneu, iar *mărimea* deplasării este proporțională cu mărimea razei. Astfel, considerînd o porțiune rigidă *I* (fig. 73, *a*) și centrul său instantaneu cu poziția (*1*), deplasările δ_i, δ_k, ... din diferite puncte *i*, *k*, ... sînt normale pe razele r_i, r_k, ... și au mărimile $\delta_i = r_i\theta$, $\delta_k = r_k\theta$, ..., unde θ este rotirea infinit mică, de mărime arbitrară, dată porțiunii rigide în jurul centrului instantaneu.

Poziția centrului instantaneu poate fi găsită dacă se cunosc *direcțiile* deplasărilor pentru două puncte ale porțiunii rigide: această poziție este la *intersecția normalelor* duse pe direcțiile deplasărilor în punctele respective. Deoarece deplasările virtuale sînt infinit mici, centrul instantaneu are *poziție fixă* în plan. Dacă ne-am închipui că centrul instantaneu este legat de porțiunea rigidă printr-un braț fictiv, ca în figură, acest centru poate fi privit drept *punct de articulare* a porțiunii respective pe baza *fixă* de referință (planul sistemului).

Considerînd acum două porțiuni rigide din sistem, deplasarea lor *relativă* se produce în jurul unui *centru instantaneu de rotire relativă*. Determinarea acestui centru se face considerînd că una dintre porțiuni ar fi fixă și studiind deplasarea celeilalte porțiuni în raport cu aceasta. Centrul relativ este deci centrul instantaneu de rotire al unei porțiuni, considerînd cealaltă porțiune ca bază de referință. Cînd porțiunile sînt articulate direct (fig. 73, *b*), centrul de rotire relativă este reprezentat chiar de punctul de articulare. Dacă porțiunile considerate sînt legate prin intermediul altor corpuri (fig. 73, *c*), centrul relativ joacă rol de *punct de articulare indirectă* între porțiuni; el poate fi deci privit ca un *punct comun* al ambelor porțiuni și — pentru fiecare dintre aces-

lea — are aceeași deplasare în raport cu baza fixă de referință, stabilind astfel corelația dintre deplasările porțiunilor respective.

Este ușor de văzut că de fapt ambele categorii de centre instantanee sînt centre de rotire relativă. Centrele instantanee ale porțiunilor rigide se referă la deplasarea acestor porțiuni în raport cu baza fixă de referință, iar centrele instantanee relative ale perechilor de porțiuni se referă la deplasarea uneia dintre porțiuni în raport cu cealaltă. Dacă baza fixă de referință este asimilată cu un corp rigid, care face parte din sistem, atunci toate centrele instantanee apar ca centre relative. Pentru aplicarea practică este totuși indicat să se mențină distincția între cele două categorii de centre instantanee, care se va dovedi utilă la trasarea diagramelor de deplasări. Se va ține deci seama că:

— fiecărei porțiuni îi corespunde un centru instantaneu;

— fiecărei perechi de porțiuni îi corespunde un centru de rotire relativă.

La sisteme cu puține porțiuni rigide, determinarea centrelor instantanee se poate face direct. Astfel, în figura 73, *d* este arătat un sistem alcătuit din două porțiuni rigide, căruia i se dă o deplasare virtuală caracterizată, de exemplu, prin rotirea porțiunii *I* în jurul reazemului articulat; centrul instantaneu (*1*) al porțiunii *I* este chiar în această articulație. Articulația centrală reprezintă centrul de rotire relativă (*1, 2*) al porțiunilor *I* și *II*; această articulație se deplasează normal pe dreapta (*1*)—(*1, 2*). Pentru corpul *II* se cunosc direcțiile deplasărilor din două puncte, anume direcția deplasării în articulația centrală, cît și direcția deplasării din reazemul simplu (orizontală pentru cazul din figură). Ducînd în aceste puncte normale pe direcțiile deplasărilor, intersecția lor determină poziția (*2*) a centrului instantaneu pentru porțiunea *II*. Centrele (*1*), (*1, 2*) și (*2*) sînt astfel coliniare.

În figura 73, *e* este arătat un *lanț cinematic* alcătuit din trei porțiuni rigide, articulate între ele, precum și de baza de sprijinire. Rezultă astfel de la început pozițiile centrelor instantanee (*1*) și (*3*) ale porțiunilor *I* și *III*, de asemenea centrele relative (*1, 2*) și (*2, 3*). Dînd o deplasare virtuală caracterizată prin rotirea corpului *I* în jurul reazemului articulat (*1*), articulația (*1, 2*) se deplasează normal pe raza (*1*)—(*1, 2*), în timp ce articulația (*2, 3*) se deplasează normal pe raza (*2, 3*)—(*3*); imaginea deplasării virtuale este similară cu cea din figura 70, *b*. Se cunosc astfel direcțiile deplasărilor pentru cele două extremități ale corpului *II*; ducînd în aceste puncte normale pe direcțiile respective, se determină poziția (*2*) a centrului instantaneu. Rezultă coliniaritatea centrelor (*1*), (*1, 2*), (*2*), respectiv a centrelor (*2*), (*2, 3*), (*3*).

Fie acum deplasarea *relativă* dintre porțiunile *I* și *III*. Pentru un observator așezat pe porțiunea *I*, porțiunea *II* se rotește în jurul articulației (*1, 2*), în timp ce baza de referință reprezentată prin linia articulațiilor (*1*) și (*3*) — asimilabilă unui corp rigid — se rotește în jurul articulației (*1*). Deplasările articulațiilor (*2, 3*) și (*3*) apar în această situație normale pe dreptele (*1, 2*)-(*2, 3*), respectiv (*1*)-(*3*). Rezultă că punctul (*1, 3*), situat la intersecția acestor drepte, reprezintă centrul instantaneu al porțiunii *III* în deplasarea sa față de porțiunea *I*; acest punct este deci centrul instantaneu de rotire relativă a celor două porțiuni. Construcția făcută arată că centrele (*1*), (*3*), (*1, 3*), respectiv (*1, 2*), (*2, 3*), (*1, 3*), sînt coliniare.

Cazul lanțului cinematic din figura 73, *e* este tipic pentru studiul deplasării virtuale la un sistem cu un singur grad de libertate și va fi regăsit la cercetarea sistemelor mai complicate.

2. Determinarea sistematizată a centrelor instantanee

Cînd sistemul cu un singur grad de libertate este alcătuit din mai multe porțiuni rigide, determinarea directă a centrelor instantanee devine dificilă. Se utilizează în acest caz proprietățile de coliniaritate ale centrelor instantanee, care permit sistematizarea determinării sub o formă deosebit de simplă. Din Mecanica teoretică se cunoaște *teorema coliniarității: pentru orice deplasare relativă infinit mică în plan a trei porțiuni rigide oarecare, centrele lor instantanee de rotire relativă sînt coliniare.*

Justificarea teoremei apare de îndată ce se examinează condițiile în care deplasarea este posibilă. Fie porțiunile rigide I și II, precum și baza de referință, la un sistem oarecare avînd un singur grad de libertate (fig. 74, *a*). Să

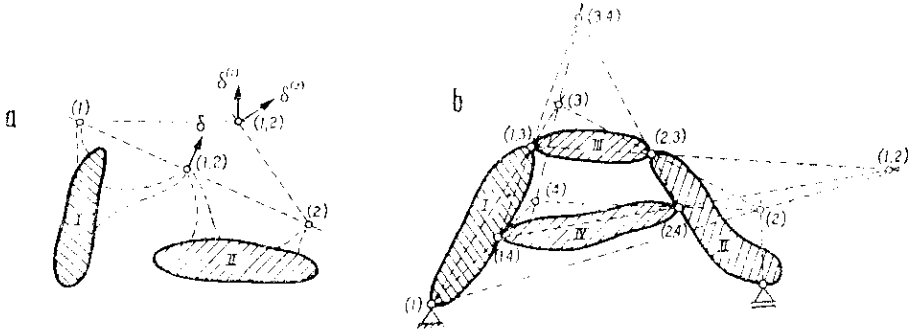


Fig. 74

admitem că se cunosc pozițiile (*1*) și (*2*) ale centrelor instantanee de rotire față de baza de referință a porțiunilor considerate și să ne ocupăm de poziția centrului lor de rotire relativă (*1,2*). Dacă acest centru ar ocupa în plan o poziție situată *în afara* dreptei (*1*)-(*2*), *deplasarea devine imposibilă*. Într-adevăr, centrul (*1, 2*) reprezintă un *punct comun* ambelor corpuri, astfel că deplasarea sa trebuie să respecte condiția de a fi normală atît pe raza ce duce la centrul (*1*), cît și pe raza care duce la centrul (*2*). Cum aceste raze au direcții diferite, ar rezulta în (*1, 2*) două deplasări distincte $\delta^{(1)}$ și $\delta^{(2)}$, ceea ce nu este posibil pentru același punct. Se impune deci ca centrul (*1, 2*) să se găsească pe dreapta (*1*)-(*2*); în acest caz, cele două raze rezultă în prelungire, și deci aceeași deplasare δ îndeplinește condiția de a fi normală pe ambele raze.

Concluzia este aceeași fie că se consideră două porțiuni rigide împreună cu baza de sprijinire, sau trei porțiuni rigide ale sistemului. Făcîndu-se distincție

între centrele instantanee ale porțiunilor rigide și centrele de rotire relativă ale perechilor de porțiuni, teorema coliniarității duce la următoarele concluzii:

— pentru două porțiuni rigide ale sistemului, centrele instantanee ale acestora și centrul lor de rotire relativă sînt coliniare;

— pentru trei porțiuni rigide ale sistemului, considerate două cîte două, centrele de rotire relativă respective sînt coliniare.

Aceste proprietăți de coliniaritate au fost remarcate și în legătură cu figura 73, *d* și *e*.

Folosind teorema coliniarității, determinarea centrelor instantanee se face cu ușurință, procedeul devenind aproape mecanic. Acesta revine la repetarea unei singure operații: găsirea a două drepte pe care trebuie să se afle centrul căutat, poziția rezultînd în punctul de intersecție a dreptelor. Pentru începerea construcției este necesar să fie cunoscute inițial unele centre, spre a putea duce primele perechi de drepte; centre cu poziție evidentă apar totdeauna din alcătuirea sistemului și din rezemările acestuia.

În vederea sistematizării se pot stabili anumite relații simbolice generale, din care rezultă centrele ce trebuie cunoscute spre a putea determina un anumit centru instantaneu:

(a) Pentru centrul instantaneu al unei porțiuni rigide *II*, relația simbolică de determinare este

$$(2)=(j)\cdot(j,\ 2)+(k)\cdot(k,\ 2), \tag{5.7}$$

care se citește astfel: centrul instantaneu (2) se află la intersecția dreptei care unește centrele (j) și $(j,\ 2)$ cu dreapta care unește centrele (k) și $(k,\ 2)$. Înseamnă că pentru aflarea centrului instantaneu al porțiunii *II* sînt necesare centrele instantanee ale altor două porțiuni *J* și *K*, cît și centrele de rotire relativă ale acestora față de porțiunea *II*. Este cazul întîlnit în figura 73, *e* la determinarea centrului (2).

(b) Pentru centrul instantaneu de rotire relativă a două porțiuni rigide *I* și *III*, relația simbolică de determinare este

$$(1,\ 3)=(1,\ j)\cdot(j,\ 3)+(1,\ k)\cdot(k,\ 3), \tag{5.8}$$

care se citește: centrul relativ $(1,\ 3)$ se află la intersecția dreptei care unește centrele relative $(1,\ j)$ și $(j,\ 3)$ cu dreapta care unește centrele relative $(1,\ k)$ și $(k,\ 3)$. Înseamnă că, pentru determinarea centrului relativ a două porțiuni, sînt necesare centrele relative ale acestora în raport cu alte două porțiuni. Termenii din relația simbolică de mai sus pot fi priviți ca reprezentînd eliminarea unui indice comun din indicativele a două centre relative; astfel, linia care unește centrele relative $(1,\ j)$ și $(j,\ 3)$ este dreapta pe care se găsește centrul $(1,\ 3)$. În unele cazuri poate fi utilă și o relație simbolică de forma

$$(1,\ 3)=(1,\ j)\cdot(j,\ 3)+(1)\cdot(3), \tag{5.9}$$

cînd se cunosc atît centrele instantanee ale celor două porțiuni, cît și centrele lor relative față de o altă porțiune *J*.

În aplicarea practică se stabilesc mai întîi acele centre care rezultă în mod evident; se trece apoi la determinarea centrelor relative ale perechilor de porțiuni și după aceasta la aflarea centrelor instantanee necunoscute ale porțiunilor rigide. Cînd sistemul are mai multe porțiuni rigide, construcțiile

geometrice necesare pentru determinarea tuturor centrelor instantanee nu utilizează toate condițiile de coliniaritate disponibile, aceasta deoarece inițial o parte din centre sînt cunoscute. Condițiile de coliniaritate rămase nefolosite servesc pentru *controlul* construcției.

Un exemplu de determinare succesivă a centrelor instantanee este dat în figura 74, *b*. Sistemul este alcătuit din patru porțiuni rigide și are un grad de libertate, deoarece relația generală (1.2) conduce la $d=l+r-3c=4\cdot 2+1\cdot 2+1-4\cdot 3=-1$. Inițial, rezultă în mod evident un număr de cinci centre instantanee, și anume (*1*), (*1, 3*), (*1, 4*), (*2, 3*) și (*2, 4*). În continuare, determinarea se face folosind relațiile simbolice generale.

Centrele relative (*1, 2*) și (*3, 4*) se obțin aplicînd relația simbolică (5.8) în modul următor

$$(1,2)=(1,3)\cdot(2,3)+(1,4)\cdot(2,4) \quad \text{și} \quad (3,4)=(1,3)\cdot(1,4)+(2,3)\cdot(2,4),$$

unde s-au folosit centrele relative cunoscute; construcțiile corespunzătoare se pot urmări pe figură. Devine acum posibilă determinarea centrului instantaneu (*2*), care se găsește la intersecția normalei pe direcția de deplasare din reazemul simplu al porțiunii *II*, cu dreapta definită de centrele (*1*) și (*1, 2*). În continuare se determină centrele instantanee ale porțiunilor *III* și *IV* folosind relația (5.7) sub forma

$$(3)=(1)\cdot(1,3)+(2)\cdot(2,3) \quad \text{și} \quad (4)=(1)\cdot(1,4)+(2)\cdot(2,4).$$

S-au determinat astfel toate centrele instantanee. Verificarea construcției se face cu ajutorul unei drepte de coliniaritate care nu a fost folosită, anume controlînd ca centrele (*3*), (*4*) și (*3, 4*) să rezulte coliniare.

În legătură cu construcția centrelor instantanee sînt de făcut unele observații utile.

(1) Condiția de coliniaritate a trei centre instantanee este analoagă condiției geometrice utilizate anterior în figurile 5 și 52 pentru identificarea structurilor cu formă critică, deși prima a fost stabilită pentru lanțuri cinematice, iar a doua pentru structuri care îndeplinesc condiția $d=l+r-3$ $c=0$. Se pot formula astfel următoarele concluzii:

— Dacă la un sistem cinematic toate centrele instantanee, fără excepție, au poziții în concordanță cu teorema coliniarității, alcătuirea este corectă și sistemul are un grad de libertate. Dacă unele centre nu se găsesc pe dreptele pe care ar trebui să se găsească, înseamnă fie că determinarea centrelor este greșită, fie că sistemul nu este în întregime un mecanism.

— Dacă la o structură care îndeplinește condiția $d=l+r-3$ $c=0$ se pot găsi trei porțiuni pentru care centrele de rotire relativă sînt coliniare, rezultă că structura are formă critică, nefiind asigurată stricta invariabilitate geometrică. Acest fenomen fizic apare pus în evidență de faptul că este posibilă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, deși structura are numărul minim necesar de legături. Exemple sînt date în figura 75, unde configurația particulară a sistemelor respective face să fie îndeplinită condiția de coliniaritate a centrelor (*1,2*), (*1, 3*) și (*2, 3*) în primul caz, respectiv a centrelor (*2*), (*2, 3*) și (*3*) în al doilea caz.

(2) Examinarea relațiilor simbolice (5.7)—(5.9) arată că de fapt fiecare dintre ele oglindește cazul simplu al lanțului cinematic din figura 73, *e*; pentru ultima relație, baza de sprijinire trebuie să fie considerată drept cel de-al patrulea corp. Cît timp alcătuirea sistemului cu un grad de libertate este astfel încît — pe măsura determinării centrelor — să se regăsească mereu cazul acestui lanț

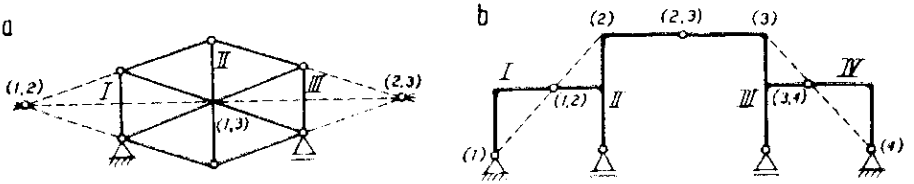


Fig. 75

cinematic, teorema coliniarității permite să se afle poziția tuturor centrelor instantanee. Aceasta este situația curent întîlnită în problemele care vor fi tratate mai departe[1].

3. Diagrame de deplasări

O chestiune de mare utilitate, la aplicarea principiului deplasărilor virtuale în problemele Staticii construcțiilor, este trasarea *diagramei proiecțiilor pe o direcție dată a deplasărilor tuturor punctelor unui sistem*; axa de referință se ia normală pe direcția respectivă. Asemenea diagrame au anumite proprietăți geometrice, pe baza cărora pot fi construite în mod sistematizat. O dată trasate, diagramele permit să se stabilească direct corelații între rotirile porțiunilor rigide ale sistemului, precum și deplasările din diferite puncte; se simplifică astfel substanțial studiul configurației deplasărilor virtuale.

Diagramele de deplasări reprezintă un instrument deosebit de util la scrierea ecuațiilor de echilibru prin deplasări virtuale; cu ajutorul lor se pot calcula cu ușurință rapoartele de deplasări care apar în relații de forma celor stabilite în legătură cu figura 70, *b*. Totodată, diagramele de deplasări stau la baza construirii liniilor de influență, cum se arată în capitalul următor.

a. **Proprietățile diagramelor de deplasări.** Fie două porțiuni rigide ale unui sistem cu un singur grad de libertate (fig. 76), pentru care s-au determinat centrele instantanee (*1*) și (*2*), precum și centrul de rotire relativă (*1, 2*). Deplasarea δ_i dintr-un punct *i* al porțiunii *I* este normală pe raza r_i și are mărimea $\delta_i = r_i \theta_1$, unde θ_1 reprezintă rotirea infinit mică a acestei porțiuni în jurul centrului instantaneu (*1*). Proiecția deplasării pe direcția dată se poate scrie sub forma

$$\delta_i^{\Delta} = \delta_i \sin \alpha_i = r_i \theta_1 \sin \alpha_i = x_{i1} \theta_1, \tag{5.10}$$

unde x_{i1} este abscisa punctului *i* față de ordonata centrului instantaneu (*1*).

[1] Se pot imagina și sisteme la care, pentru unele centre instantanee, să nu mai apară lanțul cinematic format din patru porțiuni rigide. În asemenea cazuri, teorema coliniarității nu mai dă rezultate și trebuie recurs la alte căi de determinare. Față de interesul practic redus al acestora, nu este cazul să fie examinate aici.

Rotirea θ_1 fiind aceeași pentru toate punctele porțiunii *I*, proiecțiile deplasărilor acestor puncte pe direcția dată sînt proporționale cu abscisele punctelor față de centrul instantaneu. Rezultă că *diagrama proiecțiilor este reprezentată de o variație liniară*, anume dreapta *a'-b'*. Pentru un punct *j* al porțiunii, situat pe ordonata centrului instantaneu (*1*), deplasarea δ_j este normală pe direcția dată, și deci proiecția sa pe această direcție este nulă, așa cum arată

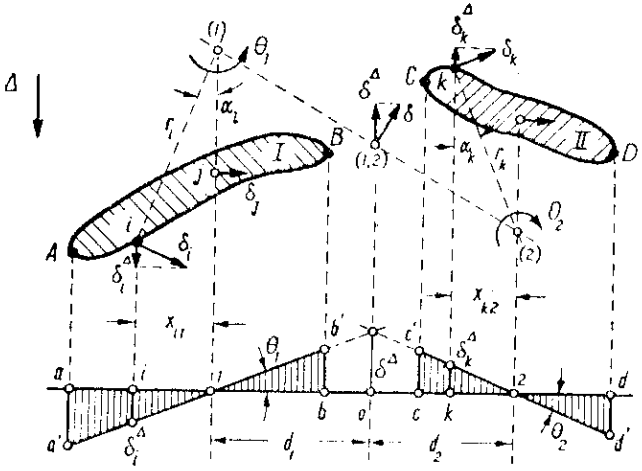


Fig. 76

și relația (5.10). Înseamnă că *variația liniară din diagramă, corespunzătoare unei porțiuni rigide, are un punct de anulare pe ordonata centrului instantaneu respectiv*.

În mod asemănător, pentru un punct *k* al porțiunii *II* se ajunge la relația

$$\delta_k^{\Delta} = \delta_k \sin \alpha_k = r_k \theta_2 \sin \alpha_k = x_{k_2} \theta_2, \qquad (5.10')$$

care arată că diagrama deplasărilor este mărginită de o dreaptă *c'-d'*, cu punct de anulare pe ordonata centrului instantaneu (*2*).

Privind acum împreună porțiunile *I* și *II*, s-a arătat că centrul lor de rotire relativă poate fi considerat ca punct de articulare indirectă, deci ca un punct care face parte din ambele porțiuni; deplasarea acestuia este δ, cu proiecția δ^{Δ} pe direcția dată. Rezultă că *cele două drepte, care corespund în diagramă la două porțiuni rigide ale sistemului, au ordonată comună în dreptul centrului de rotire relativă al acestor porțiuni*.

Dacă se ține seama că *ordonatele diagramei deplasărilor sînt infinit mici*, relațiile de forma (5.10) arată că înclinările dreptelor *a'-b'* și *c'-d'* față de axa de referință reprezintă tocmai mărimile θ_1 și θ_2 ale rotirilor porțiunilor *I* și *II* în jurul centrelor instantanee respective. Corelația dintre aceste rotiri poate fi astfel stabilită direct în diagramă, pornind de la ordonata δ^{Δ} comună celor două drepte, anume

$$\delta^{\Delta} = \theta_1 d_1 = \theta_2 d_2, \qquad \text{deci} \qquad \theta_2 = \theta_1 \cdot d_1/d_2, \qquad (5.11)$$

unde segmentele d_1 și d_2 sînt proiecțiile pe axa de referință a distanțelor de la centrul relativ (*1*, *2*) la cele două centre instantanee.

Relații de forma (5.11) se pot scrie pentru oricare pereche de porțiuni rigide ale sistemului. Rotirea uneia dintre porțiuni are mărime arbitrară și reprezintă parametrul deplasării virtuale; mărimile rotirilor celorlalte porțiuni se stabilesc direct în funcție de aceasta din diagrama deplasărilor. Cu ajutorul diagramei se determină cu ușurință și corelațiile dintre proiecțiile pe direcția dată a deplasărilor din diferite puncte ale sistemului. Astfel, pentru un punct k al porțiunii *II*, deplasarea δ_k^{Δ} se poate exprima în funcție de deplasarea δ_i^{Δ} a punctului i de pe porțiunea *I*

$$\delta_k^{\Delta} = x_{k_2}\theta_2 = x_{k_2}\frac{d_1}{d_2}\theta_1 \quad \text{sau} \quad \delta_k^{\Delta} = \delta_i^{\Delta}\frac{x_{k2}}{x_{i1}}\frac{d_1}{d_2}, \tag{5.12}$$

unde s-a ținut seama de relațiile (5.10) și (5.11).

Rezumînd cele arătate mai înainte, rezultă că trasarea diagramei de deplasări după o direcție dată, pentru toate punctele unui sistem cu un singur grad de libertate, căruia i s-a dat o deplasare virtuală, se face pe baza următoarelor proprietăți:

(1) fiecărei porțiuni rigide din sistem îi corespunde în diagramă o variație liniară, care se anulează pe ordonata centrului instantaneu al porțiunii respective;

(2) pentru două porțiuni rigide ale sistemului, dreptele corespunzătoare din diagramă se intersectează pe ordonata centrului de rotire relativă al celor două porțiuni, avînd acolo aceeași ordonată;

(3) înclinările acestor drepte, față de axa de referință a diagramei, reprezintă rotirile porțiunilor rigide în raport cu centrele instantanee respective.

b. **Construirea și utilizarea diagramelor de deplasări.** Proprietățile geometrice enunțate arată că, pentru trasarea unei diagrame de deplasări, este necesar să se determine mai întîi centrele instantanee ale porțiunilor rigide care alcătuiesc sistemul, cît și centrele de rotire relativă ale perechilor de porțiuni consecutive. Ordonatele centrelor instantanee determină pe axa de referință punctele prin care trec dreptele ce corespund porțiunilor rigide, iar corelațiile dintre aceste drepte rezultă din poziția centrelor de rotire relativă.

La construirea unei diagrame de deplasări se utilizează toate centrele instantanee ale porțiunilor rigide, precum și numai o parte din centrele relative, obișnuit acelea care corespund perechilor consecutive de porțiuni. Centrele relative rămase neutilizate pot servi pentru *verificarea construcției diagramei*, anume controlînd dacă perechi neconsecutive de drepte din diagramă se intersectează pe ordonatele centrelor relative care le corespund. Asemenea verificări sînt indicate la sisteme mai complicate, pentru evitarea erorilor.

Un exemplu de trasare a diagramelor de deplasări este dat în figura 77. Sistemul are un grad de libertate, deoarece $d=l+r-3c=4\cdot2+2\cdot2+2\cdot1-5\cdot3=-1$. Inițial sînt cunoscute centrele instantanee (*1*) și (*4*), precum și centrele relative (*1*, *2*), (*2*, *3*), (*3*, *4*) și (*4*, *5*). Centrele instantanee (*2*) și (*5*) rezultă prin intersecția normalelor pe direcțiile de deplasare din reazemele simple ale porțiunilor *II* și *V*, cu dreptele (*1*), (*1*, *2*) și, respectiv, (*4*), (*4*, *5*). Cen-

trul instantaneu (3) este situat la intersecția dreptelor (2)·(2, 3) și (4)·(3, 4). Centrele relative (2, 4) și (3, 5) se obțin prin intersecțiile dreptelor (2)·(4) și (2, 3)·(3, 4), respectiv (3), (5) și (3, 4), (4, 5).

Deplasarea virtuală se dă prin rotirea în sens antiorar a porțiunii *I*, cu cantitatea infinit mică θ_1. Diagrama deplasărilor se începe reprezentînd variația liniară corespunzătoare acestei

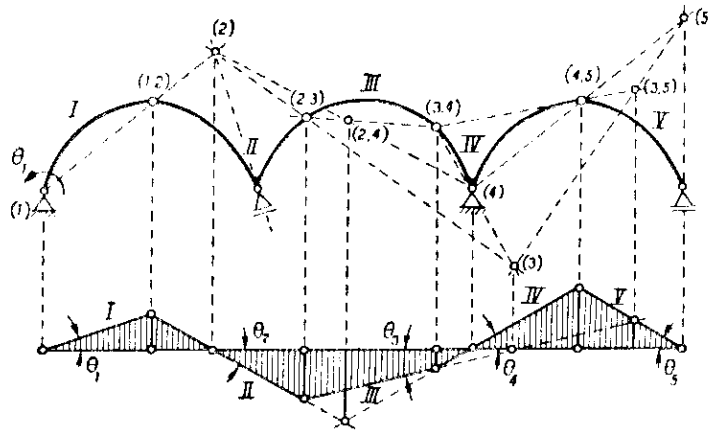


Fig. 77

porțiuni, care se anulează pe ordonata centrului instantaneu (1) și are înclinarea θ_1 față d axa de referință. În dreptul centrului relativ (1, 2), această dreaptă are ordonata comună cu dreapta corespunzătoare porțiunii *II*, care se anulează pe ordonata centrului instantaneu

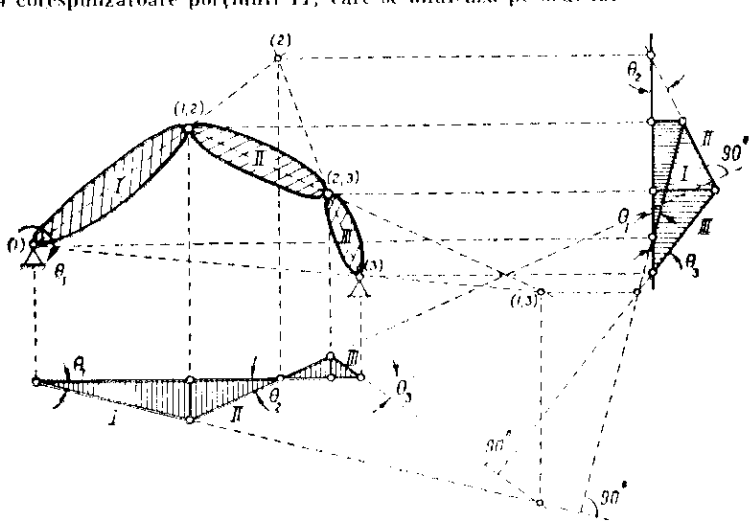


Fig. 78

(2) și continuă pînă în dreptul centrului relativ (2, 3). Aici se intersectează cu dreapta corespunzătoare porțiuni *III*, care se anulează pe ordonata centrului instantaneu (3), dar este valabilă numai pînă în dreptul centrului relativ (3, 4). În mod asemănător se trasează și variațiil

liniare ce corespund porțiunilor *IV* și *V*. Controlul construcției diagramei deplasărilor se face folosind alte centre relative; astfel, dreptele corespunzătoare porțiunilor neconsecutive *II* și *IV*, respectiv *III* și *V*, trebuie să se intersecteze pe ordonatele centrelor relative (*2, 4*) și (*3, 5*).

Diagrame de proiecții ale deplasărilor se pot construi pentru diferite direcții, mai uzitate în aplicațiile practice fiind cele pe verticală și orizontală. Acestea pot rezolva orice situație, deoarece o sarcină de direcție oarecare aplicată pe sistem poate fi descompusă în componente pe verticală și orizontală, deplasările corespunzătoare rezultînd din cele două diagrame.

Privitor la corelația dintre diagramele trasate pentru două direcții diferite, trebuie ținut seama că ambele diagrame interpretează *aceeași* deplasare virtuală. Rezultă că înclinările față de axa de referință a dreptelor ce-și corespund în cele două diagrame sînt egale, deoarece reprezintă aceleași rotiri θ ale porțiunilor rigide. La diagrame de deplasări pe verticală și orizontală, aceste drepte trebuie să apară pe epură *perpendiculare* una pe alta. În figura 78 sînt trasate asemenea diagrame pentru lanțul cinematic din figura 73, *e*.

La prima diagramă, executată asemănător ca în figura 76, controlul construcției se face prin condiția ca dreptele *I* și *III* să se intersecteze pe ordonata centrului relativ (*1, 3*). Trecînd la diagrama deplasărilor pe orizontală, se duce dreapta *I* care se anulează pe orizontala centrului instantaneu (*1*) și este perpendiculară pe dreapta *I* din prima diagramă. În dreptul centrului relativ (*1, 2*), aceasta are ordonată comună cu dreapta *II*, care se anulează pe orizontala centrului instantaneu (*2*) și este valabilă numai în intervalul dintre orizontalele centrelor relative (*1, 2*) și (*2, 3*). În dreptul acestui ultim centru are ordonată comună cu dreapta *III*, care se anulează pe orizontala centrului instantaneu (*3*). Și aici controlul construcției se face prin condiția ca dreptele *I* și *III* să se intersecteze pe orizontala centrului relativ (*1, 3*).

Pentru exemplificarea modului de utilizare a diagramelor de deplasări la aplicarea condiției de echilibru static, fie cadrul static determinat din figura 79, *a*, la care se cere să se determine mărimea împingerii orizontale H_4. Suprimînd împiedicarea de deplasare pe orizontală în acest reazem, care devine astfel reazem simplu, se ajunge la sistemul cu un grad de

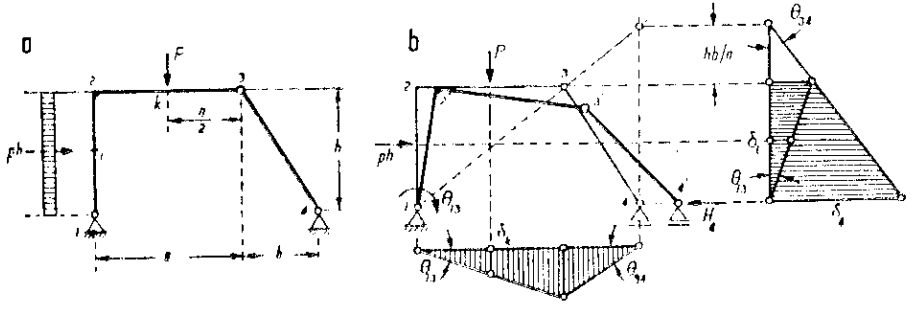


Fig. 79

libertate din figura 79, *b*. Imaginea deplasării virtuale este arătată în figură, iar alăturat s au trasat diagramele de deplasări pe verticală și orizontală. Sistemul transformat este în echilibru sub acțiunea forțelor *ph*, *P* și H_4; condiția de echilibru prin deplasări virtuale are forma

$$ph\cdot\delta_1 + P\delta_k - H_4\delta_4 = 0, \quad \text{deci} \quad H_4 = ph\cdot\delta_1/\delta_4 + P\delta_k/\delta_4.$$

Din diagramele de deplasări rezultă

$$\delta_i = \theta_{13}\, h/2, \quad \delta_k = \theta_{13}\, a/2, \quad \delta_4 = \theta_{34}\, h\,(a+b)/a = \theta_{13}\, h\,(a+b)/b,$$

și deci rapoartele de deplasări sînt

$$\delta_i/\delta_4 = b/2\,(a+b) \quad \text{și} \quad \delta_k/\delta_4 = ab/2\,h\,(a+b),$$

astfel că mărimea reacțiunii orizontale este

$$H_4 = b\,(ph^2 + Pa)/2\,h(a+b).$$

Domeniul de aplicare al diagramelor de deplasări este variat, cuprinzînd toate categoriile de probleme în care trebuie stabilite relații geometrice ce caracterizează anumite configurații de deplasări virtuale, impuse unor sisteme cinematice plane cu un singur grad de libertate. Este mai simplu ca relațiile să fie stabilite pe diagramele de deplasări, decît urmărind direct corelarea ce rezultă din construcția centrelor instantanee.

SARCINI MOBILE. LINII DE INFLUENȚĂ; EFORTURI MAXIME

A. GENERALITĂȚI

1. Ideea de bază a liniilor de influență

În capitolele precedente s-a studiat determinarea reacțiunilor și a eforturilor produse de sarcini cu *poziție fixă*. Acesta este cazul *sarcinilor permanente*, care sînt invariabil legate de structură, atît ca mărime, cît și ca poziție. Pentru *sarcini utile*, situația este alta; acestea pot ocupa diferite poziții pe structură, aspectul lor caracteristic fiind *mobilitatea*. În timpul folosirii unei construcții, sarcinile utile conduc la variate posibilități de încărcare. Astfel, pe planșeul unui depozit sau al unui atelier, produsele sau mașinile pot fi așezate în diferite moduri, ocupînd întreaga suprafață sau numai anumite porțiuni; asemănător, în cazul convoaielor de sarcini (de exemplu la poduri), acestea parcurg structura de la un capăt la celălalt.

Pentru fiecare poziție a sarcinilor, în secțiuni se dezvoltă anumite mărimi de eforturi. La dimensionare este necesar să se cunoască *situația cea mai defavorabilă* pentru fiecare efort. Dintre diferitele poziții pe care sarcinile utile le pot ocupa, trebuie să se determine poziția care conduce la valoarea cea mai dezavantajoasă a efortului căutat.

Determinarea eforturilor pentru sarcini cu poziție variabilă se face cu ajutorul *liniilor de influență*, construite folosindu-se o situație convențională de încărcare, reprezentată printr-o singură sarcină concentrată, egală cu unitatea, care parcurge structura. Utilizarea liniilor de influență are la bază *suprapunerea liniară a efectelor*, și deci este specifică structurilor cu comportare perfect elastică, în domeniul micilor deplasări, cum rezultă din cea de a doua ipoteză simplificatoare a Staticii construcțiilor.

a. **Semnificația liniilor de influență.** Fie o structură oarecare, pe care se deplasează un grup de sarcini. La un moment dat, acestea ocupă poziția din figura 80, *a*, cînd sarcinile P_1, P_2, P_3, ... calcă în secțiunile *a*, *b*, *c*, ... Pentru un anumit efort S_i dintr-o *secțiune dată i*, această poziție a convoiului conduce la o mărime a efortului care se poate scrie sub forma

$$S_i = S_i^{(P_1)} + S_i^{(P_2)} + S_i^{(P_3)} + \dots,$$

unde s-a utilizat independența acțiunii forțelor: efortul total este egal cu suma eforturilor produse de fiecare sarcină în parte, considerată acționînd separat.

Eforturile parțiale $S_i^{(P_1)}$, ... pot fi exprimate în funcție de mărimea sarcinilor, folosindu-se proporționalitatea

$$S_i^{(P_1)} = P_1\eta_{ia}, \quad S_i^{(P_2)} = P_2\eta_{ib}, \quad S_i^{(P_3)} = P_3\eta_{ic}, \ \ldots,$$

unde η_{ia} este mărimea efortului considerat cînd pe structură ar acționa numai o forță $P_1 = 1$ aplicată în secțiunea a, iar η_{ib} — mărimea efortului cînd ar acționa numai o forță $P_2 = 1$ aplicată în secțiunea b etc. Sub acțiunea concomitentă a sarcinilor P_1, P_2, P_3, ..., așezate în poziția din figura 80, a, efortul total care se produce în secțiunea i are mărimea

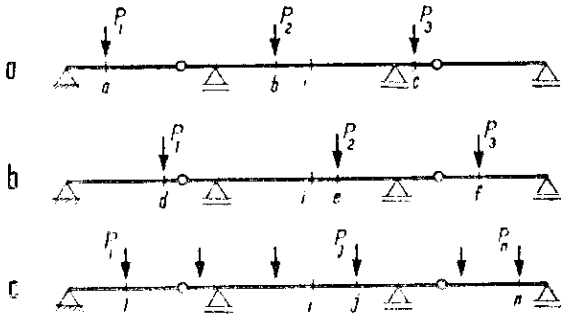


Fig. 80

$$S_i = P_1\eta_{ia} + P_2\eta_{ib} + P_3\eta_{ic} + \ldots$$

Fie acum același grup de sarcini, așezat în altă poziție (fig. 80, b), și anume P_1, P_2, P_3, ... călcînd în secțiunile d, e, f, ...; efortul corespunzător este

$$S_i = P_1\eta_{id} + P_2\eta_{ie} + P_3\eta_{if} + \ldots$$

unde η_{id}, η_{ie}, η_{if}, ... reprezintă mărimile efortului S_i din secțiunea dată i, cînd pe structură ar acționa separat numai cîte o sarcină-unitate în secțiunile d, e, f, ...

Pentru orice poziție a sarcinilor se poate scrie cîte o expresie de acest fel. Dacă notarea secțiunilor se face ca în figura 80, c (sarcinile P_1, ... P_n calcă în secțiunile 1, ... n), expresia efortului are forma

$$S_i = P_1\eta_{i1} + \ldots + P_j\eta_{ij} + \ldots + P_n\eta_{in},$$

unde η_{ij} reprezintă mărimea efortului considerat, cînd pe structura acționează o sarcină-unitate pe direcția și în punctul de aplicație a sarcinii P_j. La aplicarea practică, această expresie se scrie folosindu-se simbolurile uzuale ale eforturilor, de exemplu

$$\begin{aligned} N_i &= P_1\ n_{i1} + \ldots + P_j\ n_{ij} + \ldots + P_n\ n_{in}, \\ T_i &= P_1\ t_{i1} + \ldots + P_j\ t_{ij} + \ldots + P_n\ t_{in}, \\ M_i &= P_1\ m_{i1} + \ldots + P_j\ m_{ij} + \ldots + P_n\ m_{in}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Din expresiile de forma (6.1) rezultă că efortul căutat poate fi exprimat printr-o relație *liniară*, în funcție de sarcinile aplicate, folosindu-se anumiți multiplicatori η_{ij}, care poartă numele de *coeficienți de influență*. *Acești coeficienți reprezintă efecte produse de o sarcină egală cu unitatea, aplicată în diferite secțiuni j ale structurii*. Coeficienții de influență depind deci numai de caracteristicile structurii, astfel că pot fi determinați independent de sarcinile efective ce ar acționa în diferite situații de încărcare.

Privitor la modul de notare, pentru coeficienții de influență se folosesc literele *mici* corespunzătoare simbolurilor eforturilor, cum se vede în relațiile (6.1); aceasta constituie indicația că este vorba de efecte provocate de o cauză egală cu unitatea. În notație se introduc și *doi* indici: primul indice arată secțiunea unde se produce efectul, iar al doilea indice arată locul unde acționează cauza.

Dimensiunea coeficienților de influență rezultă din însăși definirea lor, care are forma

$$S_i = P_j \eta_{ij}, \text{ de unde } \eta_{ij} = S_i/P_j. \tag{6.2}$$

Deoarece P_j are dimensiune de forță, înseamnă că dimensiunea lui η_{ij} este astfel încît numai prin multiplicare cu forța P_j să dea dimensiunea efortului căutat. *Dimensiunea coeficienților de influență se obține împărțind dimensiunea simbolului lor cu dimensiunea cauzei care-i produce*. Înseamnă că pentru coeficienții de influență m_{ij} dimensiunea este de *lungime*, în timp ce coeficienții de influență t_{ij} sau n_{ij} sînt numere fără dimensiune. Aceasta revine la a considera că sarcina-unitate convențională, ale cărei efecte sînt coeficienții de influență, *nu are dimensiune* și deci este egală cu unitatea[1].

Relația generală (6.1) arată că, dacă s-ar cunoaște coeficienții de influență pentru toate secțiunile structurii, efortul căutat din secțiunea *i* poate fi determinat pentru orice grup de sarcini și orice poziție a acestora. Înseamnă că totul se reduce la *studiul efectelor situației convenționale de încărcare*, dată de sarcina-unitate, care trebuie considerată că parcurge succesiv toate secțiunile; pentru fiecare poziție a sarcinii-unitate urmează să se determine mărimea corespunzătoare a coeficientului de influență.

Admițînd că s-au calculat aceste mărimi într-un mod oarecare și că, pornind de la o axă de referință, în dreptul fiecărei secțiuni a structurii s-ar lua în ordonată coeficientul de influență respectiv, prin unirea extremităților ordonatelor se obține o diagramă (fig. 81, *a*), care poartă numele de *linie de influență*. O asemenea diagramă caracterizează structura din punctul de vedere al efortului căutat. Linia de influență a unei anumite cantități (reacțiune, efort într-o secțiune dată) poate fi definită drept *diagrama care reprezintă variația acestei cantități sub acțiunea unei sarcini unitate, de direcție constantă, care parcurge întreaga structură*. Fiecare ordonată a liniei de influență reprezintă *valoarea cantității considerate cînd sarcina-unitate calcă pe structură în secțiunea care corespunde acelei ordonate*.

[1] Pentru claritate, la determinarea liniilor de influență se admite de obicei o sarcină convențională de 1^{kN}, iar efectele acesteia în secțiunea dată se scriu sub forma $M_i = 1^{kN}\, m_{ij}$, $T_i = 1^{kN}\, t_{ij}$, ... care pune în evidență coeficienții de influență și dimensiunile acestora.

De reținut că pentru eforturile dintr-o aceeași secțiune (moment încovoietor, forță tăietoare etc.) trebuie construite linii de influență deosebite; diagramele respective au forme cu totul diferite, ceea ce înseamnă că pozițiile cele mai defavorabile ale sarcinilor nu sînt aceleași. De asemenea, dacă se studiază un anumit efort (de exemplu, momentul încovoietor) în mai multe secțiuni

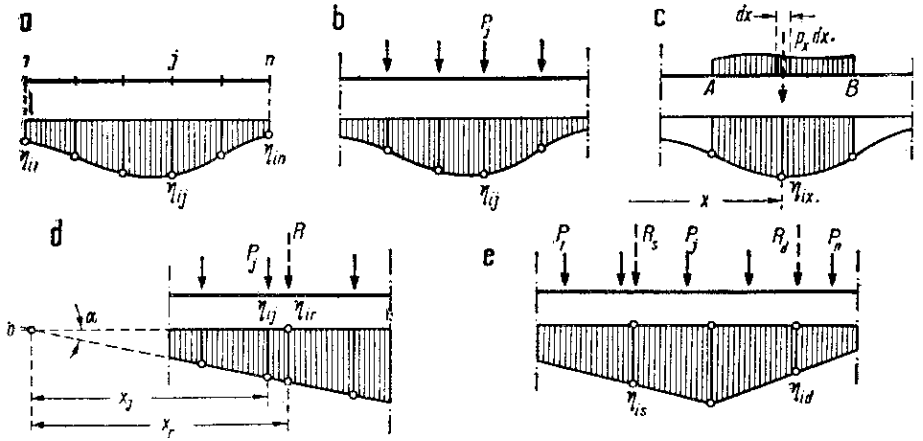


Fig. 81

ale structurii, liniile de influență corespunzătoare se deosebesc una de alta; poziția cea mai defavorabilă a sarcinilor trebuie identificată pentru fiecare secțiune în parte.

b. **Utilizarea liniilor de influență.** Admițînd că s-a construit linia de influență a unei anumite cantități, se poate determina mărimea cantității pentru diferite situații de încărcare ale structurii date. În cazul sarcinilor *concentrate* (fig. 81, *b*), relația generală (6.1) arată că — pentru o anumită poziție a grupului de sarcini — este suficient să se multiplice fiecare sarcină cu ordonata corespunzătoare din linia de influență și să se sumeze algebric rezultatele.

Pentru sarcini *distribuite* (fig. 81, *c*) se poate ajunge la același procedeu dacă sarcina dată se consideră fracționată în sarcini concentrate elementare $p_x dx$; rezultă

$$S_i = \int_A^B p_x \, \eta_{ix} \, dx, \tag{6.3}$$

unde trebuie ținut seama că atît intensitatea p_x a sarcinii distribuite, cît și coeficientul de influență η_{ix} sînt funcții de abscisa curentă x. Pentru o sarcină *uniformă* distribuită, $p = \text{const.}$, și deci

$$S_i = p \int_A^B \eta_{ix} \, dx = p \, \Omega_{AB}, \tag{6.4}$$

care arată că *efortul se obține multiplicînd intensitatea sarcinii cu aria liniei de influență corespunzătoare intervalului încărcat.*

La linii de influență mărginite de *variații liniare*, însumarea produselor dintre sarcinile concentrate și ordonatele respective se poate înlocui cu *produsul dintre rezultanta grupului de sarcini și ordonata din dreptul său*. Acest procedeu este valabil numai pentru grupuri de sarcini situate pe o *aceeași* variație liniară din linia de influență, Este cazul din figura 81, *d*, pentru care se poate scrie

$$S_i = \sum P_j \eta_{ij} = \operatorname{tg} \alpha \sum P_j x_j = \operatorname{tg} \alpha R_r x_r = R \eta_{ir}. \qquad (6.5)$$

În cazul din figura 81, *e*, unde în dreptul sarcinilor date sînt două variații liniare în linia de influență, operația trebuie făcută separat pentru fiecare dintre acestea

$$S_i = \sum P_j \eta_{ij} = R_s \eta_{is} + R_d \eta_{id},$$

folosind deci rezultantele parțiale de la stînga și de la dreapta punctului de frîngere.

Rezultatele concretizate în relațiile (6.1)—(6.5) se referă în principal la aspectul *cantitativ* al utilizării liniilor de influență, anume la calculul mărimii unui anumit efort pentru o poziție dată a sarcinilor pe structură. Această operație trebuie însă efectuată numai după ce s-a determinat în prealabil care sînt pozițiile cele mai defavorabile ale sarcinilor, ce conduc la valori maxime ale efortului respectiv. Intervine astfel în primul rînd aspectul *calitativ* al utilizării liniilor de influență, care este de fapt cel mai important. Configurația liniei de influență dă indicații utile despre efectul diferitelor poziții posibile ale sarcinilor asupra mărimii efortului considerat. Astfel, apare firesc să se așeze sarcinile cele mai grele în zonele unde linia de influență are ordonatele cele mai mari. Cînd linia de influență are zone pozitive și negative, se vede ușor că pentru a afla de exemplu efortul maxim pozitiv, sarcinile utile trebuie așezate pe structură numai în dreptul zonelor de semn pozitiv. Asemenea indicații generale pot fi apoi completate cu stabilirea de criterii mai precise pentru anumite forme de linii de influență.

Liniile de influență au un rol esențial în Statica construcțiilor, constituind un instrument de operare sugestiv și eficient. În partea finală a acestui capitol vom reveni asupra determinării eforturilor maxime la structuri plane static determinate.

2. Construirea liniilor de influență

Sînt două căi principale pentru construirea liniilor de influență: (1) determinare analitică și (2) determinare prin deplasări virtuale, corespunzătoare celor două posibilități generale de exprimare a condiției de echilibru static. În cele ce urmează sînt examinate în paralel aceste două căi pentru un caz simplu (linii de influență la o grindă cu consolă), urmărind scoaterea în evidență a specificului fiecăreia și o orientare asupra domeniului respectiv de aplicare avantajoasă. Se admite, așa cum se consideră obișnuit, că sarcina-unitate care parcurge structura este verticală și dirijată în jos.

a. **Determinare analitică.** Se scriu expresiile coeficientului de influență pentru diferite porțiuni ale structurii, în funcție de poziția sarcinii-unitate,

care se consideră aplicată succesiv pe aceste porțiuni. Admițînd ca variabilă abscisa sarcinii-unitate, expresiile obținute reprezintă ecuațiile liniei de influență pentru porțiunile respective, cu ajutorul cărora se poate face trasarea.

Deoarece la structuri static determinate aceste expresii se obțin din ecuații de echilibru static, care sînt ecuații de gradul 1 în funcție de abscisa sarcinii-unitate, liniile de influență rezultă mărginite de un contur poligonal, fiecărei porțiuni corespunzîndu-i cîte o linie dreaptă.

Pentru grinda cu consolă din figura 82, *a*, încărcată cu o sarcină de 1^{kN} așezată în secțiunea curentă x, reacțiunile V_1 și V_2 au mărimile

$$V_1 = 1^{kN} \cdot x'/l = 1^{kN} \cdot \xi' \qquad \text{și} \qquad V_2 = 1^{kN} \cdot x/l = 1^{kN} \cdot \xi,$$

deci coeficienții de influență în cele două cazuri sînt

$$v_{1x} = \xi' \qquad \text{și} \qquad v_{2x} = \xi, \tag{6.6}$$

unde s-a notat $\xi' = x'/l$ și $\xi = x/l$. Dacă sarcina de 1^{kN} se deplasează pe grindă în deschiderea *1-2*, ξ' și ξ variază liniar între limitele $1 \geqslant \xi' \geqslant 0$ și respectiv $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Cînd sarcina trece pe consolă, ξ' devine negativ și variază între 0 și $-a/l$, iar ξ devine mai mare decît unitatea și variază între 1 și $1 + a/l$. Înseamnă că linia de influență a reacțiunii V_1 este mărginită de o dreaptă, care are ordonata 1 în dreptul reazemului *1*, ordonată nulă în dreptul reazemului *2* și ordonata $-a/l$ la vîrful consolei (fig. 82, *b*). Linia de influență a reacțiunii V_2 este mărginită de asemenea de o dreaptă, care are ordonată nulă în dreptul reazemului *1*, ordonata 1 în dreptul reazemului *2* și ordonata $1 + a/l$ la vîrful consolei (fig. 82, *c*).

Se constată totodată că în orice secțiune a grinzi există relația $v_{1x} + v_{2x} = 1$, care corespunde condiției de echilibru $V_1 + V_2 = 1^{kN}$.

Configurațiile obținute pentru aceste linii de influență permit să se aprecieze direct efectul diferitelor poziții ale sarcinilor asupra reacțiunilor grinzii cu consolă. Astfel, dacă se caută valoarea maximă a reacțiunii V_1, trebuie încărcată numai deschiderea *1-2* (sarcinile aplicate pe consolă micșorează valoarea), în timp ce pentru valoarea maximă a reacțiunii V_2 trebuie încărcată toată grinda, așezînd sarcinile cele mai grele pe consolă.

Trecînd la linia de influență a forței tăietoare dintr-o *anumită* secțiune *i*, se ține seama că expresia acesteia diferă, după cum sarcina de 1^{kN} parcurge porțiunea *1-i* sau porțiunea *i-2-3* a grinzii. Se obține

$$(1-i) \qquad T_i = -V_2 = -1^{kN} \cdot \xi, \qquad (i-3) \qquad T_i = V_1 = 1^{kN} \cdot \xi',$$

deci coeficienții de influență respectivi sînt

$$(1-i) \qquad t_{ix} = -v_{2x} = -\xi, \qquad (i-3) \qquad t_{ix} = v_{1x} = \xi'. \tag{6.7}$$

Înseamnă că linia de influență T_i se poate construi folosind liniile de influență cunoscute $-V_2$ și V_1, cum se arată în figura 82, *d*; prima este valabilă pe intervalul *1-i*, iar a doua — pe intervalul *i-3*. Se obține astfel o linie de influență mărginită de două drepte paralele; în dreptul secțiunii *i* intervine *un salt egal cu unitatea*.

Linia de influență T_i are trei zone diferite, anume două zone negative pe porțiunile *1-i* și *2-3*, precum și o zonă pozitivă pe porțiunea *i-2*. Înseamnă că pentru a obține valorile maxime (pozitivă sau negativă) a forței tăietoare din secțiunea *i*, nu trebuie încărcată concomitent întreaga grindă, ci numai zonele care au semnul respectiv.

Considerînd o altă secțiune *j*, expresiile coeficientului de influență l_{jx} sînt similare cu expresiile (6.7). Linia de influență T_j este mărginită de aceleași

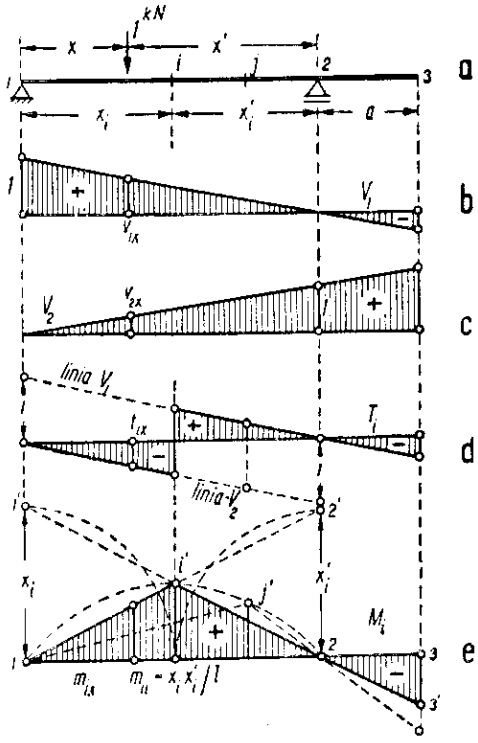


Fig. 82

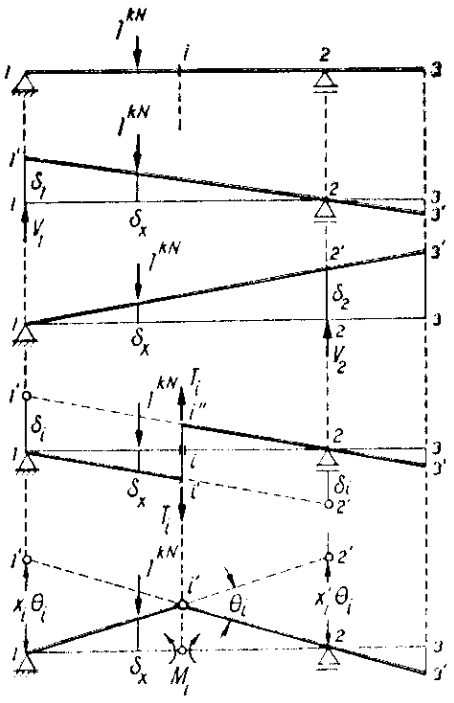


Fig. 83

drepte paralele, distanțate între ele pe verticală cu unitatea; numai poziția saltului se schimbă, acesta intervenind acum în secțiunea *j* (punctat pe figură).

Pentru linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea *i* trebuie considerate aceleași două intervale ale grinzii

$$(1-i) \qquad M_i = V_2 x_i' = 1^{kN} \cdot x_i' \xi, \quad (i-3) \qquad M_i = V_1 x_i = 1^{kN} \cdot x_i \xi',$$

deci coeficienții de influență respectivi sînt

$$(1-i) \qquad m_{ix} = v_2 x_i' = x_i' \xi, \quad (i-3) \qquad m_{ix} = v_1 x_i = x_i \xi'. \qquad (6.8)$$

Înseamnă că și în acest caz se poate construi linia de influență M_i folosind liniile de influență cunoscute V_2 și V_1; prima este valabilă pe intervalul *1-i*,

multiplicîndu-i ordonatele cu x'_i, iar a doua este valabilă pe intervalul *i-3*, multiplicîndu-i ordonatele cu x_i. În dreptul secțiunii i ambele variații liniare conduc la ordonata $m_{ii}=x_i x'_i/l$, astfel că rezultă pentru linia de influență forma din figura 82, *e*.

Construcția acestei linii de influență se obține purtînd segmentele x_i și x'_i pe ordonatele punctelor *1* și *2* (prin arce de cerc), apoi ducînd dreptele *1'-2-3'* și *1-2'* care delimitează linia de influență de formă triunghiulară pe deschiderea *1-2*. Dacă poziția secțiunii i ar varia, expresia ordonatei m_{ii} arată că locul geometric al vîrfului i' este o parabolă simetrică (punctat pe figură) cu ordonata $l/4$ în dreptul mijlocului grinzii. Pentru o secțiune j, cele două drepte care mărginesc linia de influență au alte poziții, definite de vîrful j'.

Configurația liniei de influență arată că valoarea maximă pozitivă a lui M_i se obține încărcînd în întregime deschiderea *1-2* și așezînd sarcinile cele mai grele în apropierea secțiunii i.

b. **Determinare prin deplasări virtuale.** Oricare ar fi forța de legătură considerată, se procedează așa cum s-a arătat anterior în figurile 71—72: se suprimă legătura respectivă și se înlocuiește cu forța de legătură, aplicată ca acțiune exterioară. Prin aceasta, sistemul rămîne în echilibru, dar are acum un grad de libertate, și deci i se poate da o deplasare virtuală. Condiția de echilibru se obține scriind că lucrul mecanic virtual este nul; în ecuație intervin numai cele două forțe active, care asigură echilibrul sistemului transformat: sarcina mobilă de 1^{kN}, călcînd în secțiunea curentă a grinzii și forța de legătură introdusă.

În figurile 83, *b-e* sînt arătate configurațiile deplasărilor virtuale care devin posibile cînd se suprimă legăturile corespunzătoare cantităților V_1, V_2, T_i și M_i. În primele două cazuri s-a suprimat cîte un reazem; în celelalte două s-au folosit secționări incomplete, de forma celei din figura 71, *e* pentru T_i, respectiv introducînd o articulație pentru M_i. Forțele de legătură au fost aplicate cu sensurile lor pozitive, conform convențiilor uzuale de semne, iar deplasările virtuale s-au dat în sensul de acțiune al forțelor de legătură, respectînd toate celelalte legături rămase. Deplasările corespunzătoare necunoscutelor sînt: $\overline{11'}=\delta_1$ pentru V_1, $\overline{22'}=\delta_2$ pentru V_2, $\overline{i'i''}=\delta_i$ pentru T_i și rotirea relativă θ_i pentru M_i.

În fiecare caz, sarcina de 1^{kN} parcurge pe direcția sa o deplasare δ_x (în sensul său de acțiune sau în sens contrar, după poziția sarcinii pe grindă). Pentru poziția considerată în figură, ecuațiile de echilibru în cele patru cazuri sînt:

— reacțiunea V_1

$$V_1\delta_1-1^{kN}\delta_x=0,\ \text{deci}\ V_1=1^{kN}\delta_x/\delta_1 \quad \text{sau}\ v_{1x}=\delta_x/\delta_1,$$

— reacțiunea V_2

$$V_2\delta_2-1^{kN}\delta_x=0,\ \text{deci}\ V_2=1^{kN}\delta_x/\delta_2 \quad \text{sau}\ v_{2x}=\delta_x/\delta_2,$$

— forța tăietoare T_i (6.9)

$$T_i\delta_i+1^{kN}\delta_x=0,\ \text{deci}\ T_i=-1^{kN}\delta_x/\delta_i \quad \text{sau}\ t_{ix}=-\delta_x/\delta_i,$$

— momentul încovoietor M_x

$$M_i\theta_i-1^{kN}\delta_x=0,\ \text{deci}\ M_i=1^{kN}\delta_x/\theta_i \quad \text{sau}\ m_{ix}=\delta_x/\theta_i.$$

Expresiile obținute pentru coeficienții de influență au aceeași formă generală, și deci conduc la aceeași interpretare. Considerînd că sarcina de 1^{kN} parcurge grinda, numărătorul δ_x reprezintă diagrama deplasărilor pe verticală a tuturor punctelor grinzii, în timp ce numitorul este o constantă arbitrară (infinit mică) ce caracterizează deplasarea virtuală dată. Înseamnă că *forma* liniei de influență este dată de numărător; aceasta este reprezentată de *suprafața cuprinsă între poziția deplasată și poziția inițială a grinzii*. Ordonatele δ_x sînt infinit mici, dar prin împărțirea cu numitorul devin cantități finite. Deosebirea între diagrama deplasărilor δ_x și linia de influență constă numai în ordinul de mărime al ordonatelor, forma lor fiind aceeași.

Este ușor de constatat că pentru fiecare dintre cazurile examinate se regăsește configurația liniei de influență corespunzătoare din figura 82. Totodată, semnele diferitelor zone din linia de influență rezultă din semnele indicate de expresiile (6.9) pentru poziția sarcinii de 1^{kN} considerată la scrierea acestor expresii. Rămîne să se determine în fiecare caz ordonata care definește linia de influență respectivă. Pornind de la expresia $\eta_{ix}=\delta_x/\Delta_i$ a unui coeficient de influență oarecare (unde Δ_i este deplasarea impusă pe direcția legăturii suprimate), se vede că, admițînd $\Delta_i=1$ (infinit mic), atunci diagrama δ_x dă chiar linia de influență căutată. Astfel, pentru linia de influență V_1, ordonata caracteristică este $\overline{11'}=1$, iar pentru linia de influență V_2 este $\overline{22'}=1$. La linia de influență T_i rezultă $\overline{i'i''}=1$, ceea ce arată că cele două drepte paralele sînt distanțate între ele pe verticală cu unitatea. La linia de influență M_i, ordonatele $\overline{11'}=x_i0_i$ și $\overline{22'}=x_i'0_i$ din diagrama deplasărilor trebuie împărțite cu 0_i pentru a se trece la linia de influență; rezultă deci pentru aceasta ordonatele $\overline{11'}=x_i$ și $\overline{22'}=x_i'$ ca în figura 82, *e*.

S-a ajuns astfel și pe această cale la aceleași linii de influență.

3. Ecuația generală a liniilor de influență

Cele două căi de determinare a liniilor de influență, examinate în paragraful precedent, au specific diferit. Utilizînd procedeul analitic, se scriu mai întîi ecuațiile diferitelor porțiuni din linia de influență și apoi — pe baza ecuațiilor — se poate trece la trasarea acestora. Folosind deplasările virtuale, se obține mai întîi configurația generală a liniei de influență (pe baza asemănării cu diagrama deplasărilor), precum și semnele. Numai după aceasta se trece la mărimea ordonatelor, stabilind ordonata care definește întreaga diagramă.

S-a arătat anterior că utilitatea liniilor de influență se referă în primul rînd la aspectul *calitativ*, reprezentat prin forma generală și semne, care permite determinarea pozițiilor celor mai defavorabile pentru sarcinile utile. Prin aceasta, utilizarea deplasărilor virtuale apare ca mijlocul cel mai indicat pentru construirea liniilor de influență, în special la structuri mai complicate. Totodată, determinarea prin deplasări virtuale dă posibilitatea să se generalizeze procedeul folosit pentru cazurile din figurile 83, *b-e*, stabilind o

ecuație generală a liniilor de influență la structuri plane static determinate, care conduce la sistematizarea modului de construire.

Considerînd un anumit efort S_i, se suprimă legătura respectivă și se înlocuiește cu forța de legătură S_i, aplicată ca acțiune exterioară. Sistemul transformat ce rezultă este în echilibru sub acțiunea sarcinii de 1^{kN}, acționînd în secțiunea curentă și a necunoscutei S_i. Pentru exprimarea echilibrului se utilizează deplasarea virtuală caracteristică legăturii suprimate, stabilind următoarele:

— deplasarea se dă *în sensul de acțiune* al necunoscutei S_i, admisă inițial pozitivă conform convenției de semne; necunoscuta parcurge deplasarea corespunzătoare Δ_i și produce lucrul mecanic virtual pozitiv $S_i\Delta_i$;

— sarcina de 1^{kN} parcurge pe direcția sa deplasarea δ_x, *considerată pozitivă în sensul de acțiune al sarcinii*[1] și dă lucrul mecanic virtual pozitiv $1^{kN}\delta_x$.

Condiția de echilibru are forma:

$$S_i\Delta_i + 1^{kN}\delta_x = 0, \quad \text{deci} \quad S_i = -1^{kN}\delta_x/\Delta_i, \tag{6.10}$$

unde, introducînd coeficientul de influență $S_i = 1^{kN}\eta_{ix}$, se obține $\eta_{ix} = -\delta_x/\Delta_i$, care este ordonata curentă din linia de influență căutată.

Expresia (6.10) reprezintă *ecuația generală a liniilor de influență* pentru structuri static determinate plane. În expresie, Δ_i este o constantă arbitrară care definește deplasarea virtuală dată, în timp ce δ_x variază în raport cu poziția sarcinii; rezultă următoarele concluzii generale:

(1) *Forma* liniei de influență este dată de numărătorul δ_x, care reprezintă *diagrama deplasărilor tuturor punctelor structurii, parcurse de sarcina de* 1^{kN}, *pe direcția acestei sarcini*. Proprietățile diagramelor de deplasări, examinate anterior în legătură cu figura 76, arată că toate liniile de influență ale reacțiunilor și eforturilor la structuri static determinate *plane* sînt formate din *variații liniare*.

(2) *Semnele* liniei de influență sînt *inversate* față de cele ale diagramei deplasărilor, cu condiția de a se da deplasarea virtuală în sensul pozitiv al necunoscutei. Cînd sarcina de 1^{kN} este verticală și dirijată în jos, zonele *pozitive* ale liniei de influență sînt totdeauna cele situate *deasupra axei de referință*.

(3) *Mărimea ordonatelor* rezultă formînd raportul δ_x/Δ_i; aplicarea acestui raport reprezintă trecerea de la diagrama deplasărilor (ordonate infinit mici) la linia de influență (ordonate finite). Întreaga linie de influență este definită dacă se cunoaște o singură ordonată; celelalte ordonate se deduc prin corelații geometrice. O cale constă în a considera o poziție particulară j a sarcinii de 1^{kN}, pentru care se poate calcula ușor raportul $\eta_{ij} = \delta_j/\Delta_i$, găsind ordonata respectivă. O altă cale este de a admite de la început $\Delta_i = 1$ (infinit mic), caz în care *diagrama deplasărilor dă chiar linia de influență* (ordonatele rezultă finite prin reducerea deplasării $\Delta_i = 1$ din numărător și numitor); aceasta este calea cea mai simplă.

---

[1] Această convenție fixează semnele diagramei de deplasări δ_x.

În concluzie, succesiunea operațiilor necesare pentru construirea unei linii de influență la o structură statică determinată plană, folosind deplasările virtuale, este:

— se introduce gradul de libertate corespunzător necunoscutei, se obține sistemul transformat și se dă deplasarea virtuală devenită posibilă;
— se trasează diagrama deplasărilor pe direcția sarcinii mobile de 1^{kN};
— se trece de la diagrama deplasărilor la linia de influență prin precizarea semnelor și stabilirea mărimii ordonatelor (fixarea scării).

Pe această cale, construirea liniilor de influență poate fi făcută direct și cu ușurință chiar la structuri mai complicate, totul reducîndu-se la aplicarea sistematizării arătate.

Rămîne de făcut o observație. Determinarea prin deplasări virtuale a reacțiunilor și eforturilor dintr-o structură static determinată, supusă la sarcini cu poziție fixă, *este același lucru cu folosirea liniilor de influență*. Pentru aceasta este suficient să se examineze de exemplu expresia reacțiunii V_4, stabilită în legătură cu figura 72, *b*, care exprimă tocmai multiplicarea sarcinilor aplicate pe grindă cu ordonatele corespunzătoare din linia de influență. De asemenea, este suficient să se admită $0_i=1$ în cazul din figura 72, *f*, pentru ca suprafața cuprinsă între poziția deplasată a grinzii și poziția sa inițială să reprezinte linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea *i*.

B. LINII DE INFLUENȚĂ LA DIFERITE CATEGORII DE STRUCTURI

1. Grinzi cu console și articulații

Determinarea pe cale analitică a liniilor de influență devine aici mai complicată, deoarece trebuie stabilite succesiv expresiile coeficientului de influență care corespund parcurgerii de către sarcina de 1^{kN} a diferitelor părți componente ale grinzii. Dimpotrivă, folosirea deplasărilor virtuale păstrează aceeași simplicitate, trasarea liniilor de influență devenind aproape intuitivă.

a. **Sarcini transmise direct.** Se va utiliza modul sistematizat de construire expus în paragraful precedent. În cazul grinzilor, forma liniei de influență este dată chiar de diagrama cuprinsă între poziția inițială și cea deplasată, cu ordonate măsurate după direcția sarcinii mobile de 1^{kN}. Producînd deplasarea virtuală pe direcția legăturii suprimate, configurația poziției deplasate se determină direct urmărind — de la una la alta — interdependența dintre deplasările diferitelor porțiuni, așa cum rezultă din respectarea legăturilor rămase.

Privitor la mărimea ordonatelor, de obicei nici nu mai este necesar să se formeze raportul δ_x/Δ_i pentru o poziție particulară a sarcinii-unitate (respectiv să se impună condiția $\Delta_i=1$), deoarece pe porțiunea de grindă unde s-a introdus gradul de libertate se regăsește o linie de influență cunoscută de la grinzile drepte.

Exemplificări sînt date în figura 84. Pentru simplificare, nu s-au mai desenat separat (ca în fig. 82—83) mai întîi diagrama deplasărilor și apoi linia de

influență obținută după stabilirea scării ordonatelor, deoarece ambele au aceeași formă. Pe grindă s-a indicat legătura suprimată și s-a aplicat ca acțiune exterioară forța de legătură respectivă, apoi s-a trasat direct configurația liniei de influență (folosind normele de trasare a diagramelor de deplasări) și s-a arătat ordonata care o definește. Se pot urmări astfel liniile de

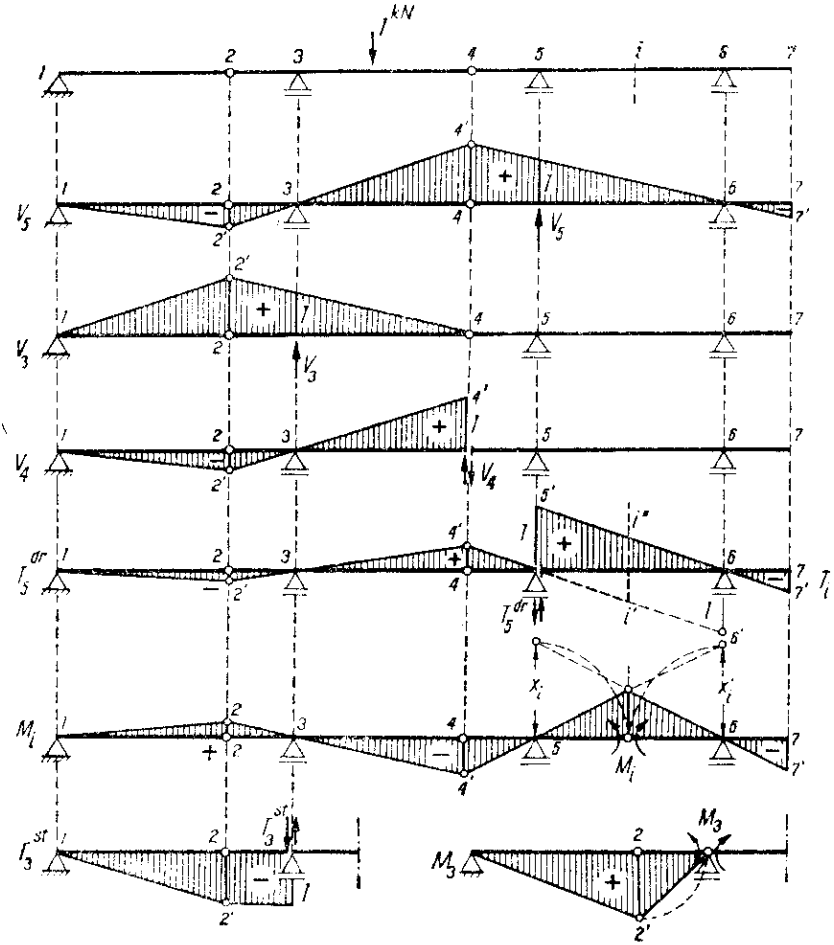


Fig. 84

influență ale reacțiunilor V_5 și V_3, dintre care prima se întinde pe întreaga grindă, în timp ce a doua este limitată la porțiunea *1-4*.

Pentru linia de influență a acțiunii reciproce V_4 s-a admis suprimarea articulației *4*, înlocuind-o cu perechea de forțe V_4. Porțiunea *4-7* din grindă nu se poate deplasa, astfel că se obține linia de influență din figură, în care se

regăsește linia de influență a reacțiunii din extremitatea *1* pentru grinda cu consolă *2-3-4*, continuată și pe porțiunea *1-2*.

Linia de influență T_5^{dr} se referă la forța tăietoare din secțiunea situată imediat la dreapta reazemului *5*. Dintre cele două capete de grindă, rezultate printr-o secționare incompletă de tipul celei din figura 71, *e*, numai capătul din dreapta se poate deplasa normal pe axa grinzii, celălalt trebuind să respecte legătura cu reazemul. În același timp, cele două părți ale grinzii *4-5-7* trebuie să rămînă paralele. Urmărind legăturile rămase, se poate trasa cu ușurință poziția deplasată, și deci configurația liniei de influență, unde ordonata $\overline{55'}$ are mărime egală cu unitatea. Dacă se consideră o secțiune oarecare *i* în cuprinsul deschiderii *5-6*, linia de influență T_i este mărginită tot de dreptele paralele *5'-6* și *5-6'*, dar saltul apare în dreptul secțiunii și are mărimea $\overline{i'i''}=1$.

Pentru linia de influență M_i, în intervalul *5-6-7* se regăsește situația din figura 81, *e*, urmînd să se extindă diagrama pe restul grinzii, ținînd seama de corelațiile impuse de legăturile rămase. Liniile de influență T_3^{st} și M_3 se întind numai pe intervalul *1-3*, deoarece după introducerea secționării incomplete respective porțiunea *3-7* a grinzii rămîne static determinată. În primul caz, consola *2-3* suferă o translație egală cu unitatea, iar în al doilea caz se rotește cu o unitate, ambele în sensul forței de legătură de pe fața din stînga a secțiunii.

b. **Sarcini transmise indirect.** Utilizarea deplasărilor virtuale are avantajul de a scoate direct în evidență corecțiile ce intervin în liniile de influență, cînd se consideră transmiterea indirectă, față de cazul transmiterii directe.

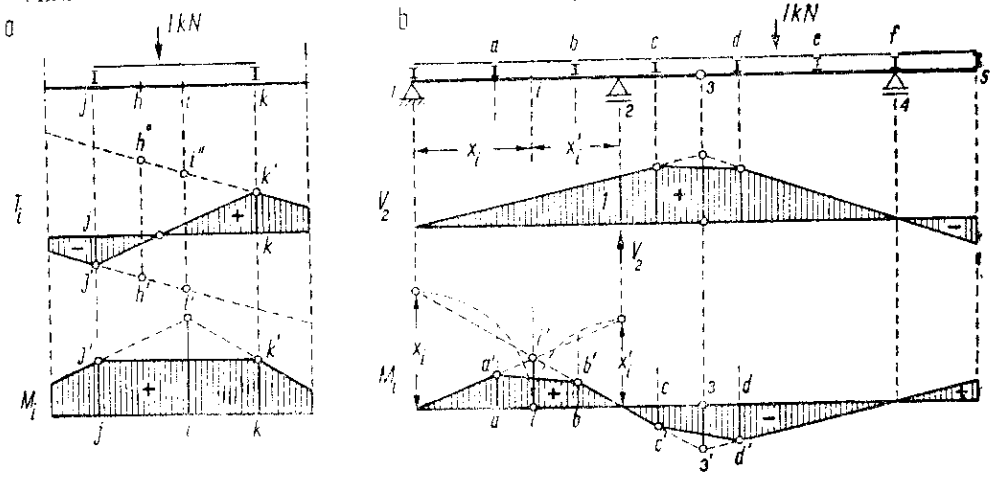


Fig. 85

Deosebirea provine de la faptul că la trasmiterea directă sarcina mobilă de 1^{kN} parcurge axa grinzii, în timp ce la trasmiterea indirectă această sarcină parcurge succesiunea lonjeroanelor, și deci diagrama deplasărilor trebuie trasată pentru lonjeroane.

În figura 85, *a* s-a considerat cazul general al unei porțiuni de grindă din dreptul unui panou *j-k* de transmitere indirectă. Dacă se construiesc liniile de

influență T_i și M_i ale eforturilor dintr-o anumită secțiune i, pentru transmitere directă, se obțin în cuprinsul panoului configurații de forma j'-i'-i''-k', respectiv j'-i'-k', care corespund diagramelor de deplasări pentru porțiunile de grindă j-i și i-k, cînd între fețele secțiunii i se produce o deplasare relativă după normală sau o rotire relativă.

Dacă sarcina mobilă parcurge lonjeronul, situația se schimbă. În dreptul antretoazelor j și k, *ordonatele rămîn aceleași*, deoarece toate cele trei elemente (grinda, antretoaza și lonjeronul) au în secțiunea respectivă aceeași deplasare pe verticală. Diagrama de deplasări a lonjeronului, care se deplasează ca un corp rigid, este dată de o variație liniară; înseamnă că în linia de influență trebuie introdusă dreapta j'-k'. Se ajunge astfel la concluzia că *efectul transmiterii indirecte constă în introducerea unei variații liniare între punctele ce corespund antretoazelor care limitează panoul considerat*. Această concluzie are caracter general și se aplică la construirea oricărei linii de influență pentru structuri static determinate la care intervine transmiterea indirectă a sarcinilor.

În linia de influență T_i se suprimă saltul care intervine în dreptul secțiunii pentru transmitere directă. Întrucît cele două drepte paralele ce mărginesc linia de influență rămîn aceleași cînd se trece de la o secțiune la alta, înseamnă că *linia de influență a forței tăietoare rămîne aceeași, în cazul transmiterii indirecte, pentru toate secțiunile unui panou*. Punctul de anulare ce apare în cuprinsul panoului poartă numele de *punct limită*: pînă acolo trebuie să înainteze o sarcină uniform distribuită spre a produce efort maxim. La linia de influență M_i, introducerea variației liniare suprimă vîrful de pe ordonata secțiunii, specific liniei de influență în cazul transmiterii directe. Dreapta j'-k' elimină din diagramă porțiunea j'-i'-k', care reprezintă *linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea corespunzătoare a lonjeronului*.

Construirea liniilor de influență se face considerînd mai întîi cazul transmiterii directe, apoi se introduc corecțiile corespunzătoare transmiterii indirecte. În secțiunile ce corespund antretoazelor, ordonatele rămîn aceleași, iar în cuprinsul fiecărui panou, transmiterii indirecte îi corespunde o variație liniară. Înseamnă că prin introducerea acestor drepte se elimină toate vîrfurile sau salturile care apar în interiorul panourilor pentru transmiterea directă. Două exemple sînt date în figura 85, *b*, unde s-au construit liniile de influență V_2 și M_4 pentru o grindă cu console și articulații. În primul caz trebuie eliminat un singur vîrf, și anume în panoul *c*-*d*; în al doilea caz trebuie eliminate două vîrfuri, care corespund articulațiilor din secțiunile i și 3.

2. Arce cu trei articulații

Se utilizează și în acest caz determinarea prin deplasări virtuale a liniilor de influență pentru reacțiuni și eforturi, considerînd că axa arcului este parcursă de o sarcină-unitate verticală. În paralel, se va arăta cum aceleași diagrame se pot obține și direct, pornind de la expresiile generale stabilite în capitolul III pentru cazul particular al arcului cu trei articulații încărcat cu sarcini verticale.

Linia de influență *II*. Se suprimă împiedicarea de deplasare pe orizontală din extremitatea *1* și se aplică împingerea *H* ca acțiune exterioară (fig. 86, *a*); devine posibilă deplasarea virtuală indicată punctat pe figură. Centrul instantaneu al porțiunii *1-3* se găsește la intersecția verticalei reazemului *1* cu dreapta care unește articulațiile *2* și *3*. Pentru cele două porțiuni rigide corespunde o diagramă de deplasări de formă triunghiulară, cu vîrful pe ordonata

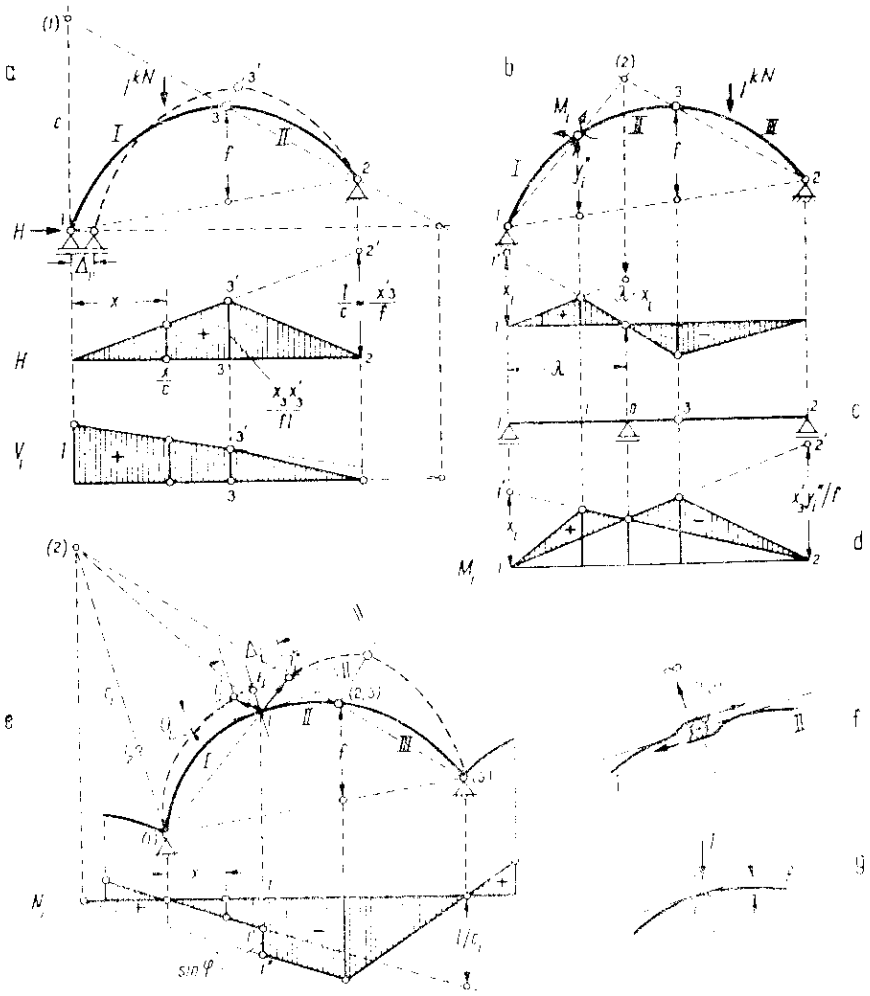


Fig. 86

articulației centrale. Dînd deplasarea virtuală în sensul pozitiv al împingerii *H*, diagrama deplasărilor rezultă negativă, și deci linia de influență va fi în întregime pozitivă.

Mărimea ordonatei curente h_{1x} este dată de raportul δ_x/Δ_1, unde pentru prima porțiune $\delta_x = x\theta_1$ și $\Delta_1 = c\theta_1$; θ_1 reprezintă rotirea porțiunii rigide *1-3* în jurul centrului său instantaneu, iar c este distanța de la acest centru la reazemul *1*. Se obține ecuația $h_{1x} = x/c$; prin corelații geometrice se poate scrie $f/c = x_3'/l$, și deci $h_{1x} = xx_3'/lf$, unde apare săgeata arcului. În extremitatea *2*, ordonata acestei variații liniare este $\overline{22'} = l/c = x_3'/f$, iar în dreptul vîrfului rezultă $\overline{33'} = x_3x_3'/lf$.

La aceeași linie de influență se poate ajunge folosind expresia (3.9) a împingerii orizontale H, anume $H = M_3^0/f$, care arată că linia de influență H se obține din linia de influență M_3^0 împărțindu-i ordonatele cu constanta f. Se știe însă din figura 82, *e* că linia de influență a momentului încovoietor, dintr-o secțiune *i* a grinzii simplu rezemate, este reprezentată de o diagramă triunghiulară cu vîrful în dreptul secțiunii și având ordonata x_ix_i'/l. Considerînd secțiunea ce corespunde articulației centrale *3*, se obține linia de influență din figura 86, *a*.

În mod asemănător se determină și liniile de influență ale reacțiunilor V_1 și V_2. Pentru V_1, se suprimă împiedicarea de deplasare pe verticală în extremitatea *1*; centrul instantaneu al porțiunii *1-3* se găsește la intersecția orizontalei duse prin *1* cu linia articulațiilor *2* și *3*. Configurația liniei de influență se vede în figura 86, *a*.

Linia de influență M_i. Introducînd o articulație în secțiunea *i*, arcul se împarte în trei porțiuni rigide, care formează împreună un lanț cinematic similar celui din figura 73, *e*. Centrul instantaneu al porțiunii centrale se găsește la intersecția dreptelor *1-i* și *3-2*. Dînd deplasarea virtuală în sensul pozitiv al perechii de momente M_i, rezultă diagrama din figura 86, *b*, al cărei punct limită este situat pe ordonata centrului instantaneu. Semnele celor două zone din linia de influență se obțin prin inversarea semnelor diagramei deplasărilor. Mărimea ordonatelor rezultă admițînd că rotirea relativă din articulația *3* este egală cu unitatea; se găsește $\overline{11'} = x_i$, ordonată care definește întreaga linie de influență.

Este ușor de văzut că linia de influență M_i la arcul cu trei articulații este aceeași cu linia de influență M_i din secțiunea corespunzătoare a unei grinzi drepte cu consolă, avînd între reazeme deschiderea λ, de extremitatea căreia — aflată pe ordonata articulației *3* — este articulată grinda pe două reazeme *3-2* (fig. 86, *c*). Apare astfel cu claritate modul mai favorabil de comportare a arcului cu trei articulații, față de grinda simplu rezemată cu aceeași deschidere.

Aceeași linie de influență se poate găsi și pornind de la expresia generală (3.12), care dă momentul încovoietor din arc sub forma $M_i = M_i^0 - Hy_i'$, unde M_i^0 provine de la grinda dreaptă corespunzătoare, iar y_i' este ordonata secțiunii *i* deasupra liniei articulațiilor *1-2*. Expresia fiind valabilă pentru orice încărcare verticală, rămîne valabilă și între liniile de influență. Înseamnă că linia de influență M_i se obține din linia de influență M_i^0, scăzînd linia de influență a împingerii H, cu ordonatele multiplicate cu constanta y_i'. Suprapunerea este arătată în figura 86, *d*, regăsind aceeași diagramă.

Linia de influență N_i. Secționarea incompletă este arătată în figura 86, *f* și ea permite numai deplasarea relativă după tangenta la arc a celor două fețe ale secțiunii *i*; deplasarea relativă după normală și rotirea relativă rămîn împiedicate. Centrul relativ (*1*, *2*) se găsește la infinit, pe direcția normalei la arc în *i*. Centrul instantaneu al porțiunii *II* se determină pe baza relației simbolice $(2)=(3)\cdot(2,\ 3)+(1)\cdot(1,\ 2)$. Această din urmă dreaptă se obține ducînd prin articulația din stînga o paralelă la normala din secțiunea *i*.

În figura 86, *e* este arătată punctat și imaginea deplasării virtuale[1]. Se constată că producerea unei deplasări relative după tangenta la arc, obligă porțiunile rigide să aibă și deplasări după direcția normalei, deoarece porțiunea *I* se rotește în jurul articulației (*1*). Cele două fețe ale secțiunii *i* au deplasările $\delta_i^{st}=\overline{ii_1'}$ $\delta_i^{dr}=\overline{ii_1''}$, respectiv normale pe razele vectoare duse la secțiunea *i* de la centrele instantanee (*1*) și (*2*); mărimile deplasărilor sînt $\overline{ii_1'}=\overline{(1)i}\cdot\theta$ și $\overline{ii_1''}=\overline{(2)i}\cdot\theta$, unde $\theta_1=\theta_2=\theta$ este rotirea comună a porțiunilor *I* și *II* în jurul centrelor instantanee respective. Aceste două deplasări au aceeași proiecție pe normala la arc în *i*, anume $\overline{ii_1}$, conform condiționării impuse de secționarea incompletă. Proiecțiile deplasărilor după tangentă $\overline{i_1i_1'}$ și $\overline{i_1i_1''}$ au sensuri contrare, iar mărimile lor sînt proporționale cu proiecțiile razelor vectoare pe direcția normalei la arc în *i*: $\overline{i_1i_1'}=\overline{(1)i_2}\theta$ și $\overline{i_1i_1''}=\overline{(2)i_2}\theta$. Deplasarea corespunzătoare *perechii* de forțe N_i este $\Delta_i=\overline{i_1'i_1}+\overline{i_1i_1''}=\overline{i_1'i_1''}=c_1\theta$, unde c_1 reprezintă distanța dintre centrele instantanee (*1*) și (*2*).

Diagrama de deplasări este formată din trei variații liniare, corespunzătoare celor trei porțiuni rigide, care se anulează pe ordonatele centrelor instantanee respective; pentru porțiunile *I* și *III* aceste variații liniare se întind și pe console. Primele două variații liniare sînt paralele, iar cele corespunzătoare porțiunilor *II* și *III* se intersectează pe ordonata articulației centrale. Dînd deplasarea virtuală în sensul de acțiune al perechii de forțe N_i (invers configurației reprezentate punctat), se obține diagrama de deplasări din figură. Linia de influență rezultă negativă în intervalul *1-2-3*, deci pentru orice poziție a sarcinilor în cuprinsul deschiderii se dezvoltă în secțiune forță axială de compresiune.

Pentru stabilirea scării liniei de influență este necesară o singură ordonată. O posibilitate este de a porni de la mărimea saltului ce apare în dreptul secțiunii *i*. Se controlează ușor (fig. 86, *g*) că trecerea sarcinii-unitate prin secțiune duce la o variație $-1\cdot\sin\varphi$ în mărimea forței axiale, deci ordonata $\overline{i'i''}=\sin\varphi$ definește linia de influență. O altă posibilitate este de a forma raportul δ_x/Δ_i în secțiunea curentă de pe porțiunea *I*; se poate scrie: $\delta_x=x\theta$ și $\Delta_i=\overline{i_1'i_1''}=c_1\theta$, deci $n_{ix}=-x/c_1$, care reprezintă ecuația primei variații liniare din diagramă, conducînd la ordonata $-1/c_1$ în dreptul articulației (*3*).

În mod cu totul asemănător se poate construi linia de influență T_i.

---

[1] Pentru claritatea desenului, deplasarea virtuală a fost figurată cu sens *invers* celui uzual, care a stat la baza stabilirii ecuației generale (6.10).

3. Grinzi cu zăbrele

a. **Caracteristici.** Faţă de variatele posibilităţi de alcătuire a acestor structuri, descori calea cea mai potrivită pentru trasarea liniilor de influenţă ale eforturilor din bare este cea a deplasărilor virtuale. Determinarea analitică apare de obicei mai greoaie şi aplicarea sa avantajoasă se limitează în genere la categoria structurilor articulate simple. O altă cale constă în utilizarea expresiilor generale ale eforturilor din bare, stabilite în capitolul IV pentru încărcarea cu sarcini verticale, care conduc la efectuarea unei suprapuneri de linii de influenţă cunoscute de la grinzile drepte.

O particularitate a liniilor de influenţă la grinzi cu zăbrele provine de la ipoteza simplificatoare admisă, anume că sarcinile pot fi aplicate numai în noduri. Rezultă că sarcina mobilă de 1^{kN} nu parcurge direct talpa grinzii; se regăseşte cazul tipic al *transmiterii indirecte*. Fiecărui panou de la talpa încărcată trebuie să-i corespundă o variaţie liniară în linia de influenţă. Cînd nodurile de la cele două tălpi nu sînt pe aceleaşi verticale, rezultă linii de influenţă *diferite*, după cum sarcina de 1^{kN} parcurge talpa superioară sau pe cea inferioară.

Fie de exemplu două porţiuni rigide *I* şi *II* ale sistemului cu un grad de libertate (fig. 87), obţinut prin suprimarea barei *j-k* pentru care urmează să se construiască linia de influenţă; porţiunile sînt legate la talpa superioară prin bara *b-e*, iar la talpa inferioară prin bara *c-f*. Fie (*1*), (*2*), (*1, 2*) centrele

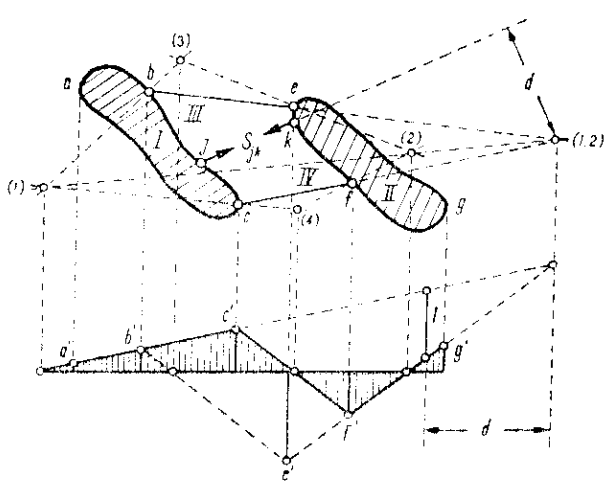


Fig. 87

instantanee şi centrul relativ al porţiunilor considerate. Dînd o deplasare virtuală în sensul de acţiune al perechii de forţe S_{jk} (micşorarea distanţei dintre nodurile *j* şi *k*), celor două porţiuni le corespund în diagrama deplasărilor dreptele *a'-c'* şi *e'-g'*, care se anulează pe ordonatele centrelor instantanee respec-

tive și se intersectează pe ordonata centrului relativ (*1, 2*). Între cele două porțiuni intervine transmiterea indirectă; cînd sarcina de 1^{kN} parcurge intervalul *a-b-e-g*, diagrama are conturul *a'-b'-e'-g'*, iar cînd această sarcină parcurge intervalul *a-e-f-g*, conturul diagramei este *a'-e'-f'-g'* (haşurat). Punctele de anulare ale dreptelor *b'-e'* și *e'-f'* se găsesc pe ordonatele centrelor instantanee (*3*) și (*4*) ale barelor *b-e* și *e-f*, determinate după normele cunoscute.

La liniile de influență ale eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele se poate utiliza o modalitate simplă de stabilire a *scării* la care urmează a fi măsurate ordonatele. Aceasta constă în construirea pe diagrama deplasărilor a segmentului care reprezintă mărimea (egală cu unitatea) a deplasării impuse pe direcția necunoscutei. Astfel, mărimea variației de distanță Δl_{jk} dintre nodurile *j* și *k* rezultă considerînd rotirea relativă θ care se produce între porțiunile rigide *I* și *II*, privite ca articulate între ele în centrul relativ (*1, 2*). Se obține $\Delta l_{jk} = d \cdot \theta$, unde *d* este distanța de la centrul relativ la axul barei *j-k*. Rotirea relativă θ apare în diagrama deplasărilor sub forma unghiului dintre variațiile liniare ale porțiunilor *I* și *II*. Luînd în abscisa centrului relativ (*1, 2*) distanța *d* și ducînd acolo o normală pe axa de referință, segmentul cuprins între cele două variații liniare are tocmai mărimea $d \cdot \theta$, obținînd astfel pe Δl_{jk}. Ca diagrama deplasărilor să poată fi utilizată drept linie de influență, este necesar ca $\Delta l_{jk} = 1$; înseamnă că *segmentul construit reprezintă unitatea scării ordonatelor*. În funcție de segmentul-unitate se pot apoi determina alte ordonate ale liniei de influență.

b. **Structuri articulate simple.** Se consideră o grindă cu tălpi de formă oarecare, urmînd să se construiască linii de influență pentru eforturile dintre diferite categorii de bare.

Barele tălpilor. Pentru linia de influență a efortului din bara *3-5* a tălpii inferioare, suprimarea barei conduce la situația din figura 88, *a*. Centrul instantaneu (*2*) se găsește pe verticala reazemului simplu *7*, la intersecția cu dreapta (*1*) · (*1, 2*). Dînd o deplasare virtuală caracterizată prin micșorarea distanței dintre nodurile *3* și *5*, se obține diagrama deplasărilor formată din cele două drepte corespunzătoare porțiunilor rigide *I* și *II*. Pentru nodurile tălpii superioare diagrama are forma *1-4'-7*, iar pentru talpa inferioară rezultă forma *1-3'-5'-7*, deoarece pe cele două variații liniare sînt valabile numai porțiunile *1-3'* și *5'-7*, între care intervine dreapta *3'-5'* corespunzătoare transmiterii indirecte. Segmentul-unitate se găsește la abscisa h'_4 față de ordonata centrului relativ (*1, 2*) și este cuprins între dreptele *1-7'* și *1'-7*; prin corelații geometrice rezultă $\overline{11'} = x_4/h'_4$ și $\overline{77'} = x'_4/h'_4$.

Aceeași linie de influență se poate obține direct, pornind de la relația (4.10), anume $I_{35} = M^0_4/h'_4$, deci construind linia de influență M^0_4 pentru secțiunea din dreptul nodului *4* al grinzii simplu rezemate și împărțindu-i ordonatele cu constanta h'_4.

Pentru o bară a tălpii superioare, de exemplu bara *2-4*, se obține în același mod linia de influență arătată în figura 88, *a*, unde tălpii superioare îi corespunde conturul *1-2'-4'-7*, iar tălpii inferioare conturul *1-3'-7*.

Diagonale. Pentru linia de influență a efortului din diagonala *3-4*, suprimarea barei conduce la situația din figura 88, *b*, care este asemănătoare celei

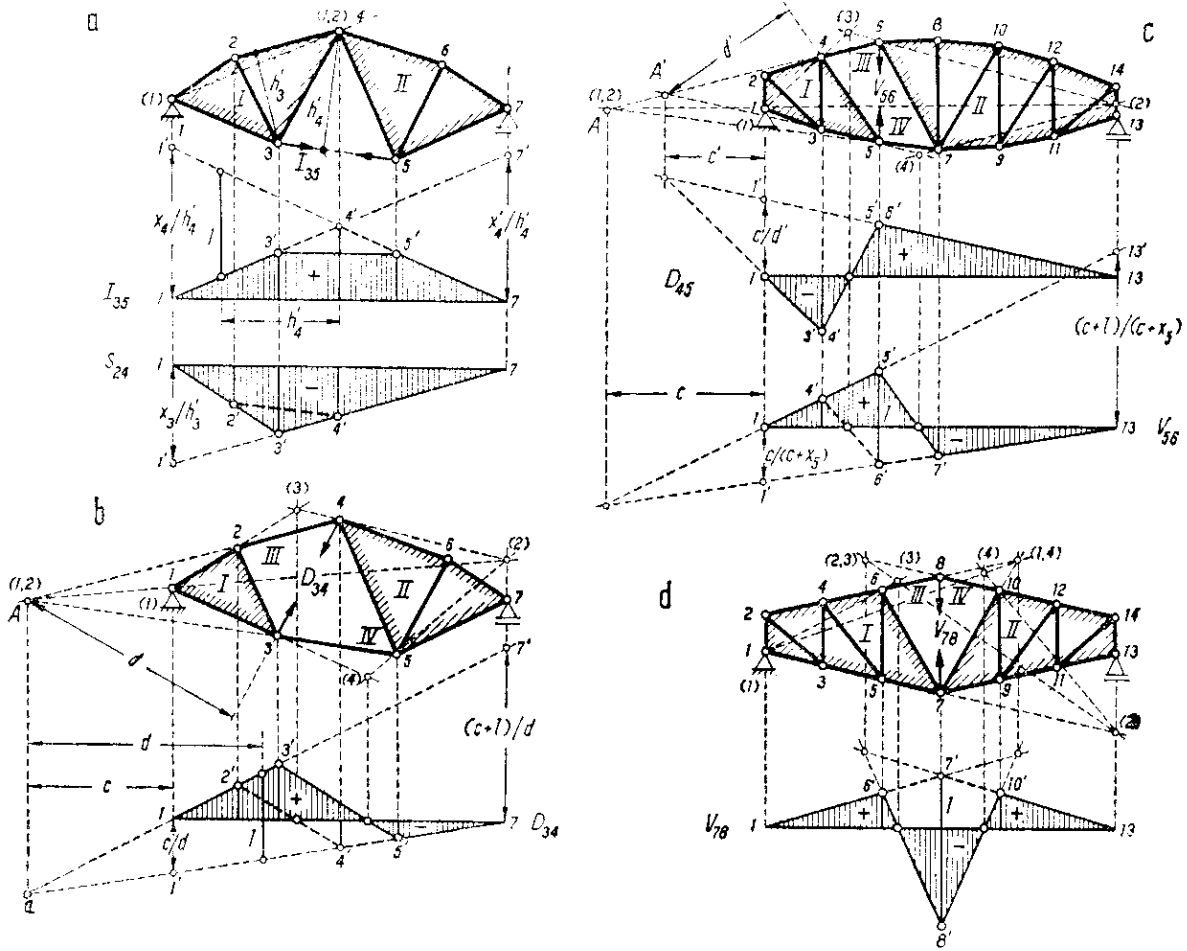

a
b
c
d
I
II
III
IV
h'_3
h'_4
I_{35}
x_4/h'_4
x'_4/h'_4
S_{24}
x_3/h'_3
D_{34}
D_{45}
V_{56}
V_{78}
d
c
c/d
(c+1)/d
(c+1)/(c+x_5)
c/(c+x_5)

Fig. 88

din figura 87. Dînd deplasarea virtuală în sensul perechii de forțe D_{34}, rezultă o diagramă de deplasări mărginită de dreptele *1-7'* și *1'-7*, care trebuie să se intersecteze pe ordonata centrului relativ (*1, 2*). Cînd sarcina mobilă parcurge talpa superioară, transmiterea indirectă apare în intervalul *2-4* și diagrama deplasărilor are conturul *1-2'-4'-7*; pentru talpa inferioară intervalul de transmitere indirectă este *3-5* și diagrama are conturul *1-3'-5'-7* (haşurat). Punctele de anulare a dreptelor *2'-4'* și *3'-5'*, care sînt punctele limită ale celor două linii de influență, se găsesc pe ordonatele centrelor instantanee (*3*) și (*4*) ale barelor *2-4* și *3-5*, care au aceleași deplasări ca și lonjeronii respectivi. Segmentul-unitate este cuprins între variațiile liniare *1-7'* și *1'-7*, pe verticala dusă la abscisa *d* față de centrul instantaneu (*1, 2*); prin corelații geometrice se găsește $11'=c/d$ și $77'=(c+l)/d$.

Să regăsim aceeași linie de influență prin calcul analitic. Se face o secționare prin barele *2-4*, *3-4* și *3-5*, izolînd porțiunea rigidă *I* rămasă la stînga secționării; echilibrul se exprimă printr-o ecuație de momente în raport cu punctul *A* de intersecție a axelor barelor *2-4* și *3-5*. Se obține:

— sarcina de 1^{kN} pe porțiunea rigidă de la stînga secționării

$$V_1 c - 1^{kN}(c+x) + D_{34} d = 0, \text{ deci } D_{34} = -1^{kN} x(c+l)/ld;$$

— sarcina de 1^{kN} pe porțiunea rigidă de la dreapta secționării

$$V_1 c + D_{34} d = 0, \text{ deci } D_{34} = -1^{kN} x' c/ld.$$

Coeficienții de influență în cele două situații sînt

$$x(c+l)/ld \quad \text{și} \quad -x'c/ld,$$

definind două variații liniare: prima este *1-7'*, cu ordonată nulă în punctul *1* și ordonată $(c+l)/d$ în *7*, iar a doua este *1'-7*, cu ordonata $-c/d$ în *1* și ordonată nulă în *7*. Se controlează că aceste două drepte se intersectează în punctul *a*, pe ordonata punctului *A*, deoarece pentru $x=-c$ și $x'=c+l$ se obține ordonata comună $-c(l+c)/ld$. Transmiterea indirectă intervine pentru talpa superioară în intervalul *2-4*, iar pentru talpa inferioară în intervalul *3-5*, regăsindu-se în totul liniile de influență din figura 88, *b*.

Dacă grinda cu zăbrele are sistem dreptunghiular de diagonale, construirea liniilor de influență se face în mod cu totul asemănător. Un exemplu este dat în figura 88, *c* pentru linia de influență D_{45}. Deoarece nodurile de la cele două tălpi sînt situate pe aceleași verticale, se obține o singură linie de influență, indiferent dacă sarcina de 1^{kN} parcurge talpa superioară sau cea inferioară.

Montanți. Pentru linia de influență a efortului din montantul *5-6*, suprimarea barei conduce la situația din figura 88, *c*, caz asemănător celui din figura 87. După determinarea centrelor instantanee, se dă o deplasare virtuală caracterizată prin mișcorarea distanței dintre nodurile *5* și *6*. Se ajunge la o diagramă de deplasări mărginită de variațiile liniare *1-13'* și *1'-13*, care trebuie să se intersecteze pe ordonata centrului relativ (*1, 2*). Pentru talpa superioară, transmiterea indirectă apare în panoul *4-6* și linia de influență are conturul *1-4'-6'-13*; pentru talpa inferioară, intervalul de transmitere indirectă este *5-7* și conturul liniei de influență *1-5'-7'-13* (haşurat). Punctele limită ale celor

două linii de influență se găsesc pe ordonatele centrelor instantanee (*3*) și (*4*) ale barelor *4-6* și *5-7*, care au aceleași deplasări ca și lonjeronii respectivi. Segmentul-unitate apare aici direct, deoarece variația de distanță dintre nodurile *5* și *6* este dată de segmentul $5'6'=1$; prin corelații geometrice rezultă $\overline{11'}=c/(c+x_5)$ și $\overline{13,13'}=(c+l)/(c+x_5)$.

Fie acum montantul central *7-8* al structurii din figura 88, *d*. Suprimarea barei conduce la separarea porțiunilor rigide *I* și *II*, articulate între ele în nodul *7* și legate prin barele *6-8* (*III*) și *8-10* (*IV*). După determinarea centrului instantaneu (*2*) se trece la determinarea centrelor relative (*2, 3*) și (*1, 4*) folosind intersecțiile

$$(2,3)=(1,2)\cdot(1,3)+(2,4)\cdot(3,4) \quad \text{și} \quad (1,4)=(1,2)\cdot(2,4)+(1,3)\cdot(3,4).$$

În continuare, se determină centrele instantanee (*3*) și (*4*) cu ajutorul intersecțiilor

$$(3)=(1)\cdot(1,3)+(2)\cdot(2,3) \quad \text{și} \quad (4)=(1)\cdot(1,4)+(2)\cdot(2,4).$$

Dînd deplasarea virtuală în sensul de acțiune al perechii de forțe V_{78}, se obține diagrama de deplasări *1-7'-13* pentru talpa inferioară și diagrama *1-6'-8'-10'-13* pentru talpa superioară (haşurat), unde barelor *6-8* și *8-10* le corespund dreptele *6'-8'* și *8'-10'* care se anulează pe ordonatele centrelor instantanee (*3*) și (*4*). Ordonata-unitate a liniei de influență este $\overline{7'8'}$, care reprezintă variația de distanță dintre nodurile *7* și *8*.

Dacă porțiunea *6-8-10* a tălpii superioare ar fi dreaptă, cele două variații liniare *1-7'* și *7'-13* se confundă cu axa de referință. Cînd sarcina calcă la talpa inferioară, efortul din montant este nul; cînd sarcina calcă la talpa superioară, linia de influență există numai pe intervalul *6-10* și are formă triunghiulară cu ordonata maximă 1.

Liniile de influență din figura 88 au fost construite pentru grinzi cu zăbrele avînd tălpi de formă oarecare. Prin particularizare, se pot obține liniile de influență corespunzătoare unor tipuri uzuale de grinzi (tălpi paralele, talpă parabolică, fermă triunghiulară). Se recomandă, ca exercițiu, să se facă asemenea particularizări, ținînd seama și de cele stabilite în capitolul IV, paragraful C.2.

c. Structuri articulate compuse. Cînd o astfel de structură este privită ca alcătuită din suprapunerea mai multor structuri articulate simple, liniile de influență permit să se vadă direct funcțiunile pe care o anumită bară le îndeplinește în aceste sisteme, cît și măsura în care efortul din bară este influențat de sarcini aplicate în diferite părți ale structurii. Exemplificările care urmează scot în evidență aceste aspecte.

Fie structura articulată compusă din figura 89, la care sistemul principal este *1-4-5-8-9-...*, iar sistemele secundare au forma *1-2-3-5*, *5-6-7-9*, ..., rezemînd în nodurile sistemului principal. Pentru linia de influență a efortului I_{79}, suprimarea barei conduce la separarea porțiunilor rigide *1-4-6-7* (*I*) și *8-9-24* (*II*), legate prin barele *4-8* și *6-9*. Centrul relativ (*1, 2*) este chiar în nodul *4*, iar centrul instantaneu (*2*) se găsește pe verticala reazemului simplu *24*, la intersecția cu dreapta $(1)\cdot(1,2)$. Dînd deplasarea virtuală caracterizată de

micșorarea distanței dintre nodurile *7* și *9*, se obține o diagramă de deplasări mărginită de dreptele *1-7'* și *1'-24*, care se intersectează în punctul *5'* pe ordonata centrului relativ *(1, 2)*. Sarcina mobilă se consideră la talpa inferioară, astfel că transmiterea indirectă apare în intervalul *7-9*; linia de influență are conturul *1-5'-7'-9'-24*. Ordonata unitate este cuprinsă între cele două variații liniare, pe verticala dusă la abscisa h_{45} față de centrul relativ *(1, 2)*; prin corelații geometrice se găsește $\overline{11'} = x_5/h_{45}$.

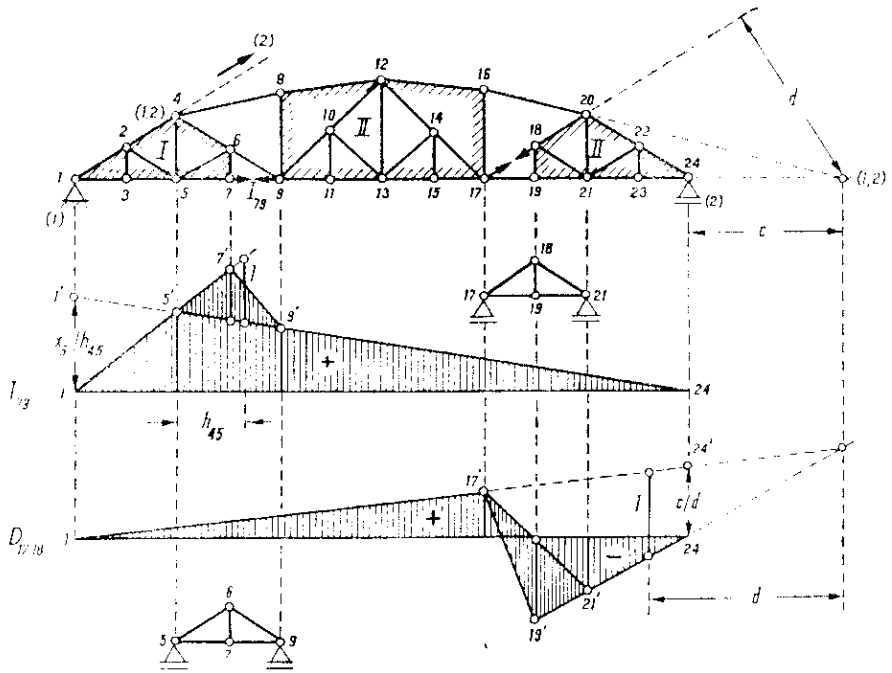


Fig. 89

Dacă s-ar considera numai sistemul principal, prin suprimarea barei *5-9* se obțin porțiunile rigide *1-4-5* (*I*) și *8-9-24* (*II*), legate prin barele *4-8* și *4-9*. Centrele instantanee își păstrează pozițiile, deci și cele două variații liniare care încadrează linia de influență rămîn aceleași, dar de data aceasta transmiterea indirectă apare pe intervalul *5-9*, astfel că linia de influență are conturul *1-5'-9'-24*. Segmentul-unitate rămîne neschimbat. Se constată că cele două linii de influență diferă cu suprafața *5'-7'-9'* (haşurată des). Aceasta reprezintă *linia de influență a efortului din bara 7-9 pentru sistemul secundar 5-6-7-9*; se vede astfel că funcțiunea barei în acest sistem se limitează la sarcinile aplicate în intervalul *5-9*. Dreapta *5'-9'* separă deci în linia de influență părțile corespunzătoare celor două funcțiuni ale barei în structură.

În mod asemănător se construiește linia de influență a efortului din diagonala *17-18*. Suprimarea barei conduce la separarea porțiunilor rigide *1-16-17* (*I*)

și *19-18-20-24* (*II*), legate prin barele *16-20* și *17-19*. Centrul relativ (*1, 2*) este situat la intersecția axelor acestor două bare, iar centrul instantaneu (*2*) este în nodul *24*. Dînd deplasarea virtuală în sensul perechii de forțe $D_{17,18}$, se obține diagrama de deplasări cuprinsă între dreptele *1-24'* și *19'-24*, care se intersectează pe ordonata centrului relativ (*1, 2*). Transmiterea indirectă apare în intervalul *17-19*, și deci linia de influență are conturul *1-17'-19'-24*. Segmentul-unitate este cuprins între cele două variații liniare, pe verticala dusă la abscisa *d* de centrul relativ; se obține $\overline{24, 24'} = c/d$.

Și în acest caz, linia de influență poate fi separată în părți corespunzătoare celor două funcțiuni ale barei, anume linia de influență *1-17'-21'-24* pentru sistemul principal și linia de influență *17'-19'-21'* pentru sistemul secundar *17-18-19-21*. Se vede și aici că funcțiunea barei în sistemul secundar este limitată la sarcinile aplicate în intervalul *17-21*.

C. DETERMINAREA EFORTURILOR MAXIME

1. Criteriu general stabilit pe baza liniilor de influență

Fie cazul unei structuri plane oarecare, parcursă de un convoi de sarcini. Un astfel de convoi este reprezentat printr-o succesiune de forțe concentrate, așezate la distanțe invariabile una de alta; convoaiele de sarcini intervin la calculul podurilor de cale ferată sau de șosea, la calculul grinzilor de rulare pentru depozite descoperite sau pentru hale industriale etc. Problema principală este de a determina *poziția cea mai defavorabilă* a convoiului, pentru un anumit efort dintr-o secțiune dată. În general, chestiunea comportă efectuarea de încercări, dar numărul acestora poate fi considerabil redus și rezolvarea se sistematizează, dacă se folosesc anumite concluzii obținute din cercetarea liniilor de influență. Astfel, pentru determinarea valorii maxime pozitive a unui anumit efort, convoiul trebuie așezat astfel ca să încarce cît mai mult zonele pozitive ale liniei de influență, plasînd sarcinile cele mai grele în dreptul celor mai mari ordonate.

Alături de asemenea indicații cu caracter general, se pot obține și alte concluzii pe baza formei particulare a liniilor de influență considerate. În cele ce urmează ne vom referi la linii de influență cu *contur poligonal*; s-a arătat mai înainte că toate liniile de influență pentru structuri static determinate plane prezintă această caracteristică, fiind alcătuite dintr-o succesiune de variații liniare.

Pentru o linie de influență cu contur poligonal (fig. 90), corespunzătoare unui anumit efort *S*, se utilizează concluzia stabilită în legătură cu figura 81, *d*: suma produselor dintre sarcinile așezate pe o aceeași variație liniară și ordonatele corespunzătoare poate fi înlocuită prin *produsul dintre rezultanta sarcinilor și ordonata din dreptul său*. Astfel, pentru poziția de convoi din figură, la care intervin rezultantele R_1, R_2, ..., se obține

$$S = R_1\delta_1 + R_2\delta_2 - R_3\delta_3 - R_4\delta_4 = \sum R_j\delta_j.$$

Admițînd acum că se dă convoiului o mică deplasare Δx spre *stînga*, noile ordonate vor diferi prin corecțiile $\Delta\delta_j$. Mărimile corecțiilor se pot exprima în funcție de înclinările laturilor respective din linia de influență, sub forma $\Delta\delta_j = \Delta x \operatorname{tg}\alpha_j$. Pentru sistematizare, se admite că $\operatorname{tg}\alpha_j$ *conține semnul* din convenția de semne trigonometrică, în raport cu înclinarea fiecărei variații liniare față de axa de referință. Considerînd deci peste tot $\alpha_j > 0$, se observă că deplasarea

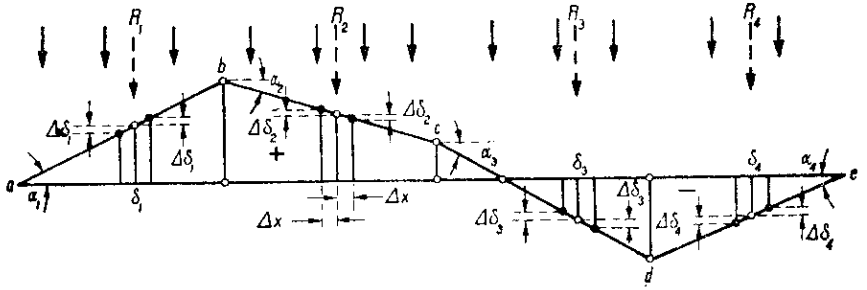


Fig. 90

convoiului spre stînga conduce la micșorarea ordonatelor în zona pozitivă a liniei de influență, respectiv la mărirea ordonatelor în zona negativă. Rezultă pentru poziția deplasată

$$S+\Delta S=R_1(\delta_1-\Delta\delta_1)+R_2(\delta_2-\Delta\delta_2)-R_3(\delta_3+\Delta\delta_3)-R_4(\delta_4+\Delta\delta_4),$$

și deci mărimea variației efortului este

$$\Delta S=-\sum R_j\Delta\delta_j=-\Delta x\sum R_j\operatorname{tg}\alpha_j.$$

Această poziție a convoiului este mai defavorabilă decît poziția inițială, cînd $\Delta S>0$, deci cînd

$$\sum R_j\operatorname{tg}\alpha_j<0. \qquad (a)$$

Dacă pentru o anumită poziție de convoi această inegalitate este satisfăcută, convoiul trebuie deplasat spre *stînga*; cît timp inegalitatea se menține, o deplasare mai spre stînga duce la o situație mai defavorabilă. Condiția de inversare a inegalității caracterizează situația de maximum, deoarece în acest moment se trece de la $\Delta S>0$ la $\Delta S<0$.

În mod asemănător, dacă pornind de la poziția inițială se dă convoiului o mică deplasare Δx spre *dreapta*, intervin din nou corecțiile de ordonate $\Delta\delta_j = \Delta x \operatorname{tg}\alpha_j$, unde $\operatorname{tg}\alpha_j$ își conține semnul. De data aceasta deplasarea conduce la creșterea ordonatelor în zona pozitivă a liniei de influență, respectiv la micșorarea acestora în zona negativă. Rezultă deci pentru variația ΔS a efortului

$$\Delta S=\sum R_j\Delta\delta_j=\Delta x\sum R_j\operatorname{tg}\alpha_j,$$

care arată că poziția deplasată este mai defavorabilă ($\Delta S>0$) cînd

$$\sum R_j\operatorname{tg}\alpha_j>0. \qquad (b)$$

Cît timp această inegalitate se menține, convoiul trebuie deplasat spre *dreapta*, poziția de maximum fiind definită de inversarea inegalității.

Examinarea făcută arată că, pornind de la o anumită poziție a convoiului, formarea cantității $\sum R_j \operatorname{tg} \alpha_j$ permite să se stabilească direcția în care trebuie deplasat convoiul spre o poziție mai defavorabilă. Pentru efort maxim pozitiv indicația este:

$$\begin{aligned} &\text{cînd } \sum R_j \operatorname{tg} \alpha_j > 0, && \text{deplasare spre dreapta,} \\ &\text{cînd } \sum R_j \operatorname{tg} \alpha_j < 0, && \text{deplasare spre stînga,} \end{aligned} \tag{6.11}$$

deplasarea trebuind continuată pînă la inversarea inegalității[1]. Deoarece convoiul este alcătuit din sarcini concentrate, iar valorile $\operatorname{tg} \alpha_j$ rămîn constante, o schimbare a sensului inegalității nu este posibilă decît prin modificarea mărimii rezultantelor parțiale R_j, care se produce numai atunci cînd una dintre sarcinile convoiului trece în linia de influență de pe o variație liniară pe alta. Înseamnă că inversarea inegalității corespunde *trecerii unei sarcini printr-un vîrf al liniei de influență*.

Se ajunge la concluzia că, pentru aflarea situației de maximum, dintre toate pozițiile posibile ale convoiului trebuie reținute *numai acelea în care una dintre sarcini calcă într-un vîrf al liniei de influență*. Pentru o asemenea poziție, condiția de inversare a inegalității se controlează așezînd succesiv convoiul cu acea sarcină atît imediat la stînga, cît și la dreapta vîrfului respectiv. Dacă pentru ambele alternative se obțin inegalități de același sens, poziția corespunzătoare trebuie eliminată, trecînd la încercarea următoare prin deplasarea convoiului — în sensul indicat de inegalități — pînă cînd o altă sarcină ajunge să calce într-un vîrf al liniei de influență.

Deoarece în timpul deplasării convoiului este posibil ca unele sarcini să iasă sau să intre pe structură, se pot găsi mai multe poziții de convoi care să ducă la inversare; acestea corespund unor *maxime relative* și numai prin compararea valorilor lor numerice se poate identifica poziția efectivă de maximum. Calculul valorilor numerice se face folosind linia de influență, sau procedînd ca în cazul sarcinilor cu poziție fixă, deoarece acum poziția convoiului este cunoscută.

Inegalitățile (6.11) reprezintă un criteriu general pentru determinarea eforturilor maxime, aplicabil oricărei linii de influență cu contur poligonal. Aceste inegalități pot fi puse sub forme mai simple pentru cazuri particulare de linii de influență, cum se arată în continuare.

2. Moment încovoietor maxim la grinda simplu rezemată

Fie o grindă simplu rezemată parcursă de un convoi de sarcini, pentru care urmează să se determine momentul încovoietor maxim dintr-o anumită secțiune *i*

[1] Pentru linii de influență negative, sau cu zone negative predominante, la care se studiază deplasarea convoiului spre poziția care dă efort maxim negativ, condiția devine $\Delta S < 0$, și deci inegalitățile (6.11) rezultă cu sensuri inversate.

(fig.91,*a*). Linia de influență, în întregime pozitivă, indică o așezare a convoiului care să ocupe întreaga grindă, cu sarcinile cele mai grele în regiunea ordonatei maxime. Criteriul de maximum rezultă prin particularizarea inegalităților (6.11) pentru o linie de influență de formă triunghiulară, la care

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = x_i'/l \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -x_i/l.$$

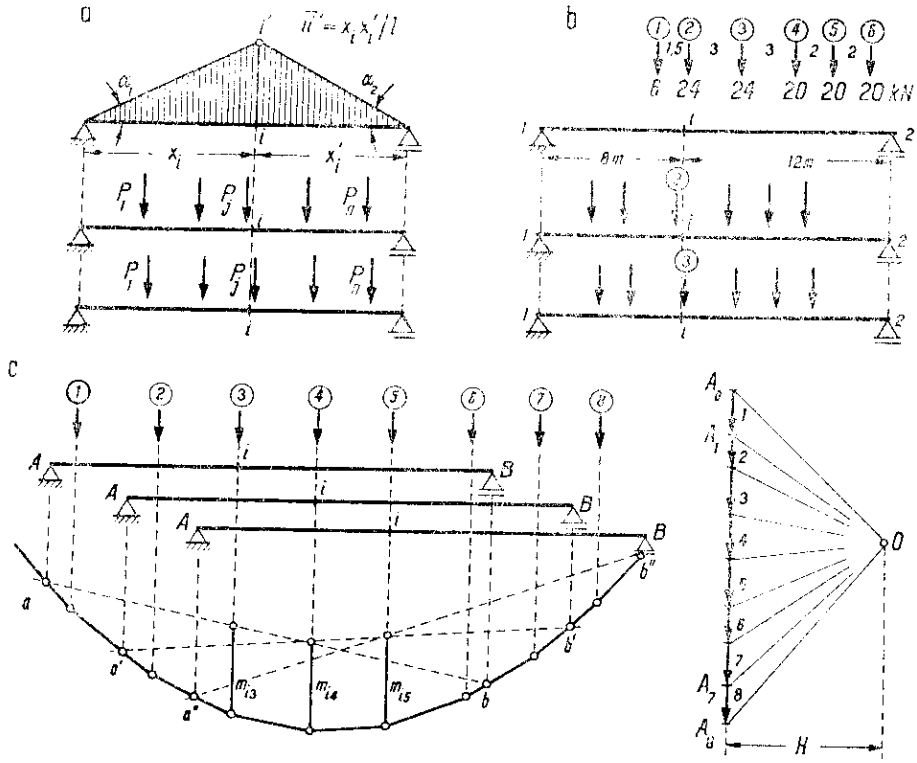


Fig. 91

Admițînd convoiul așezat cu sarcina P_j în secțiune, criteriul căutat cere ca să fie îndeplinite concomitent condițiile

$$R_1 x_i'/l - R_2 x_i/l > 0 \rightarrow \quad \text{și} \quad R_1 x_i'/l - R_2 x_i/l < 0 \leftarrow,$$

unde R_1 și R_2 trebuie evaluate considerînd că sarcina P_j calcă succesiv la stînga și apoi la dreapta secțiunii i, cum se vede în figură. Se obține

$$\sum_1^j P_k/x_i > \sum_{j+1}^n P_k/x_i' \rightarrow \quad \text{și} \quad \sum_1^{j-1} P_k/x_i < \sum_j^n P_k/x_i' \rightarrow, \tag{6.12}$$

unde sumele se referă la grupele de sarcini aflate la stînga și la dreapta secțiunii. Criteriul de maximum pentru momentul încovoietor este deci următorul: *se va așeza convoiul cu acea sarcină în secțiune care, plasată imediat la stînga și la dreapta secțiunii, conduce la inegalități* (6.12) *de sens contrar*.

Membrii inegalității pot fi priviți ca încărcări *medii* pe cele două porțiuni ale grinzii, anume p_x pentru porțiunea 1-i și p'_x pentru porțiunea i-2. Cînd la o anumită sarcină plasată în secțiune inegalitatea nu se inversează, sensul comun obținut în ambele situații indică sensul de deplasare al convoiului pentru încercarea următoare. Astfel, inegalitatea $p_x > p'_x$, indică o deplasare spre dreapta, în timp ce inegalitatea $p_x < p'_x$ indică o deplasare spre stînga. Apare interpretarea că poziția de maximum tinde spre o echilibrare a încărcărilor medii de pe cele două porțiuni de grindă.

Pentru exemplificare, fie o grindă simplu rezemată cu deschiderea $l=20$ m, la care se cere momentul încovoietor maxim din secțiunea i ($x_i=8$ m, $x'_i=12$ m), cînd grinda este parcursă de convoiul arătat în figura 91, *b*. Față de configurația liniei de influență pentru secțiunea dată, se vor încerca pozițiile convoiului cu sarcinile P_2, P_3 și P_4 călcînd succesiv în dreptul ordonatei maxime. Se constată că de fiecare dată întregul convoi începe pe grindă. Formînd inegalitățile (6.12), se obține

$$P_2 \begin{cases} 30/8 < 84/12 \\ 6/8 < 108/12 \end{cases} \qquad P_3 \begin{cases} 54/8 > 60/12 \\ 30/8 < 84/12 \end{cases} \qquad P_4 \begin{cases} 74/8 > 40/12 \\ 54/8 > 60/12 \end{cases}$$

de unde se vede că momentul încovoietor maxim corespunde celei de-a doua poziții, cînd sarcina P_3 calcă în secțiune. Pentru prima poziție, sensul inegalităților indică o deplasare spre stînga, iar pentru ultima poziție — o deplasare spre dreapta; în ambele cazuri, inegalitățile cer să se aducă sarcina P_3 în secțiune.

Dacă se calculează efectiv valorile M_i pentru cele trei poziții considerate, se obține

$$P_2\colon\ M_i=321 \text{ kN m};\quad P_3\colon\ M_i=367{,}8 \text{ kN m};\quad P_4\colon\ M_i=342{,}6 \text{ kN m},$$

regăsindu-se concluzia că poziția convoiului cu sarcina P_3 în secțiune conduce la moment încovoietor maxim.

Momentul încovoietor maxim dintr-o anumită secțiune a grinzii simplu rezemate se poate determina și pe cale *grafică*, folosindu-se un funicular al sarcinilor date (fig. 91, *c*). Se știe că, pentru o anumită poziție a convoiului, funicularul trebuie limitat la ordonatele reazemelor, ducînd prin punctele corespunzătoare linia de închidere, de la care se măsoară segmentul m în dreptul secțiunii (v. fig. 14, *b*); multiplicîndu-se cu distanța polară H, se obține momentul încovoietor.

Pentru o altă poziție a convoiului, construcția ar trebui repetată, construind un nou funicular pe noile suporturi ale sarcinilor. Funicularul este același, fiind legat de convoi și deplasîndu-se o dată cu acesta. Rezultă că este mai simplu a ține pe loc convoiul și funicularul corespunzător, deplasînd grinda în raport cu convoiul, astfel ca diferite sarcini să calce în secțiunea dată. Dacă sarcinile P_3, P_4, P_5 calcă succesiv în secțiunea i, se obțin liniile de închidere a-b, a'-b', a''-b'', care delimitează segmentele m_{i3}, m_{i4}, m_{i5}, din compararea cărora se identifică poziția convoiului care dă moment încovoietor maxim în secțiunea i: în cazul figurii 91, *c* $M_{i\,max}=m_{i4}\,H$.

3. Moment maximum maximorum

La o grindă simplu rezemată, parcursă de un convoi de sarcini, inegalitățile (6.12) permit să se determine momentele încovoietoare maxime din diferite secțiuni, de exemplu împărțind grinda într-un număr de porțiuni și operînd în punctele de diviziune. Dacă în ordonatele acestor puncte se iau la scară segmente egale cu momentele maxime corespunzătoare și se unesc extremitățile cu o curbă continuă, se obține *diagrama momentelor maxime* pentru grinda dată și convoiul considerat. Această diagramă dă imaginea situației celei mai defavorabile din diferite secțiuni[1]. Diagrama are la rîndul său o ordonată maximă care reprezintă cel mai mare moment încovoietor ce se produce în grindă, cînd este parcursă de convoiul dat. Acesta este *momentul maximum maximorum*, a cărui determinare implică atît *cunoașterea secțiunii în care se produce* (secțiunea periculoasă), cît și *poziția de convoi* ce-i corespunde.

S-a arătat mai înainte că momentul încovoietor maxim într-o secțiune se produce cînd una dintre sarcini calcă în acea secțiune. Înseamnă că, *pentru poziția convoiului care dă moment maximum maximorum, una dintre sarcini calcă în secțiunea periculoasă*. Determinarea secțiunii periculoase și poziția corespunzătoare a convoiului se identifică pe bază de încercări. Numărul încercărilor poate fi mult redus și rezolvarea sistematizată, utilizînd împreună două criterii de triere.

(a) *Primul criteriu*. Se admite problema rezolvată; fie deci poziția convoiului care dă moment maximum maximorum, cu sarcina P_j călcînd în secțiunea periculoasă la abscisa x (fig. 92, *a*). Cu notațiile din figură, se poate scrie

$$M_{max\ max} = R(l-a)(a-c)/l - M_j,$$

unde R este rezultanta tuturor sarcinilor de pe grindă, iar M_j — suma momentelor tuturor sarcinilor de la stînga lui P_j, în raport cu această sarcină. Aici variabila este $a = x + c$, care definește poziția convoiului pe grindă. $M_{max\ max}$ fiind un moment încovoietor maxim pentru secțiunea periculoasă, trebuie ca $dM/da = 0$, și deci

$$\frac{R}{l}(l - c - 2a) = 0, \text{ sau } a = \frac{l}{2} + \frac{c}{2}, \tag{6.13}$$

relație care arată că *mijlocul grinzii trebuie să împartă în două părți egale distanța dintre rezultanta sarcinilor de pe grindă și sarcina care calcă în secțiunea periculoasă*.

Pe baza relației (6.13), expresia lui $M_{max\ max}$ devine

$$M_{max\ max} = R(l-c)^2/4l - M_j;$$

se vede că acesta va fi cu atît mai mare cu cît se găsesc pe grindă sarcini mai multe și mai grele (R mai mare), de asemenea cu cît c va fi mai mic.

[1] De reținut că fiecare ordonată corespunde în general altei poziții a convoiului, deci nu este vorba de efecte concomitente. Apare astfel limpede deosebirea față de o diagramă obișnuită de momente încovoietoare, trasată pentru sarcini cu poziție fixă.

Înseamnă că momentul maximum maximorum se va produce sub una dintre sarcinile *din apropierea rezultantei*.

Relația (6.13) trebuie privită sub forma $a = l/2 \pm c/2$, deoarece secțiunea periculoasă și sarcina corespunzătoare pot fi situate la stînga sau la dreapta rezultantei. Această relație reprezintă un criteriu necesar pentru așezarea convoiului în poziția de moment maximum maximorum, cînd s-ar cunoaște care este sar-

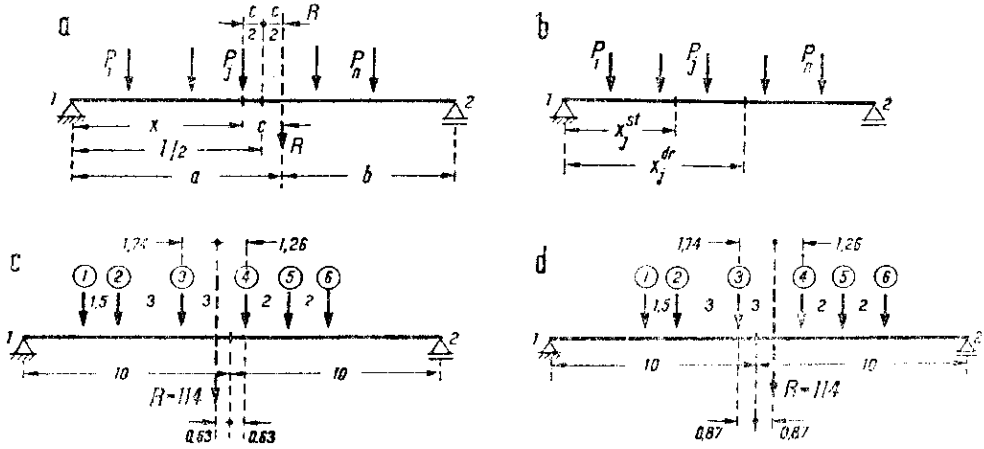


Fig. 92

cina P_j, dar nu dă nici o indicație privind identificarea sarcinii respective. Înseamnă că, eliminînd sarcinile prea îndepărtate de rezultantă (ca c să nu fie prea mare), trebuie făcute încercări cu toate celelalte sarcini, soluția rezultînd din compararea rezultatelor. O simplificare a încercărilor apare folosind și criteriul care urmează.

(b) *Al doilea criteriu*. Poziția de moment maximum maximorum este totodată poziție de moment maximum pentru secțiunea periculoasă, deci cînd sarcina P_j calcă în această secțiune (la abscisa x) trebuie să fie îndeplinite inegalitățile

$$\sum_{1}^{j} \frac{P_k}{x} > \sum_{j+1}^{n} \frac{P_k}{x'} \quad \text{și} \quad \sum_{1}^{j-1} \frac{P_k}{x} < \sum_{j}^{n} \frac{P_k}{x'}.$$

Deplasînd convoiul spre *dreapta*, momentul încovoietor din secțiunea de sub sarcina P_j va fi mereu un moment maxim, cît timp inegalitățile continuă să fie satisfăcute. Deoarece — în acest caz — x crește și x' descrește, a doua inegalitate se accentuează, în timp ce prima se atenuează și devine egalitate cînd sarcina P_j ajunge la abscisa x_j^{dr} definită de relația

$$\sum_{1}^{j} \frac{P_k}{x} = \sum_{j+1}^{n} \frac{P_k}{x'} = \frac{R}{l}, \quad \text{deci} \quad x_j^{dr} = \frac{l}{R} \sum_{1}^{j} P_k. \tag{6.14}$$

Dacă sarcina P_j depășește această abscisă, prima inegalitate se răstoarnă, și deci momentul încovoietor în secțiunea din dreptul sarcinii încetează a mai

fi moment maxim. Asemănător, deplasînd convoiul spre *stînga*, prima inegalitate se accentuează și a doua se atenuează, devenind egalitate cînd P_j ajunge la abscisa x_j^{st} definită de relația

$$\sum_{1}^{j-1} \frac{P_k}{x} = \sum_{j}^{n} \frac{P_k}{x'} + \frac{R}{l}, \quad \text{deci} \quad x_j^{st} = \frac{l}{R} \sum_{1}^{j-1} P_k. \tag{6.14'}$$

Abscisele x_j^{st} și x_j^{dr} date de relațiile (6.14) și (6.14') determină pe grindă un interval care corespunde sarcinii P_j (fig. 92, *b*); *pentru oricare dintre secțiunile intervalului, momentul încovoietor maxim se produce cînd convoiul calcă cu sarcina P_j în secțiune*. Repetînd raționamentul pentru sarcinile P_{j-1} și P_{j+1}, se obțin abscisele

$$x_{j-1}^{dr} = x_j^{st} = x_{j-1}, \quad x_j^{dr} = x_{j+1}^{st} = x_j, \tag{6.15}$$

care arată[1] că porțiunile de grindă corespunzătoare acestor sarcini sînt alăturate celei obținute pentru sarcina P. Este ușor de văzut că $x_1^{st} = 0$ și $x_n^{dr} = l$; înseamnă că, pornind din reazemul din stînga și pînă la reazemul din dreapta, grinda rezultă împărțită într-o succesiune de intervale alăturate ce corespund sarcinilor $P_1, \ldots P_j, \ldots P_n$.

Acest rezultat poate fi utilizat la determinarea momentului maximum maximorum pentru un convoi dat. Se constată că *pot fi eliminate încercările pentru acele sarcini care, așezate după criteriul indicat de relația (6.13), nu satisfac în același timp și condiția $x_j^{st} \leq x \leq x_j^{dr}$*, deoarece momentul maximum maximorum trebuie să fie moment încovoietor maxim pentru secțiunea periculoasă și, în consecință, sarcina P_j trebuie să calce pe grindă în propriul său interval.

Pentru începerea încercărilor se poate porni de la constatarea că secțiunea periculoasă este situată în apropiere de mijlocul grinzii; apare astfel posibilitatea ca aceste două secțiuni să fie cuprinse în intervalul care corespunde aceleiași sarcini a convoiului. Este deci indicat să se determine mai întîi sarcina care dă moment încovoietor maxim în secțiunea de la jumătatea deschiderii, apoi să se deplaseze convoiul astfel ca această sarcină să satisfacă primul criteriu și să se verifice îndeplinirea celui de-al doilea criteriu.

Pentru exemplificare, fie din nou grinda și convoiul din figura 91, *b*, urmînd să se determine momentul maximum maximorum. Se începe prin împărțirea grinzii în intervale, astfel:

$$x_1^{dr} = \frac{20}{114} \cdot 6 = 1{,}05 \text{ m}, \quad x_2^{dr} = \frac{21}{114} \cdot 30 = 5{,}26 \text{ m}, \quad x_3^{dr} = \frac{20}{114} \cdot 54 = 9{,}47 \text{ m}$$

$$x_4^{dr} = \frac{20}{114} \cdot 74 = 13{,}68 \text{ m}, \quad x_5^{dr} = \frac{20}{114} \cdot 94 = 16{,}50 \text{ m}.$$

Se caută apoi poziția convoiului care dă momentul încovoietor maxim în secțiunea de la mijlocul grinzii; la aplicarea inegalităților (6.12) este suficient să se compare numărătorii cînd $x = x' = l/2$). Se încearcă cu sarcinile P_3 și P_4 în secțiune

$$P_3 \quad 51 < 60 \quad \text{și} \quad 30 < 84,$$
$$P_4 \quad 71 > 60 \quad \text{și} \quad 51 < 60,$$

rezultînd că poziția căutată a convoiului este cea cu sarcina P_4 în secțiune.

[1] Obișnuit, abscisele punctelor de diviziune se notează cu indicele sarcinii pentru care punctul respectiv reprezintă limita din dreapta, calculul făcîndu-se cu formula (6.14).

Rezultanta convoiului de sarcini se aplică între sarcinile P_3 și P_4, respectiv la distanțele 1,74 m și 1,26 m de aceste sarcini. Așezînd convoiul astfel ca mijlocul grinzii să împartă în părți egale distanța dintre rezultanta R și sarcina P_4, se obține situația din figura 92, *c*, unde poziția sarcinii P_4 este definită de abscisa $x_4=10{,}63$ m. Această poziție cade în intervalul corespunzător sarcinii $P_4(9{,}47<10{,}63<13{,}68)$, astfel că ambele criterii sînt satisfăcute. Se calculează deci mărimea momentului încovoietor din secțiunea în care calcă sarcina P_4

$$V_1=114\cdot 10{,}63/20=60{,}6\ \text{kN} \qquad M_{max\ max}=60{,}6\cdot 10{,}63-6\cdot 7{,}5-24\cdot(6+3)=383{,}2\ \text{kNm}.$$

Să încercăm acum și cu sarcina P_3, așezînd convoiul astfel ca mijlocul grinzii să împartă în părți egale distanța dintre P_3 și R; se ajunge la situația din figura 92, *d*, unde poziția sarcinii P_3 este definită de abscisa $x_3=9{,}13$ m, care se încadrează cam la limită în intervalul acestei sarcini $(5{,}26<9{,}13<9{,}47)$. Calculînd și pentru acest caz valoarea momentului încovoietor din secțiunea unde calcă P_3, se găsește

$$V_1=114\cdot 9{,}13/20=52{,}1\ \text{kN}, \qquad M=52{,}1\cdot 9{,}13-6\cdot 4{,}5-24\cdot 3=376{,}7\ \text{kNm},$$

care este mai mică decît cea calculată anterior. Poziția convoiului care dă momentul maximum maximorum este cea din figura 92, *c*.

CAPITOLUL VII

STRUCTURI SPAȚIALE STATIC DETERMINATE

A. STRUCTURI ALCĂTUITE DIN BARE ARTICULATE

1. Caracteristici de alcătuire

Structurile din această categorie pot avea o mare varietate de forme și sînt folosite la construcția de turnuri, cupole, piloni, eșafodaje, infrastructuri de rezervoare etc. Prin schematizare, o asemenea structură se reduce la un ansamblu spațial de bare, a cărui invariabilitate geometrică este asigurată cînd în toate nodurile legătura dintre bare se consideră făcută prin articulații sferice perfecte. Un exemplu este dat în figura 93, *a*, care reprezintă o structură articulată în formă de turn. La baza schematizării stau anumite ipoteze simplificatoare, în totul asemănătoare celor admise la structuri articulate plane, și anume:

— în noduri sînt articulații sferice perfecte, astfel că în extremitățile barelor nu pot apărea momente încovoietoare sau de torsiune;
— barele sînt perfect axate în nodul teoretic, astfel că acțiunile date de bare asupra nodului formează un mănunchi spațial de forțe concurente;
— sarcinile se aplică numai în noduri, sub formă de forțe concentrate.

Drept consecință a acestor ipoteze, în barele structurilor articulate se dezvoltă numai eforturi axiale.

Aceste ipoteze nu concordă în întregime cu situația structurii reale, în special privitor la alcătuirea nodurilor. Sistemele de construcție curent folosite conduc la realizarea unor noduri rigide; de exemplu, la construcții metalice prinderea barelor în nod se face prin intermediul unor guseuri, care împiedică rotirea relativă dintre bare în nod. Astfel, pentru structura din figura 93, *a*, atît barele care formează inelele orizontale, cît și cele care alcătuiesc stîlpii, sînt solidarizate între ele sub formă de elemente continue; de asemenea, se prevăd rigidizări la punctele de intersecție din noduri. În această situație, deformarea structurii are un caracter mai complex. Alături de eforturile dominante, care sînt cele axiale, se dezvoltă și eforturi secundare, cum sînt cele datorite încovoierii barelor. Cît timp barele structurii au rigiditate mai redusă, efectul eforturilor secundare rămîne în limite controlabile, de care se poate ține seama la dimensionare prin corectări corespunzătoare.

Asigurarea invariabilității geometrice a unei structuri articulate, precum și fixarea sa în spațiu impun ca la alcătuirea structurii și la stabilirea rezemărilor sale să se asigure numărul minim necesar de legături, cît și dispunerea judicioasă a acestora. În acest scop apare necesar să examinăm de la început condițiile în care poate fi fixat în spațiu un corp rigid.

Cazul cel mai simplu se referă la legarea invariabilă a unui singur nod, care se realizează prin intermediul a trei bare (fig. 93, *b*) Este necesară în plus condiția ca aceste trei bare să nu fie situate în același plan. Se vede imediat că în cazul din figura 93, *c* sistemul se poate roti în jurul axei *1-3*. În situația din figura 93, *d*, unde cele trei bare sînt coplanare și sarcina *P* acționează normal pe acest plan în nodul *4*, sistemul nu este strict invariabil geometric,

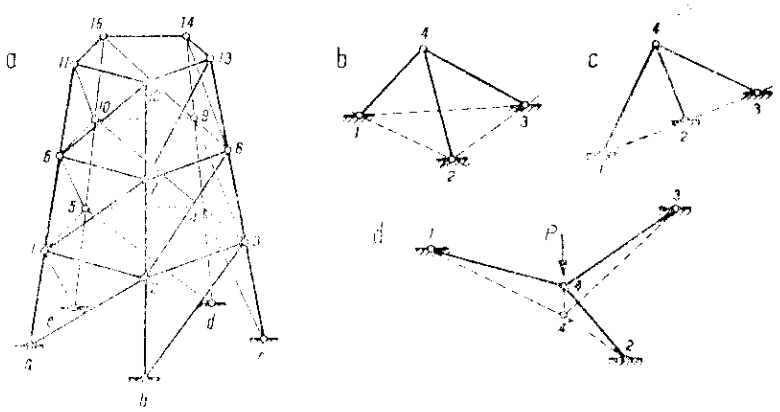


Fig. 93

deoarece există posibilitatea unei deplasări limitate a nodului *4*, după normala la plan în acest punct, fără o variație a lungimii barelor. Rezultă că *legarea invariabilă a unui nod se asigură prin trei bare care nu sînt situate în același plan*.

Trecînd la cazul unui corp rigid oarecare, este necesar să examinăm în prealabil care sînt tipurile de rezemări specifice structurilor spațiale. Acestea sînt reprezentate în formă schematizată în figurile 94, *a-c*, pentru identificarea deplasărilor pe care le împiedică:

— reazemul simplu împiedică deplasarea după o singură direcție (fig. 94, *a*) și se realizează printr-o bară articulată așezată pe direcția după care deplasarea este împiedicată;
— articulația plană (cilindrică) împiedică deplasarea numai într-un anumit plan (fig. 94, *b*) și se realizează prin două bare articulate concurente, care determină planul în care deplasarea este împiedicată;
— articulația spațială (sferică) împiedică deplasarea după orice direcție (fig. 94, *c*) și se realizează prin trei bare articulate care nu sînt situate în același plan.

Reprezentarea prin bare articulate are avantajul de a pune în evidență numărul de legături (simple); fiecare asemenea legătură poate fi înlocuită cu o reacțiune-forță aplicată asupra corpului. Toate cele trei tipuri de rezemări permit rotiri în jurul oricărei axe care trece prin punctul de rezemare.

Fie acum un corp rigid oarecare, reprezentat printr-un paralelipiped (pentru ușurarea urmăririi direcțiilor în spațiu); numărul minim de legături necesar

fixării în spațiu este arătat în figura 94, *d*. Un punct *A* al corpului poate fi fixat prin trei legături (o articulație spațială). După această fixare, un alt punct *B* se poate deplasa numai pe o sferă cu centrul în *A* și raza $\overline{AB}$; pentru fixarea acestui punct sînt suficiente numai două legături, formînd o articulație plană în planul tangent la sferă. Acum, corpul se poate roti numai în jurul axei *A-B*. Este suficient să se mai introducă o singură legătură, și anume un reazem

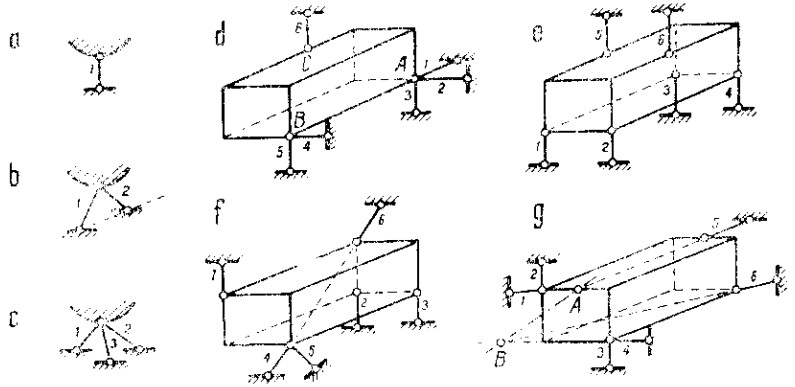


Fig. 94

simplu al cărui suport să nu intersecteze axa *A-B*, pentru a asigura fixarea completă a corpului.

Rezultă că o articulație spațială, o articulație plană și un reazem simplu sînt suficiente pentru legarea invariabilă a unui corp rigid de o bază de sprijinire. S-a utilizat în total un număr de *șase* legături, care reprezintă numărul minim necesar. Respectînd acest număr minim, distribuția legăturilor poate fi făcută în diferite moduri, cu condiția ca legăturile să se grupeze în cel puțin *trei* puncte ale corpului, cum rezultă din figura 94, *d*.

Prevederea unui număr de șase legături este o condiție necesară, dar nu totdeauna și suficientă; distribuția legăturilor trebuie să fie judicioasă, spre a asigura efectiv fixarea corpului. O cale de control constă în condiția: *să nu existe nici o axă în raport cu care momentele tuturor forțelor de legătură să fie nule*[1]. Dacă această condiție nu este îndeplinită, rezultă că — aplicînd ecuațiile de echilibru static în raport cu poziția inițială a structurii — forțele de legătură nu pot echilibra acțiunea unor sarcini care dau moment în raport cu axa respectivă. Înseamnă că distribuția legăturilor este defectuoasă, ajungîndu-se la o situație asemănătoare celei întîlnite la structurile plane (fig. 4, *d*), cînd axele celor trei bare de legătură ar fi concurente.

În figurile 94, *e-g* sînt reprezentate unele cazuri de distribuire defectuoasă a legăturilor, unde se găsește axe față de care momentele tuturor forțelor de legătură să fie nule:

[1] Se știe din Mecanica teoretică că un moment unei forțe în raport cu o axă este nul cînd suportul forței intersectează axa, sau este paralel cu ea.

(1) Cînd mai mult de trei legături sînt paralele. Astfel, dacă toate cele șase legături sînt paralele (fig. 94, *e*), se poate considera orice axă paralelă cu ele. Cînd cinci dintre legături sînt paralele, îndeplinesc condiția axele paralele cu acestea duse prin diferite puncte ale suportului celei de-a șasea legături. Dacă numai patru legături sînt paralele, se poate totdeauna duce o paralelă la acestea, care să sprijine pe suporturile celorlalte două legături.

(2) Cînd trei dintre legături sînt paralele și celelalte trei sînt concurente (fig. 94, *f*), se consideră axa paralelă la primele trei legături dusă prin punctul de intersecție al celorlalte trei.

(3) Cînd patru dintre legături sînt cuprinse în același plan (fig. 94, *g*), se determină punctele *A* și *B* în care suporturile celorlalte două legături înțeapă acest plan; față de axa *A-B*, toate cele șase forțe de legătură dau moment nul.

Asemenea distribuții defectuoase de legături nu asigură legarea invariabilă a corpului și reprezintă cazuri de formă critică, în înțelesul cunoscut de la structurile plane.

2. Condiția de invariabilitate geometrică și de determinare statică

a. **Modalități de alcătuire și controlul invariabilității geometrice.** O structură articulată spațială poate fi văzută ca alcătuită dintr-un număr de noduri legate între ele prin bare, astfel ca să formeze un ansamblu geometric invariabil și fixat în spațiu. Există două modalități de alcătuire: (1) pornind de la o bază de sprijinire și legînd succesiv nodurile cu ajutorul unui număr suficient de bare, sau (2) legînd între ele nodurile prin bare, astfel ca să se realizeze invariabilitatea geometrică proprie a structurii, după care aceasta este fixată de baza de sprijinire.

Modul cel mai simplu de alcătuire constă în fixarea unui prim nod de baza de sprijinire prin intermediul a trei bare, care nu se găsesc în același plan. Se continuă apoi cu adăugarea succesivă a cîte unui nod, legat prin cîte trei bare de puncte fixate anterior. Astfel, în figura 95, *a*, nodul *1* este legat prin trei bare de punctele *a*, *d* și *c* ale bazei de sprijinire; asemănător, nodul *2* este legat tot prin trei bare de punctele *b*, *c* și *d*. În continuare, nodurile *3* și *4* sînt legate de punctele *1*, *2* și *c*, respectiv *1*, *2* și *d*. Se poate acum trece la alcătuirea unui nou etaj, cum se vede în figura 95, *b*, unde nodurile *5*, *6*, *7* și *8* au fost adăugate succesiv prin legarea lor cu cîte trei bare de punctele anterior fixate *4,1* și *3*, *4,2* și *3*, *5,6* și *4* etc. În mod asemănător, structura poate fi completată și cu alte etaje.

Din examinarea acestui mod de alcătuire rezultă că numărul minim total de bare, necesar fixării invariabile a n noduri, este $b=3n$. Dacă se notează cu b barele care leagă între ele numai noduri și cu r numărul de bare care merg la baza de sprijinire, se poate scrie

$$b+r\geqslant 3n \text{ sau } d=b-3n+r\geqslant 0, \tag{7.1}$$

care reprezintă *condiția de invariabilitate geometrică și fixare în spațiu a struc-*

turii. Cazul $d=0$ corespunde numărului minim de bare. Pentru structura din figura 95, *b* se găsește $b=16$, $r=8$ și $n=8$ deci $d=16+8-3\cdot 8=0$.

Cealaltă modalitate de alcătuire, care conduce la structuri cu invariabilitate geometrică proprie, se vede în figura 95, *c*. În acest caz se pornește de la trei bare care formează un triunghi, de vîrfurile căruia se leagă un nod prin

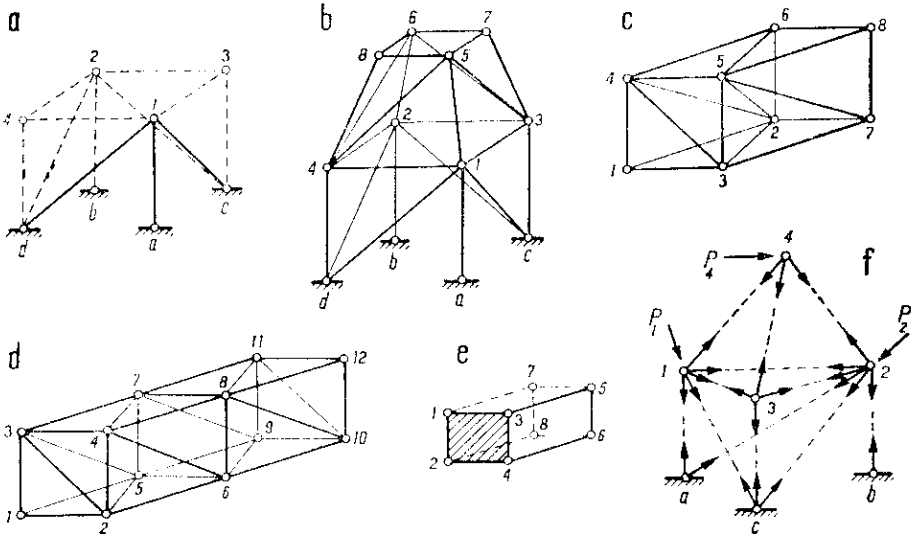


Fig. 95

alte trei bare, obținîndu-se un tetraedru care este cea mai simplă figură spațială geometric invariabilă. În continuare, se adaugă succesiv noduri fixate prin cîte trei bare de nodurile precedente (în figură, nodurile sînt numerotate în ordinea introducerii lor). Se pornește de la triunghiul *1-2-3*, căruia i se adaugă nodul *4*, obținîndu-se tetraedrul de bază; apoi nodul *5* se leagă de *2*, *3* și *4*, nodul *6* — de *2*, *4* și *5* etc.

Pentru stabilirea relației dintre numărul de bare și noduri, se constată că fiecare nod necesită cîte trei bare, afară de primele trei noduri la care sînt suficiente numai trei bare în loc de $3\cdot 3=9$ bare. Rezultă un minus de șase bare la începutul alcătuirii, astfel că $b=3n-6$. Numărul total de bare care pot alcătui structura este deci

$$b\geqslant 3n-6 \qquad \text{sau} \qquad d=b-3n+6\geqslant 0, \tag{7.2}$$

care reprezintă *condiția de invariabilitate geometrică proprie a structurii*. Cazul $d=0$ corespunde numărului minim de bare necesar.

O asemenea structură trebuie legată de baza de sprijinire. S-a arătat că, pentru aceasta, mai sînt necesare șase bare (v. fig. 94, *d*). Condiției $b\geqslant 3n-6$ de invariabilitate geometrică proprie i se mai adaugă deci condiția $r=6$ de fixare în spațiu. Însumînd aceste relații, se obține $b+r\geqslant 3n$, deci se regăsește relația generală (7.1), care este astfel valabilă oricare ar fi modul de alcătuire

a structurii. Această relație trebuie privită într-o accepție mai generală, în sensul că un plus de bare de legătură poate suplini un minus corespunzător de bare în alcătuirea structurii, cu condiția să se asigure efectiv strictă invariabilitate geometrică și fixarea în spațiu.

Relațiile (7.1) și (7.2) sînt analoage relațiilor (4.2) și (4.1) de la structuri articulate plane.

Rămîne de examinat și un al treilea mod de alcătuire, specific structurilor spațiale, care ține seama și de cerințele impuse de folosirea practică. O condiție frecvent necesară, de exemplu la turnuri, cupole etc., cere ca spațiul interior al structurii să fie complet liber, fără bare așezate ca diagonale interioare. Această condiție este satisfăcută folosind *structuri în formă de carcasă*. Sub această denumire se înțeleg acele structuri care au forma unor poliedre, cu fețe alcătuite prin juxtapunere de triunghiuri și cu vîrfuri comune pentru toate triunghiurile vecine. Înseamnă că fiecare față este de fapt o grindă cu zăbrele, care are asigurată invariabilitatea geometrică în planul său. Prin asamblarea fețelor se obține o structură spațială geometric invariabilă, nemaifiind necesare alte legături; un exemplu este dat în figura 95, *d*.

Se poate arăta că acest mod de alcătuire satisface condiția (7.2). În general, dacă fețele poliedrului ar fi poligoane oarecare, relația dintre numărul muchiilor (b), al vîrfurilor (n) și al fețelor (f) se scrie sub forma

$$b = n + f - 2,$$

care se folosește în stereotomie (teorema Euler). Stabilirea relației se face admițînd că se alcătuiește un poliedru pornind de la o primă față (fig. 95, *e*), la care se adaugă succesiv celelalte fețe și se compară numărul de muchii și de vîrfuri pe care fiecare față adăugată le aduce în plus. Pentru prima față, numărul de muchii și de vîrfuri este același; pentru fiecare dintre fețele următoare, numărul muchiilor adăugate este mai mare cu o unitate decît numărul vîrfurilor noi; ultima față închide poliedrul, deci nu aduce alte muchii și vîrfuri. Rezultă că numărul total de muchii este egal cu numărul vîrfurilor, la care se adaugă numărul fețelor micșorat cu două (prima și ultima).

În cazul structurilor care ne interesează, fețele au formă triunghiulară, fiind delimitate de trei bare (muchii), în timp ce fiecare bară face parte din două fețe; rezultă că numărul de fețe este $f = 2\,b/3$. Introducînd în relație, se obține $b - 3\,n + 6 = 0$, care arată că structura este geometric invariabilă. Astfel, pentru cazul din figura 95, *d*: $b = 30$, $n = 12$, și deci $d = 30 - 3 \cdot 12 + 6 = 0$.

Rămîne ca structura în formă de carcasă să fie legată prin șase legături de baza de sprijinire[1].

b. **Condiția de determinare statică.** O structură articulată spațială este static determinată cînd numărul total de legături este egal cu numărul de ecuații de echilibru static disponibile. Considerînd nodurile ca elemente ce trebuie legate invariabil, legăturile sînt reprezentate de către bare, atît cele care leagă nodurile două cîte două (b), cît și cele care merg la baza de sprijinire (r). Se admite că toate barele sînt suprimate și efectul lor asupra nodurilor este înlocuit prin eforturile din bare; în fiecare nod rezultă un mănunchi

[1] Această chestiune este discutată în continuare în legătură cu figura 96.

de forțe concurente în spațiu, în care se cuprind și sarcinile aplicate pe structură (fig. 95, *f*).

Numărul total de forțe de legătură este $b + r$, în timp ce pentru fiecare nod se pot scrie trei ecuații de echilibru. Rezultă că relația

$$d = b - 3n + r = 0$$

reprezintă condiția de determinare statică a structurii; se regăsește astfel condiția generală (7.1). Înseamnă că o structură articulată spațială static determinată conține numărul minim de legături care-i pot asigura invariabilitatea geometrică și fixarea în spațiu. Cînd $d < 0$, sistemul are grade de libertate, iar cînd $d > 0$, structura este static nedeterminată.

Scriind ecuațiile de echilibru pentru fiecare nod, se obține un sistem de $3n$ ecuații cu $b + r = 3n$ necunoscute, din rezolvarea căruia trebuie să rezulte o serie de valori și numai una singură pentru necunoscute, care reprezintă eforturile din bare sub acțiunea sarcinilor date. Aceasta este situația normală. Pot fi totuși alcătuite scheme de structuri la care, deși condiția $d = b - 3n + r = 0$ este îndeplinită, rezolvarea sistemului de ecuații nu conduce la soluții unice. O asemenea situație corespunde cazului cînd determinantul principal al sistemului este nul. Considerînd deci echilibrul în poziția inițială a structurii, pentru mărimi finite ale sarcinilor rezultă în bare eforturi infinite.

Fenomenul a fost întîlnit și la structurile articulate plane, unde a fost examinat în detaliu. Situația anormală semnalată se datorește *lipsei de strictă invariabilitate geometrică*, care provine dintr-o configurație particulară a structurii — *forma critică*, improprie folosirii în construcții. Sub acțiunea sarcinilor, poziția deformată nu se mai încadrează în domeniul micilor deplasări, și deci ecuațiile de echilibru nu se mai pot scrie raportate la poziția inițială a structurii. Identificarea formelor critice rezultă uneori din simpla examinare a alcătuirii, de exemplu cînd provine din nerespectarea condiției ca un nod să fie legat prin trei bare ce nu sînt cuprinse în același plan (fig. 93, *d*), sau din așezarea defectuoasă a barelor de legătură (fig 94, *e-g*). Alteori, prezența unei forme critice este mai greu de văzut direct. O cale generală de identificare constă în utilizarea *metodei sarcinii zero*, asemănător ca la structurile plane, cum se arată mai departe.

3. Categorii de structuri articulate spațiale

Modalitățile de alcătuire examinate mai sus permit să se formeze structuri variate. Se poate face și aici o clasificare asemănătoare celei utilizate la structurile articulate plane:

(1) Structuri articulate *simple*, care sînt alcătuite pornind de la o bază de sprijinire, cu adăugarea succesivă a cîte unui nod prin intermediul a trei bare care nu sînt cuprinse în același plan (fig. 96, *a*).

(2) Structuri articulate *compuse*, care rezultă din legarea de o bază de sprijinire — prin intermediul numărului corespunzător de legături — a unei structuri care are invariabilitate geometrică proprie (fig. 96, *b*).

(3) Structuri articulate *complexe*, care sînt alcătuite în alte moduri şi au în genere cel puţin patru bare în fiecare nod. Se încadrează obişnuit aici şi structurile în formă de *carcasă transformată* (fig. 96, *c*), care sînt examinate în cele ce urmează.

Structurile în carcasă, discutate în legătură cu figura 95, *d*, au invariabilitate geometrică proprie, şi deci pentru legarea lor de baza de sprijinire sînt

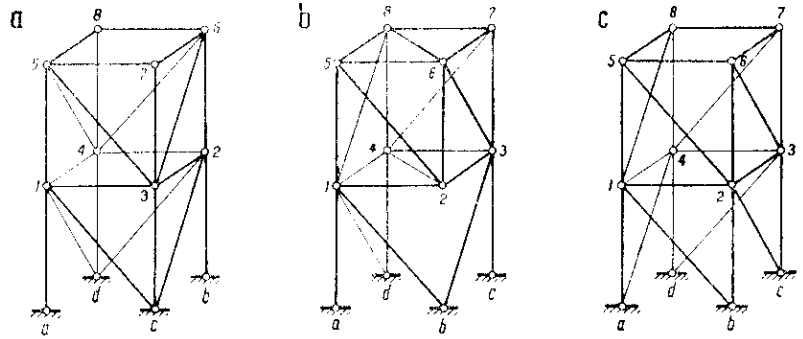


Fig. 96

suficiente şase legături, cum se vede în figura 96, *b*. Considerînd spaţiul interior de la baza de sprijinire, se constată că acesta este traversat de diagonala *2-4* de pe faţa inferioară a carcasei; de asemenea, faţa superioară conţine diagonala *6-8*. Aceste două bare pot aduce inconveniente la folosirea structurii, astfel că alcătuirea trebuie modificată spre a lăsa în întregime liber spaţiul interior.

Fără a schimba numărul total de bare, se pot face modificări de distribuţie, în sensul că suprimarea unor bare din structură poate fi compensată printr-un surplus de bare de legătură. Astfel, barele *2-4* şi *6-8* se suprimă, înlocuindu-le cu barele *2-b* şi *3-d*; rezultă structura din figura 96, *c*. Sînt acum opt bare de legătură, deci de două ori cît numărul nodurilor feţei inferioare *1-2-3-4*. Structurile obţinute prin modificarea distribuţiei barelor, astfel ca să se elimine diagonalele din faţa superioară şi cea inferioară, poartă numele de *carcase transformate*. Cînd cele două feţe au *acelaşi* număr de noduri, *invariabilitatea geometrică se asigură prevăzînd cîte o articulaţie plană la fiecare dintre nodurile feţei care se leagă de baza de sprijinire*. Acestea sînt tipurile de structuri cele mai frecvent folosite în aplicarea practică; un alt exemplu de carcasă transformată se vede în figura 93, *a*.

Pentru determinarea eforturilor din barele structurilor articulate spaţiale se utilizează aceleaşi metode cunoscute de la rezolvarea structurilor articulate plane, în primul rînd metoda izolării nodurilor şi metoda secţiunilor. La anumite tipuri de structuri este posibil să se simplifice calculul prin descompunere în sisteme plane, care se rezolvă separat, suprapunînd apoi efectele. Sînt rare cazurile de structuri articulate spaţiale care să nu poată fi rezolvate prin aceste metode. Cînd în fiecare nod sînt cel puţin patru bare şi nu apar particularităţi, trebuie recurs la alte metode (de exemplu „metoda înlocuirii barelor").

4. Metoda izolării nodurilor

a. **Specificul aplicării metodei.** În principiu, orice structură articulată spațială poate fi rezolvată prin metoda izolării nodurilor. Condiția $d=b-3n+r=0$ arată că, scriind în fiecare nod cele trei ecuații de echilibru, se ajunge la un număr de ecuații egal cu acela al necunoscutelor. O aplicare avantajoasă în condițiile calculului manual se obține însă numai cînd nu este necesar să se rezolve acest sistem de ecuații, fiind posibilă determinarea a cîte trei necunoscute pentru fiecare nod. Acesta este cazul structurilor articulate simple, unde fiecare nod este adăugat cu ajutorul a trei bare ce nu sînt situate în același plan; parcurgînd deci nodurile în ordine inversă celei folosite la alcătuire, se întîlnesc de fiecare dată numai cîte trei necunoscute. Prin aceasta, metoda izolării nodurilor este specifică rezolvării structurilor articulate simple.

Izolînd un nod, acesta este în echilibru sub acțiunea sarcinii aplicate acolo și a eforturilor din barele secționate, care formează împreună un mănunchi de forțe concurente. Condiția de echilibru poate fi exprimată grafic, prin construirea unui poligon spațial de forțe închis, cum se vede în figura 97, *a*. Compunerea forțelor P_1 și P_2 duce la rezultanta $\overline{05}$, care la rîndul său compusă

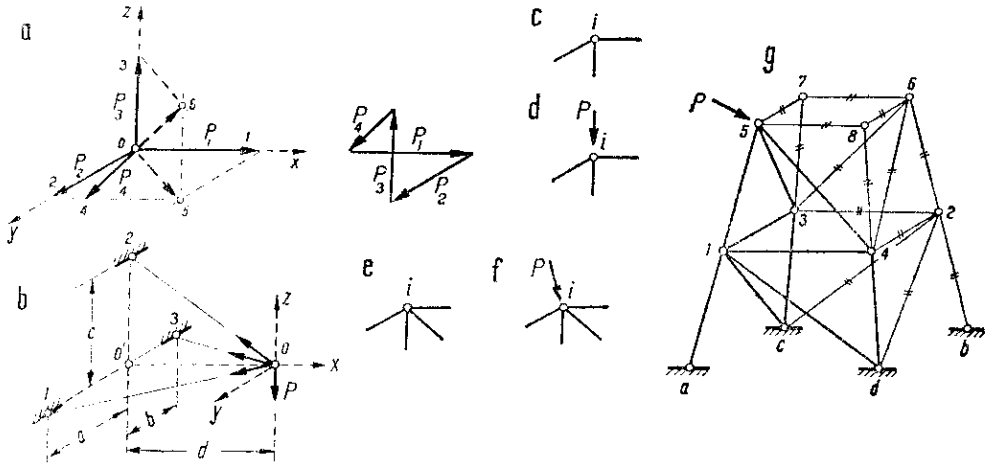


Fig. 97

cu forța P_3 dă rezultanta $\overline{06}$. Cînd forța P_4 este egală și direct opusă cu $\overline{06}$, echilibrul este asigurat; în figură este arătat poligonul de forțe închis.

O observație deosebit de utilă rezultă proiectînd ortogonal acest poligon de forțe pe un plan oarecare: se obține tot un poligon de forțe închis, format din proiecțiile forțelor pe acest plan. Înseamnă că *aplicarea condiției de închidere a poligonului spațial de forțe poate fi înlocuită prin condiții de închidere a poligoanelor proiecțiilor în plane convenabil alese*; problema de echilibru în spațiu se reduce astfel la probleme de echilibru în plan.

Analitic, condiția de echilibru se aplică prin ecuații de proiecții după trei axe convenabil alese. Astfel, pentru cazul din figura 97, *b*, se pot alege axele *xyz*, cu originea în punctul 0. Cosinusurile directoare pentru fiecare bară sînt date de raportul dintre lungimea proiecției barei pe axa considerată și lungimea barei. Astfel, pentru o bară oarecare i de lungime l_i și ale cărei proiecții pe axe au lungimile l_x, l_y, l_z, se obține

$$\cos(i, x) = l_x/l_i, \quad \cos(i, y) = l_y/l_i, \quad \cos(i, z) = l_z/l_i. \tag{7.3}$$

De exemplu, notînd cu N_1, N_2, N_3 eforturile din barele *0-1*, *0-2* și *0-3*, rezultă

$$(\text{pr. } ox) \quad -N_1 d/l_1 - N_2 d/l_2 - N_3 d/l_3 = 0,$$

$$(\text{pr. } oy) \quad N_1 a/l_1 - N_3 b/l_3 = 0, \quad (\text{pr. } oz) \quad N_2 c/l_2 - P = 0,$$

de unde se obțin mărimile eforturilor

$$N_1 = -Pbl_1/c\,(a+b), \quad N_2 = Pl_2/c, \quad N_3 = -Pal_3/c\,(a+b).$$

Cînd se lucrează cu proiecțiile eforturilor pe diferite plane, apare frecvent necesitatea de a se trece de la mărimea unui anumit efort N dintr-o bară, la mărimea N_Δ a proiecției efortului pe o axă oarecare Δ; de asemenea, trecerea inversă. În acest scop se aplică relațiile

$$N_\Delta = Nl_\Delta/l \quad \text{sau} \quad N = N_\Delta l/l_\Delta, \tag{7.4}$$

unde l este lungimea barei, iar l_Δ — lungimea proiecției barei pe axa Δ.

La rezolvarea structurilor articulate spațiale prin metoda izolării nodurilor este indicat să se folosească eventuale situații particulare care conduc la simplificări, de exemplu situațiile de simetrie. De asemenea, ținînd seama de unicitatea soluțiilor care satisfac ecuațiile de echilibru static pentru structuri static determinate ($D \neq 0$), înseamnă că oricare ar fi calea prin care se găsește o astfel de serie de valori pentru necunoscute, *aceasta reprezintă cu certitudine soluția problemei*.

Aplicarea metodei izolării nodurilor poate fi ușurată și totodată extinsă și la alte categorii de structuri articulate spațiale, dacă se utilizează anumite particularități, și anume:

— Cînd într-un nod se întîlnesc numai trei bare nesituate în același plan și dacă în acel nod nu este aplicată o sarcină (fig. 97, *c*), eforturile din cele trei bare sînt nule, deoarece trei forțe își pot face echilibru numai dacă sînt coplanare.

— În aceeași situație ca la cazul precedent, dacă în nod se aplică o sarcină pe direcția uneia dintre bare (fig. 97, *d*), efortul din această bară are mărime egală cu sarcina, iar eforturile din celelalte două bare sînt nule, deoarece, proiectînd pe un plan normal pe direcția sarcinii, proiecțiile eforturilor din cele două bare nu sînt direct opuse spre a se echilibra.

— Cînd într-un nod se întîlnesc mai multe bare, dintre care toate — afară de una — sînt situate în același plan și cînd în nod nu acționează nici o sarcină (fig. 97, *e*), efortul din bara nesituată în planul celorlalte este nul, cum rezultă din proiectarea pe o axă normală la acest plan.

În aceeași situație ca la cazul precedent, dacă în nod acționează o sarcină de direcție oarecare (fig. 97, *f*), efortul din bara necoplanară cu celelalte poate fi determinat direct, folosind proiectarea pe o axă normală la plan, deși în nod sînt mai mult de trei necunoscute.

Folosirea acestor particularități servește în primul rînd la identificarea *barelor inactive* dintr-o structură, pentru o anumită situație de încărcare. Aceasta este prima operație care trebuie făcută, reținînd numai barele active, și deci simplificînd schema structurii care trebuie rezolvată. Un exemplu se vede în figura 97, *g*, încărcarea fiind constituită dintr-o singură sarcină *P* aplicată în nodul *5*. Nodurile *7* și *8* au cîte trei bare nesituate în același plan, deci toate aceste bare sînt inactive. Suprimîndu-le, în nodul *6* rămîn tot numai trei bare, deci și acestea sînt inactive. Rezultă că din etajul superior al structurii numai barele *1-5*, *3-5* și *4-5* au eforturi și acestea se determină din echilibrul nodului *5*. Trecînd la etajul inferior, se constată că în nodurile *3* și *4* au rămas numai cîte patru bare, dintre care trei sînt situate în același plan, astfel că, în concordanță cu cazul din figura 97, *e*, barele *3-2* și *4-2* sînt inactive. Trecînd la nodul *2*, se constată că au mai rămas numai trei bare nesituate în același plan, care sînt deci inactive. Se ajunge la concluzia că pentru sarcina dată lucrează numai barele trasate plin pe figură. Eforturile respective se găsesc din echilibrul nodurilor *3* și *4* (echilibru în plan), precum și a nodului *1*.

b. **Identificarea formelor critice prin metoda „sarcinii-zero".** Ideea metodei a fost expusă anterior, în legătură cu figura 56 pentru structuri plane, rămînînd în totul aceeași și aici: dacă pentru structura neîncărcată se poate găsi o serie de valori diferite de zero ale eforturilor din bare, care să satisfacă condițiile de echilibru ale tuturor nodurilor, înseamnă că structura considerată are formă critică.

Forma cea mai simplă de aplicare, utilizabilă la structuri articulate simple, compuse și la unele tipuri de structuri complexe, constă în folosirea procedeului de identificare a barelor inactive expus mai sus. Considerînd structura neîncărcată, se examinează succesiv situația din diferite noduri, ținînd seama de cazurile din figurile 97, *c-f*; dacă nici una din barele structurii nu poate avea efort, înseamnă că este asigurată strictă invariabilitate geometrică. Astfel, pentru structura din figura 97, *g*, dacă se îndepărtează sarcina *P*, atunci situația din nodurile *5* și *1* devine aceeași ca pentru nodurile *6* și *2*, rezultînd că toate barele sînt inactive.

Cînd această cale nu se dovedește practicabilă, metoda sarcinii-zero trebuie aplicată în forma sa specifică, considerînd că într-o bară efortul ar fi diferit de zero și controlînd echilibrul în celelalte noduri. Pentru exemplificare, în figura 98 sînt arătate două structuri alcătuite asemănător, singura deosebire provenind de la numărul de bare al conturului poligonal de la talpa superioară: în primul caz, un număr par de bare, în al doilea — un număr impar. Admițînd că nu se aplică nici o sarcină, în fiecare nod trebuie examinată posibilitatea echilibrului celor patru eforturi din barele care se întîlnesc în acel nod. Dintre acestea, două sînt cuprinse în planul orizontal, iar celelalte două în planul definit de barele înclinate. Pentru echilibru, rezultantele

perechilor de eforturi trebuie să fie egale și direct opuse, deci suportul lor comun să fie cuprins în ambele plane — linia de intersecție a planelor (arătată punctat în fiecare nod). Ținînd seama că perechile de bare sînt egal înclinate, înseamnă că eforturile respective sînt egale ca mărime și au semne contrare. Pe această bază se poate examina succesiv echilibrul tuturor nodurilor.

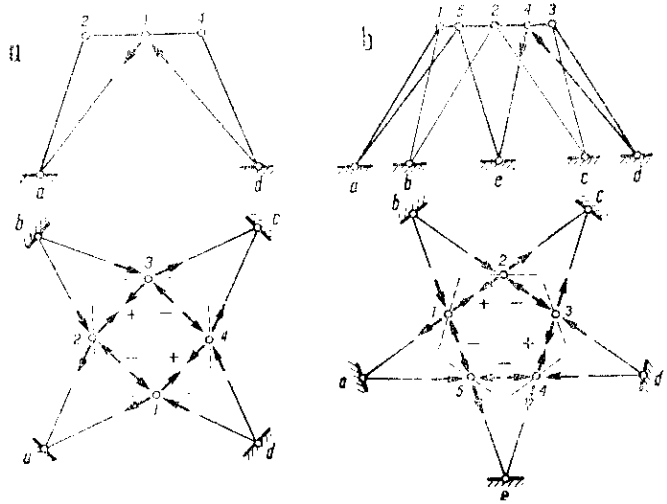


Fig. 98

În cazul *a*), admițînd un efort de întindere în bara *1-a*, rezultă în bara *1-d* un efort egal de compresiune. De asemenea, în barele *1-4* și *1-2* apar eforturi egale și de semne contrare, anume întindere în bara *1-4* și compresiune în bara *1-2*. Nodul *1* poate fi deci în echilibru sub acțiunea acestor eforturi diferite de zero. Se trece la nodul *2*, unde este cunoscut efortul din bara *1-2*; situația este asemănătoare și echilibrul nodului poate fi asigurat de eforturi avînd semnele din figură. La fel în nodul *3*. Ajungînd la ultimul nod — *4* — se constată că barele *1-4* și *3-4* au eforturi egale și de sens contrar, deci rezultanta lor este după linia intersecției celor două plane; prin condiția de echilibru a nodului se obțin și eforturile din barele înclinate. S-a găsit astfel o serie de valori diferite de zero pentru eforturi, care asigură echilibrul tuturor nodurilor; concluzia: sistemul are formă critică. Concluzia rămîne aceeași, oricare ar fi numărul *par* al barelor conturului poligonal.

În cazul *b*) se procedează în același mod. Admițînd un efort de întindere în bara *1-a* și controlînd echilibrul nodurilor *1*, *2*, *3* și *4*, se ajunge la eforturile indicate pe figură; În ultimul nod — *5* — se constată că barele *1-5* și *4-5* au ambele efort de compresiune, astfel că rezultanta lor este dirijată *normal* pe linia de intersecție a celor două plane. Rezultă că *echilibrul în nodul 5 este imposibil*, deci ipoteza cu admiterea de eforturi diferite de zero în bare nu poate fi acceptată. Înseamnă că structura dată este geometric invariabilă. La aceeași concluzie se ajunge oricare ar fi numărul *impar* al barelor conturului poligonal.

5. Formulare matriceală a metodei izolării nodurilor

Se adoptă aceeași modalitate de sistematizare utilizată pentru grinzi cu zăbrele plane, extinzînd-o la structuri articulate spațiale.

Structura se raportează la un sistem general de axe (fig. 99, *a*), față de care o bară oarecare i, cuprinsă între nodurile j și k, apare definită prin coordonatele (x_j, y_j, z_j) și (x_k, y_k, z_k) ale acestor noduri. Direcția axei barei se raportează la sistemul general folosind cosinusurile sale directoare, sub forma

$$\cos(i, x)=(x_k-x_j)/l, \quad \cos(i, y)=(y_k-y_j)/l, \quad \cos(i, z)=(z_k-z_j)/l,$$

$$\text{unde } l=\sqrt{(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2+(z_k-z_j)^2}.$$

Se admite și aici drept sens pozitiv al axei barei sensul $j\to k$ ($k>j$), în raport cu care rezultă semnele cosinusurilor directoare.

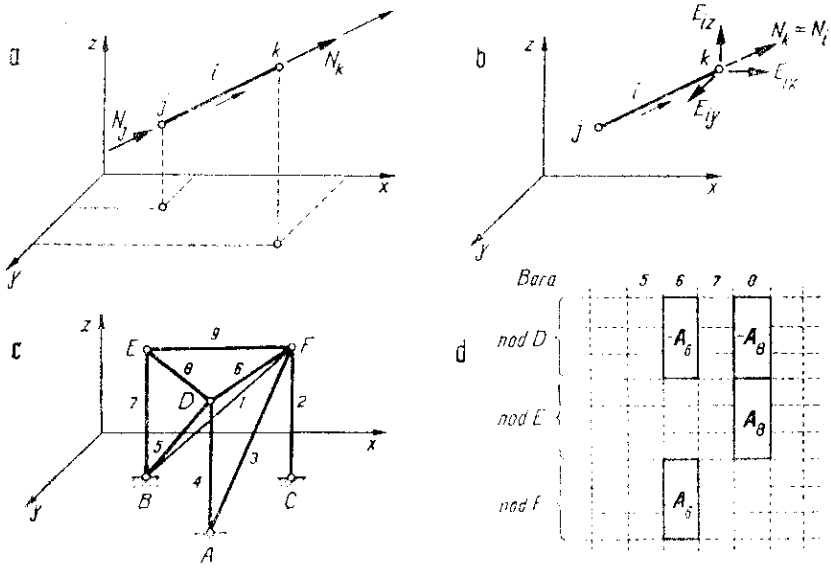


Fig. 99

Eforturile N_j și N_k din extremitățile barei sînt admise pozitive în sensul $j\to k$; din echilibrul barei rezultă $N_k=N_i$ și $N_j=-N_i$, unde N_i este efortul din bară (efort pozitiv — întindere). În figura 99, *b* se vede trecerea de la efortul axial $N_k=N_i$ la componentele sale E_{xi}, E_{yi}, E_{zi} după cele trei axe; se scrie

$$\left.\begin{aligned} E_{xi}&=N_i\cos(i, x),\\ E_{yi}&=N_i\cos(i, y),\\ E_{zi}&=N_i\cos(i, z),\end{aligned}\right\} \quad \text{sau} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} E_{xi}\\ E_{yi}\\ E_{zi}\end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_i}=\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(i, x)\\ \cos(i, y)\\ \cos(i, z)\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i}[N_i], \tag{7.5}$$

unde matricea de transformare $\mathbf{A}_i$ efectuează descompunerea în componente. Rezultă deci

$$\text{extremitate } k\text{: } \mathbf{E}_i=\mathbf{A}_iN_i; \quad \text{extremitate } j\text{: } -\mathbf{E}_i=-\mathbf{A}_iN_i. \tag{7.6}$$

Trecînd la asamblarea barelor în noduri, aceasta se efectuează prin exprimarea condiției de echilibru a nodului, în forma arătată la grinzi cu zăbrele plane: rezultanta eforturilor din extremitățile tuturor barelor care vin în mod firesc trebuie să coincidă cu rezultanta sarcinilor aplicate pe nod. Atît eforturile, cît și sarcinile, se raportează la sistemul general de axe. Se va ține seama la fiecare bară ce vine în nod dacă extremitatea respectivă este extremitate k sau j. Astfel, pentru structura din figura 99, *c*, nodul F este extremitate k pentru barele *1*, *2* și *3* ,respectiv extremitate j pentru barele *6* și *9*. În formă matriceală, condiția de echilibru se scrie

$$\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3-\mathbf{E}_6-\mathbf{E}_9=\mathbf{P}_F,$$

sau

$$\mathbf{A}_1N_1+\mathbf{A}_2N_2+\mathbf{A}_3N_3-\mathbf{A}_6N_6-\mathbf{A}_9N_9=\mathbf{P}_F, \qquad \mathbf{P}_F=\begin{bmatrix} P_{xF} \\ P_{yF} \\ P_{zF} \end{bmatrix}, \tag{7.7}$$

unde s-a ținut seama de (7.6).

Scriind ecuațiile de echilibru pentru toate nodurile structurii, se ajunge la un sistem de ecuații liniare de forma

$$\mathbf{AN}=\mathbf{P} \quad \text{și deci} \quad \mathbf{N}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}, \tag{7.8}$$

unde matricea $\mathbf{A}$ a coeficienților rezultă din asamblarea matricelor $\mathbf{A}_i$ și $-\mathbf{A}_i$ provenite de la bare; ea are dimensiunea $(3\,n \cdot b)$ — cîte trei rînduri pentru fiecare nod (trei ecuații de proiecții), cîte o coloană pentru fiecare bară (necunoscută). Matricea-coloană $\mathbf{N}$ cuprinde eforturile $N_1, N_2, \ldots N_b$ din bare, iar matricea-coloană $\mathbf{P}$ cuprinde succesiunea grupelor de cîte trei componente (cu semnele lor) ale sarcinilor aplicate în noduri.

Structura este static determinată cît timp sistemul de ecuații (7.8) se poate rezolva, deci cînd matricea $\mathbf{A}$ este *pătrată* și nesingulară[1]; înseamnă că $b=3\,n$, condiție cunoscută din relația (7.1). Trebuie precizat că b reprezintă aici totalitatea barelor structurii, atît barele care leagă între ele perechi de noduri, cît și cele care leagă nodurile cu baza de sprijinire.

Matricea globală $\mathbf{A}$ se poate forma *direct*, cum se vede din relațiile (7.6), depunînd matricele $\mathbf{A}_i$ și $-\mathbf{A}_i$ pentru fiecare bară i în dreptul nodurilor pe care le leagă. De exemplu, pentru bara *6* a structurii din figura 99, *c*, care leagă nodurile D și F $(F>D)$, în coloana 6 a matricei $\mathbf{A}$ se depune matricea $\mathbf{A}_6$ în dreptul nodului F și matricea $-\mathbf{A}_6$ în dreptul nodului D (fig. 99, *d*). Matricele de forma $\mathbf{P}_F$ se depun în matricea-coloană $\mathbf{P}$ în dreptul nodului respectiv. Urmează inversarea matricei $\mathbf{A}$ și multiplicarea cu matricea-coloană $\mathbf{P}$, pentru a obține matricea-coloană $\mathbf{N}$ a eforturilor din bare.

Cînd se urmărește determinarea eforturilor din barele structurii pentru mai multe situații de încărcare cu sarcini, acestea se pot cuprinde într-o singură

[1] Dacă matricea $\mathbf{A}$ rezultă singulară, structura are formă critică.

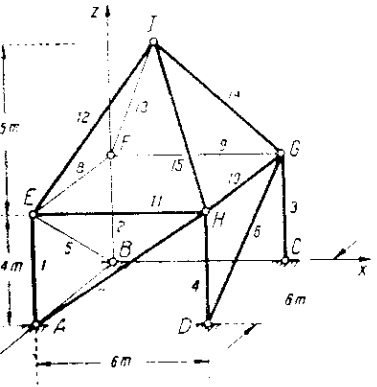


Fig. 106

Tabela 2.

$A =$

$\cos(i,x)$	0	0	0	0	0	0	0,832	0	1	0	1	0,457	0,457	−0,457	−0,457
$\cos(i,y)$	0	0	0	0	−0,832	−0,832	0	1	0	1	0	0,457	0,457	−0,457	0,457
$\cos(i,z)$	1	1	1	1	−0,555	−0,555	−0,555	0	0	0	0	−0,762	0,762	−0,762	+0,762
Bara	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nod E	0				0			0			−1	0,457			
	0				+0,832			1			0	−0,457			
	1				−0,555			0			0	−0,762			
Nod F		0						0	−1				−0,457		
		0						−1	0				−0,457		
		1						0	0				−0,762		
Nod G			0			0			1	0				+0,457	
			0			−0,832			0	−1				−0,457	
			1			+0,555			0	0				−0,762	
Nod H				0			+0,832			0	1				−0,457
				0			0			1	0				+0,457
				1			+0,555			0	0				−0,762
Nod I												+0,457	+0,457	−0,457	−0,457
												−0,457	+0,457	+0,457	−0,457
												+0,762	+0,762	+0,762	+0,762

Matricea globală A a structurii

matrice **P**, la care se introduce cîte o coloană separată pentru fiecare situație. Matricea capătă astfel dimensiunea $(3n \cdot l)$, unde l este numărul situațiilor de încărcare. Corespunzător, și matricea **N** va avea l coloane, fiecare cuprinzînd eforturile care provin de la cîte una dintre situații. Rezultă

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1^{(1)} & \dots & N_1^{(l)} \\ \vdots & & \\ N_i^{(1)} & \dots & N_i^{(l)} \\ \vdots & & \\ N_b^{(1)} & \dots & N_b^{(l)} \end{bmatrix}}_{N} = [A]^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} P_A^{(1)} & \dots & P_A^{(l)} \\ \vdots & & \\ P_J^{(1)} & \dots & P_J^{(l)} \\ \vdots & & \\ P_N^{(1)} & \dots & P_N^{(l)} \end{bmatrix}}_{P},$$

unde matricea **A** rămîne aceeași, deoarece elementele sale depind numai de alcătuirea structurii.

Schema logică a procedeului este în totul asemănătoare celei din figura 58.

Un exemplu de asamblare a matricei globale **A** este dat în tabela 2 pentru structura articulată spațială din figura 100. S-au format mai întîi matricele $\mathbf{A}_i$ corespunzătoare fiecărei bare, care cuprind cele trei cosinusuri directoare, apoi s-au depus în matricea globală conform schemei din figura 99, *d*.

6. Metoda secțiunilor

Spre deosebire de metoda izolării nodurilor, în metoda secțiunilor se izolează o porțiune rigidă din structură, prin secționarea barelor care o leagă de rest. Deoarece în spațiu sînt disponibile șase ecuații de echilibru, secționarea folosită trebuie să taie numai șase bare; aceasta corespunde cu numărul minim de bare necesar legării invariabile a porțiunii izolate de restul structurii. Distribuția barelor secționate trebuie să fie astfel, încît să nu existe nici o axă în raport cu care momentele eforturilor din toate barele secționate să fie nule; chestiunea a fost discutată anterior în legătură cu figura 94. Aplicarea metodei secțiunilor este specifică structurilor articulate *compuse*, ocolind dificultățile pe care le întîmpină în genere folosirea izolărilor de noduri, cînd în fiecare nod se întîlnesc mai mult de trei bare.

Structura din figura 101, *a*, la care se urmărește determinarea eforturilor din barele tronsonului cuprins între planele *1-2-3* și *4-5-6*, poate fi privită ca o structură articulată compusă. Cele două tronsoane superioare, considerate separat, au invariabilitate geometrică proprie datorită formei de carcasă; de asemenea și tronsonul inferior, alcătuit din triunghiul *1-2-3*, ale cărui noduri sînt legate prin șase bare de baza de sprijinire. Aceste două porțiuni de structură sînt legate invariabil între ele, tocmai prin cele șase bare ale căror eforturi trebuie determinate; eforturile pot fi puse în evidență efectuînd secționarea arătată în figură.

Privitor la modul de aplicare a condiției de echilibru, se dă de obicei preferință ecuațiilor de momente în raport cu axe convenabil alese. Este cunoscut

că momentul unei forțe P, în raport cu o axă Δ, este egal cu momentul proiecției P' a forței pe un plan normal la axă, față de punctul unde axa înțeapă acest plan. Rezultă deci $M_\Delta = P'd$, unde d este distanța de la punctul de înțepare la P'. Sensul pozitiv al momentului corespunde unei rotiri în sens orar, pentru un observator care privește dinspre sensul pozitiv al axei Δ. Se vede că momentul M_Δ poate fi nul numai cînd proiecția P' a forței este

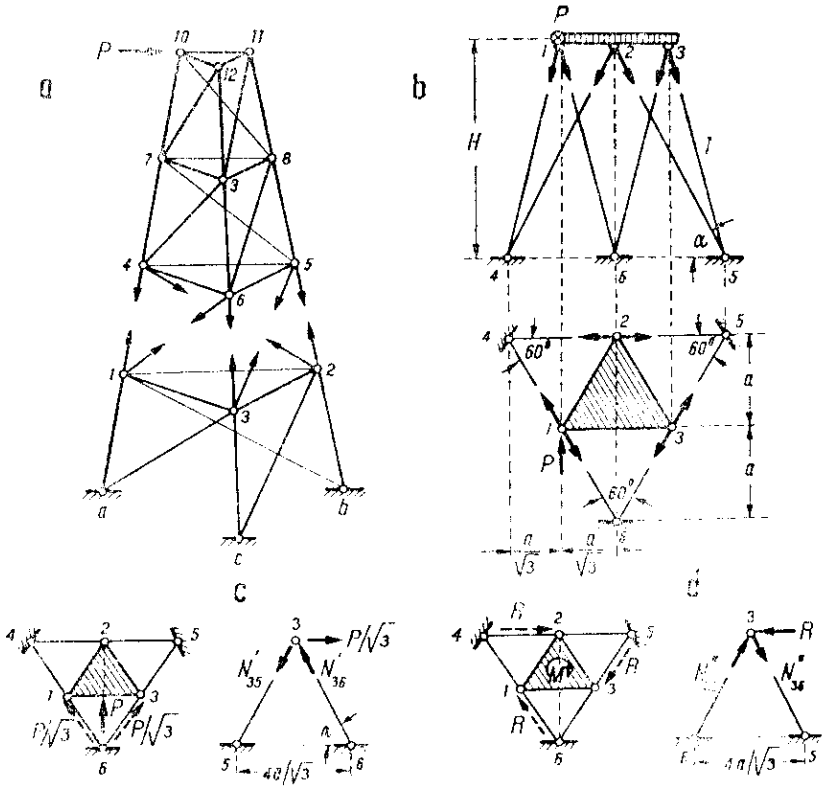


Fig. 131

nulă, sau cînd distanța d este nulă. Rezultă că momentul unei forțe în raport cu o axă este nul cînd forța este paralelă cu axa sau o intersectează, deci cînd forța și axa sînt *coplanare*.

La scrierea ecuațiilor de echilibru se va proceda cu discernămînt, evitîndu-se rezolvarea de sisteme de ecuații; se va urmări determinarea succesivă a necunoscutelor. Din Mecanica teoretică se știe că cele șase ecuații de echilibru disponibile nu trebuie totdeauna aplicate sub forma a trei ecuații de momente și trei ecuații de proiecții; ecuațiile de proiecții pot fi înlocuite — în parte sau în total — tot prin ecuații de momente, cu condiția ca ecuațiile folosite să fie *independente*. Cînd prin utilizarea ecuațiilor de momente nu se

poate ajunge la ecuații cu o singură necunoscută, este totdeauna posibil ca — pentru un grup de două necunoscute — să se găsească două axe diferite care elimină pe celelalte patru forțe de legătură. Se obțin astfel sisteme de câte două ecuații cu două necunoscute.

Un exemplu este dat în figura 101, *b*. O platformă triunghiulară rigidă este legată de baza de sprijinire prin intermediul a șase bare; triunghiurile *1-2-3* și *4-5-6* sînt echilaterale. Asupra platformei acționează o sarcină orizontală P, aplicată în nodul *1*; se caută eforturile din cele șase bare.

Față de alcătuirea sistemului, este indicat să se considere perechile de necunoscute care se întîlnesc în fiecare dintre nodurile *1*, *2* și *3*. Scriind ecuații de momente în raport cu axele *1-2*, *1-3* și *2-3* din planul platformei și ținînd seama că cele două bare din fiecare nod sînt egal înclinate, rezultă

$$N_{36}+N_{35}=0, \qquad N_{21}+N_{25}=0, \qquad N_{16}+N_{14}=0,$$

deci eforturile sînt două cîte două egale și de sens contrar.

Rămîne să se mai scrie cîte o ecuație pentru fiecare pereche de necunoscute, luînd momente în raport cu axele verticale duse prin punctele *4*, *5* și *6*. Fiecare dintre aceste axe reprezintă intersecția a două plane, de exemplu *4-1-6* și *4-2-5*, care conțin patru dintre legături. Ecuațiile sînt

$$(N_{36}-N_{35})\cos\alpha\cdot 2a-Pa/\sqrt{3}=0, \qquad -(N_{21}-N_{25})\cos\alpha\cdot 2a+Pa/\sqrt{3}=0,$$

$$(N_{16}-N_{14})\cos\alpha\cdot 2a+3Pa/\sqrt{3}=0,$$

unde, introducînd $\cos\alpha=2a/\sqrt{3}\,l$ (l = lungimea barelor de legătură), se obține

$$N_{36}-N_{35}=Pl/4a, \qquad N_{21}-N_{25}=Pl/4a, \qquad N_{16}-N_{14}=3Pl/4a.$$

Rezolvînd grupele de ecuații care conțin aceleași perechi de necunoscute, se găsește

$$N_{36}=-N_{35}=Pl/8a, \qquad N_{21}=-N_{25}=Pl/8a, \qquad N_{14}=-N_{16}=3Pl/8a,$$

care sînt eforturile căutate din barele de legătură.

În unele cazuri, determinarea forțelor de legătură poate fi efectuată mai simplu înlocuind sarcinile care acționează asupra porțiunii rigide izolate printr-un *sistem de forțe echivalent* (care are aceeași rezultantă). Prin aceasta, efectul asupra porțiunii rigide în ansamblu nu se modifică, deci implicit nu se schimbă nici efectul asupra legăturilor. Desigur, utilizarea unui sistem de forțe echivalent se referă *numai* la determinarea forțelor de legătură.

Se reia cazul structurii din figura 101, *b*. Sarcina P aplicată în nodul *1* poate fi înlocuită printr-o forță paralelă, acționînd în planul de simetrie (fig. 101, *c*), și un cuplu cuprins în planul platformei (fig. 101, *d*). Se determină separat eforturile pentru fiecare din aceste încărcări, apoi se suprapun efectele.

În primul caz, efectul asupra platformei este același dacă forța P se înlocuiește prin componentele sale de mărime $P/\sqrt{3}$ — aplicate în nodurile *1* și *3*, pe liniile de intersecție ale planelor verticale *4-1-6* și *5-3-6* cu planul orizontal al platformei. Se obțin componente care lucrează direct asupra barelor de legătură, rezultînd eforturile

$$N'_{36}=-N'_{35}=Pl/4a, \qquad N'_{21}=N'_{25}=0, \qquad N'_{16}=-N'_{14}=Pl/4a.$$

În al doilea caz, trebuie ținut seama că acțiunea platformei asupra nodurilor *1*, *2* și *3* conduce la forțe orizontale R aplicate în aceste puncte. Totodată, rezultantele perechilor de forțe de legătură sînt cuprinse în planele verticale definite de axele perechilor de legături. Acțiunea R trebuie să fie echilibrată de rezultanta forțelor de legătură; rezultă că direcția lor comună este după linia de intersecție a planului platformei cu planul determinat de cele două legături. Mărimea celor trei forțe R, care înlocuiesc efectul cuplului $M=Pa/\sqrt{3}$, se obține printr-o ecuație de momente în raport cu axa verticală care trece prin centrul de greutate al platformei

$$Pa/\sqrt{3}=3R\cdot 2a/3, \quad \text{deci} \quad R=P/2\sqrt{3}.$$

Forțele R lucrînd direct asupra barelor de legătură, se obține

$$N''_{36}=N''_{25}=N''_{14}=-\frac{P}{8}\frac{l}{a} \text{ și } N''_{35}=N''_{24}=N''_{16}=+\frac{P}{8}\frac{l}{a}.$$

Suprapunînd eforturile corespunzătoare celor două cazuri, se regăsesc rezultatele obținute mai sus cu ajutorul ecuațiilor de momente.

7. Reducerea la sisteme plane

Rezolvarea structurilor în formă de carcasă sau de carcasă transformată poate fi deseori simplificată printr-o descompunere în sisteme plane. Acest procedeu are la bază proprietatea de unicitate a soluției la structuri static determinate, urmînd să se determine o serie de valori pentru eforturile din bare, care să satisfacă echilibrul în toate nodurile.

Deoarece fețele laterale ale structurilor din această categorie sînt alcătuite prin juxtapunere de triunghiuri, înseamnă că fiecare față în parte este o grindă cu zăbrele plană, care are propria sa invariabilitate geometrică. Fața respectivă poate deci prelua sarcinile care acționează în planul său, dacă alcătuirea structurii îi asigură rezemările corespunzătoare.

Pentru aplicarea procedeului se descompun sarcinile date în componente cuprinse în planele fețelor laterale și se identifică rezemările grinzilor cu zăbrele plane respective. Considerînd numai componentele cuprinse în planul

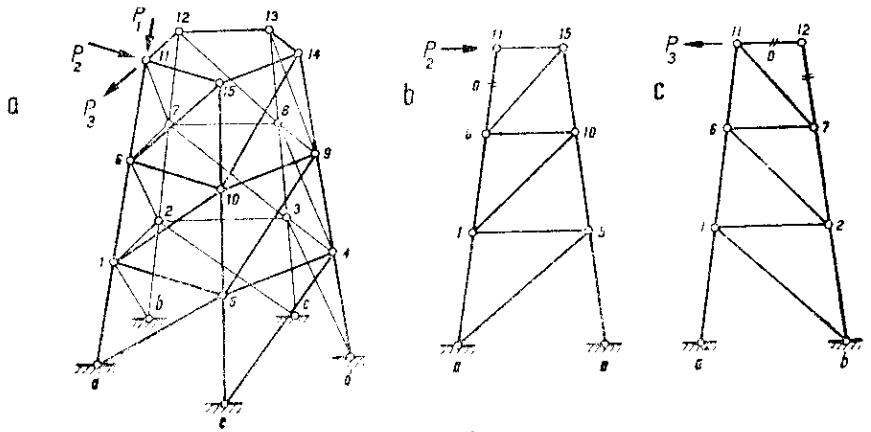


Fig. 102

unei asemenea grinzi, toate barele structurii care nu fac parte sau nu contribuie la sprijinirea acesteia sînt inactive. Se pot astfel determina separat eforturile din barele fiecărei grinzi cu zăbrele plane, suprapunînd apoi efectele pentru barele comune.

Un exemplu este dat în figura 102, unde se vede o carcasă transformată care are cinci fețe laterale și este încărcată cu o sarcină de direcție oarecare aplicată în nodul *11*. Se descompune această sarcină în componentele P_1, P_2 și P_3, dirijate respectiv după axele barelor *11-6*, *11-15* și *11-12*. Pentru componenta P_1,

toate barele structurii sînt inactive, cu excepția stîlpului *11-6-1-a*, în care apare un efort de compresiune de mărime P_1. Componenta P_2 acționează în planul feței *a-11-15-e* (fig. 102, *b*), iar componenta P_3 — în planul feței *a-11-13-b* (fig. 102, *c*); fiecare dintre aceste două grinzi cu zăbrele are rezemările necesare în planul său. Se controlează ușor, pe baza cazurilor din figura 97, că de fiecare dată toate celelalte bare ale structurii sînt inactive. Rezolvînd cele două grinzi cu zăbrele plane (care au de asemenea unele bare inactive), se obțin eforturile din barele care lucrează; barele *11-6*, *6-1* și *1-a* participă la preluarea celor trei componente, deci trebuie efectuată suprapunerea de efecte.

B. GRINZI PLANE ÎNCĂRCATE NORMAL PE PLANUL LOR

1. Caracteristici de alcătuire

Grinzile curbe sau cotite plane se întîlnesc în construcții la susținerea balcoanelor, la castele de apă și, în general, la construcții care au părți curbe sau poligonale. Asemenea grinzi reprezintă un caz particular de sistem spațial, fiind situate obișnuit în planul orizontal și suportînd sarcini verticale.

Ca sistem de referință, planul care conține axa grinzii este definit de axele x și z, iar axa y — normală pe plan — reprezintă direcția comună a sarcinilor; ansamblul grinzii se raportează la un asemenea sistem de axe. Trecînd la secțiuni, fiecare dintre acestea are propriul său sistem de axe: axa ξ corespunde tangentei la axa grinzii, axa ζ este după normala principală și axa y este normală la plan; sensurile pozitive ale acestor axe se văd în figura 103, *a*.

Secționînd grinda în punctul *i* și reducînd forțele exterioare de la stînga secțiunii în raport cu centrul de greutate al feței din dreapta, se obține o rezultantă-forță și un cuplu, caracterizat printr-o rezultantă-moment. Deoarece forțele exterioare sînt toate normale pe plan, rezultanta-forță este de asemenea normală pe plan și reprezintă *forța tăietoare* T_i din secțiune. Rezultanta-moment este cuprinsă în planul grinzii și poate fi descompusă în componente: componenta după axa ζ reprezintă *momentul încovoietor* M_i, iar componenta după axa ξ — normală pe planul secțiunii — reprezintă *momentul de torsiune* M_i^t. Datorită cazului particular considerat (axa grinzii cuprinsă într-un plan și sarcinile aplicate normal pe plan), în secțiune se dezvoltă numai *trei* eforturi; sensurile lor pozitive sînt indicate în figura 103, *b*. Din cele șase ecuații de echilibru static în spațiu, numai trei sînt utile în acest caz: ecuația de proiecții după axa y și ecuațiile de momente în raport cu axele x și z.

Față de aceste particularități, se pot distinge următoarele tipuri de rezemări pentru grinzile plane încărcate normal pe planul lor:

(1) *Reazemul simplu*, care împiedică numai deplasarea normală pe planul grinzii, cum se vede de exemplu în punctele *1*, *2* și *3* din figura 103, *c*; acesta reprezintă o singură legătură, căreia îi corespunde o reacțiune-forță după direcția axei y.

(2) *Încastrarea completă*, care împiedică atît deplasarea normală pe plan, cît și rotirea în jurul oricărei axe din plan; ea reprezintă trei legături, cărora le corespund o reacțiune-forță după direcția y și două reacțiuni-moment dirijate după două axe din plan care trec prin centrul încastrării. O asemenea încastrare apare în secțiunea *1* a grinzii din figura 103, *c* și reacțiunile sînt V_1, M_1 și M_1'.

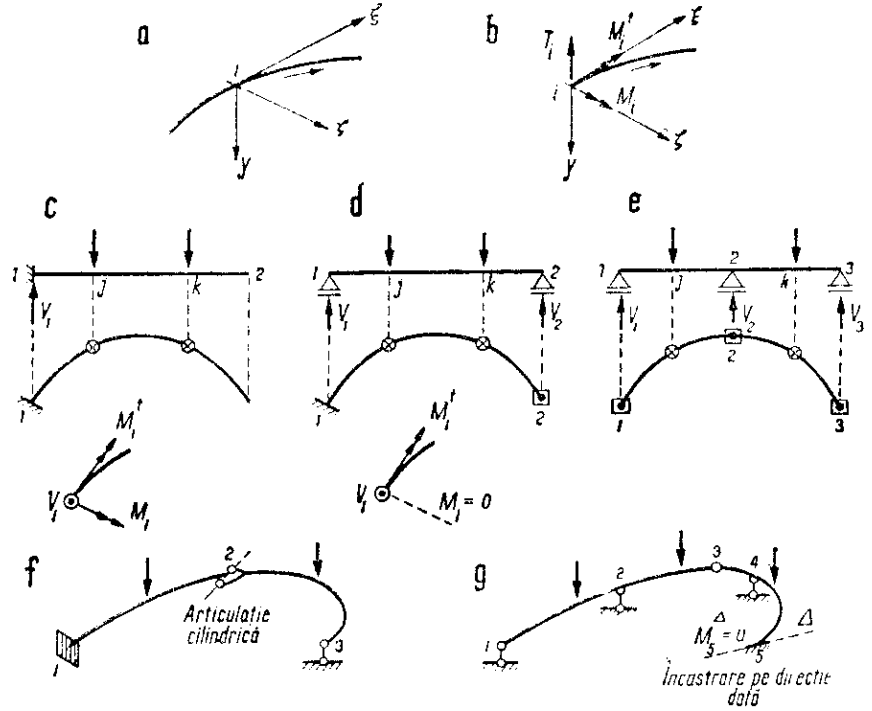


Fig. 103

(3) *Încastrarea pe o direcție dată*, care împiedică deplasarea normală pe plan, cît și rotirea în jurul unei *anumite* axe din plan, care trece prin centrul încastrării, dar lasă liberă rotirea în jurul axei normale pe aceasta. O astfel de încastrare reprezintă numai *două* legături, cărora le corespund o reacțiune-forță după direcția y și o reacțiune-moment dirijată după axa în jurul căreia rotirea este împiedicată. Un exemplu se vede în extremitatea *1* a grinzii din figura 103, *d*, reprezentînd o *încastrare de torsiune*, caracterizată prin reacțiunile V_1 și M_1', în timp ce $M_1 = 0$.

Pentru legarea invariabilă a unei grinzi plane încărcate normal pe plan trebuie împiedicată atît deplasarea după normala la plan, cît și rotirea în jurul oricărei axe din plan. În acest scop este necesar *un număr minim de trei legături*, judicios distribuite; controlul acestei ultime cerințe constă în condiția

ca să nu existe nici o axă în planul grinzii, în raport cu care momentele tuturor forțelor de legătură să fie nule. Distribuirea celor trei legături poate fi făcută în mai multe moduri, rezultînd anumite tipuri de grinzi plane:

— grinda încastrată la un capăt și liberă la celălalt (fig. 103, *c*);
— grinda cu un reazem simplu și o încastrare de direcție dată, dispusă astfel ca axa după care rotirea este liberă să nu treacă prin reazemul simplu (fig. 103, *d*);
— grinda așezată pe trei reazeme simple, care nu sînt situate pe o linie dreaptă (fig. 103, *e*).

Pentru exprimarea condiției de echilibru static sînt disponibile trei ecuații, deci prevederea în rezemările grinzii a numai trei legături conduce la o situație de determinare statică.

Se pot alcătui grinzi curbe sau cotite plane formate din mai multe porțiuni rigide, prinse între ele prin articulații. După modul cum este permisă rotirea relativă dintre cele două porțiuni pe care le leagă, trebuie deosebite: (1) *articulația sferică*, care permite rotirea relativă în jurul *oricărei axe* din plan care trece prin articulație și (2) *articulația cilindrică*, care permite rotirea relativă numai *după o anumită axă* din plan care trece prin articulație. Introducerea unei articulații sferice, de exemplu în secțiunea *3* la grinda din figura 103, *g*, este echivalentă cu suprimarea a două legături, vectorul-moment din secțiune fiind nul; rămîne împiedicată numai deplasarea relativă după normala la plan, în secțiune apărînd numai forță tăietoare. Introducerea unei articulații cilindrice, de exemplu în secțiunea *2* a grinzii din figura 103, *f*, este echivalentă cu suprimarea unei singure legături. Vectorul-moment din secțiune este dirijat după axa pe care rotirea relativă este împiedicată, deci normal pe axa articulației; rămîne de asemenea împiedicată deplasarea relativă după normala la plan.

Pentru asigurarea invariabilității geometrice și a fixării în spațiu, în cazul particular al grinzilor plane încărcate normal pe plan, numărul minim necesar de legături interioare și exterioare este $l+r=3c$, unde c este numărul porțiunilor rigide componente. Orice legătură de continuitate suprimată în cuprinsul grinzii trebuie înlocuită printr-o legătură de rezemare. Exemple de alcătuire sînt date în figurile 103, *f* și *g*; în ambele cazuri, sistemul este format din două portiuni rigide, deci sînt necesare cîte șase legături. În primul caz sînt trei legături în încastrarea *1*, o legătură în reazemul simplu *3* și două legături în articulația cilindrică *2*; în al doilea caz sînt trei legături în reazemele simple *1*, *2* și *4*, două legături în încastrarea pe direcția Δ din *5* și o legătură în articulația sferică din *3*.

Controlul dispunerii legăturilor se referă atît la gruparea lor pe porțiunile rigide, cît și la poziția în care sînt așezate. Privitor la primul aspect, în cazul din figura 103, *g* porțiunea *1-2-3* reazemă în *3* pe porțiunea *3-4-5*, care are rezemări asemănătoare celor din figura 103, *d*. Dacă reazemul simplu *4* ar trece pe porțiunea *1-2-3*, această porțiune ar avea legături ca în figura 103, *e*, și deci pe extremitatea *3* poate fi rezemată porțiunea *3-5*, rezultînd o alcătuire corectă. Dacă însă reazemul simplu *2* ar fi trecut pe porțiunea *3-4-5*, această porțiune ar avea un surplus de legături, în timp ce porțiunea *1-3* s-ar putea roti în jurul

axei *1-3*. Privitor la al doilea aspect, dacă axa articulației cilindrice din figura 103, *f* ar trece prin extremitatea *3*, reazemul simplu din acest punct nu ar putea împiedica rotirea porțiunii *2-3* în jurul axei *2-3*. Se ajunge la o situație similară, dacă axa Δ din figura 103, *g* ar trece prin reazemul simplu *4*.

2. Determinarea eforturilor

a. **Trasarea diagramelor** T, M și M^t. La o grindă curbă sau cotită plană, încărcată cu anumite sarcini, se face mai întîi determinarea reacțiunilor folosind cele trei ecuații de echilibru static disponibile: ecuația de proiecții pe normala la plan și ecuații de momente în raport cu două axe diferite din plan. Se continuă cu determinarea expresiilor eforturilor pe diferite porțiuni ale grinzii, care servesc la trasarea diagramelor. Se va ține seama la aceasta de convențiile de semne arătate în figura 103, *b*. Să se rețină că momentul de torsiune *pozitiv* este reprezentat printr-un vector care *intră* în secțiune, deci care rotește în sens orar dacă este privit dinspre extremitatea axei ξ.

La grinzi cotite plane, considerînd două secțiuni vecine *1* și *2* care încadrează un vîrf al axei (fig. 104), se pot scrie următoarele relații între eforturile din aceste secțiuni

$$M_2 = -M_1 \cos\varphi - M_1^t \sin\varphi \text{ și}$$
$$M_2^t = -M_1 \sin\varphi + M_1^t \cos\varphi, \qquad (7.9)$$

cu care se face trecerea de la o secțiune la alta. În particular, dacă $\varphi = 90°$, se obține

$$M_2 = -M_1^t \text{ și } M_2^t = -M_1, \qquad (7.10)$$

care arată că momentul de torsiune din stînga devine moment încovoietor în dreapta și invers.

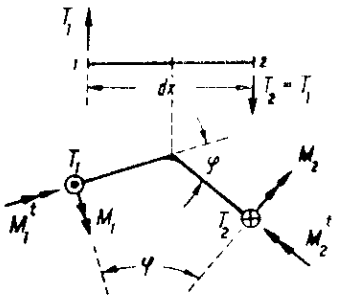


Fig. 104

În figura 105 se dau două exemplificări de trasare a diagramelor de eforturi.

În cazul *a*) se arată o grindă cotită plană încastrată complet la extremitatea *1* și liberă la celălalt capăt, unde este aplicată sarcina P normal pe plan. Ecuațiile de echilibru pentru ansamblul grinzii dau reacțiunile: $V_1 = P$, $M_1 = -2Pa$ și $M_1^t = 2Pa$. Forța tăietoare este constantă pe toată grinda și are mărimea $T = P$. Momentul încovoietor variază liniar pe fiecare porțiune; diagrama M are aceeași corelație cu diagrama T ca și la grinzile drepte. În secțiunile *2* și *3* apar discontinuități în diagramă, datorită schimbării axei grinzii: vectorul-moment încovoietor — cuprins în planul grinzii — este în fiecare porțiune normal pe axa acesteia. Ordonatele diagramei M sînt reprezentate normal pe plan, și anume de partea fibrei întinse, asemănător ca la structuri plane, spre a corespunde cu sensul deformării. Diagrama M^t are ordonată constantă pe porțiunile *1-2* și *2-3*, cît și ordonată nulă pe porțiunea *3-4*. În punctele de frîngere ale axei grinzii se constată satisfacerea relațiilor (7.10).

În cazul *b*), grinda cotită este fixată printr-o încastrare de torsiune în *1* și un reazem simplu în *3*; pe grindă sînt așezate două sarcini de mărime P în secțiunile *2* și *4*. Aplicînd ecuațiile de echilibru, se obțin următoarele reacțiuni: $V_1=-0{,}5P$, $V_3=-1{,}5P$ și $M_1^t=-Pa$, cu ajutorul cărora se trasează diagrama T, care are ordonată constantă pe fiecare porțiune. Diagrama M este formată din variații liniare, a căror înclinare față de axa de referință corespunde cu valorile

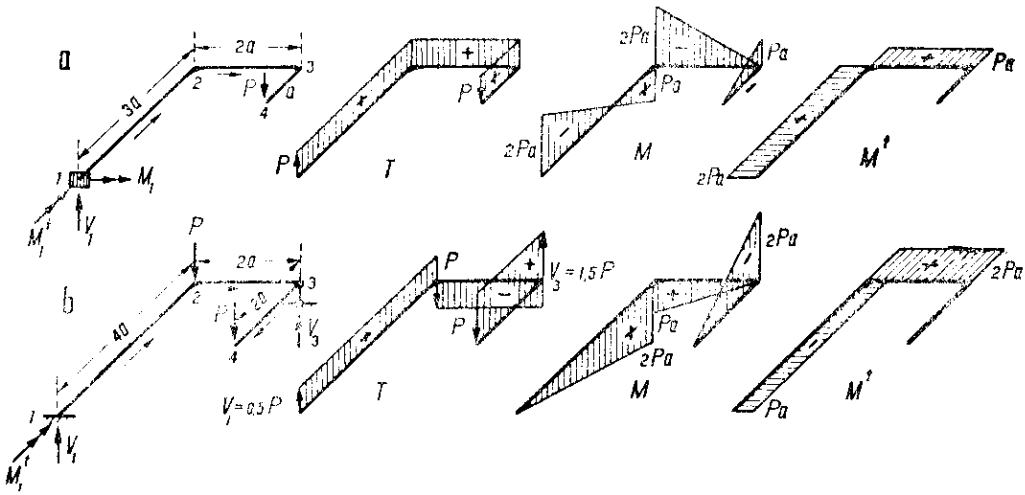


Fig. 105

T de pe porțiunile respective. Momente de torsiune apar numai pe porțiunile *1-2* și *2-3*. Examinînd comparativ diagramele M și M^t, se constată satisfacerea relațiilor (7.10) în punctele de frîngere ale axei grinzii.

b. **Grinda așezată pe trei reazeme simple.** Fie o grindă curbă plană așezată pe reazemele simple *1*, *2* și *3*, care nu sînt în linie dreaptă (fig. 106, *a*); pe grindă acționează sarcini oarecare normale pe plan. Fiecare reacțiune poate fi determinată direct, printr-o ecuație de momente în raport cu axa care unește celelalte două reazeme. Astfel, pentru reacțiunea V_3 se poate scrie

$$V_3\eta_3=\sum_1^3 P_j\eta_j, \quad \text{deci} \quad V_3=\sum_1^3 P_j\eta_j/\eta_3, \tag{7.11}$$

unde segmentele η se măsoară normal pe axa *1-2*, fiind considerate pozitive sub această axă și negative deasupra. În secțiunea curentă i, de pe porțiunea *2-3*, expresiile eforturilor sînt

$$T_i=-V_3+\sum_i^3 P_j, \quad M_i=V_3\xi_3-\sum_i^3 P_j\xi_j, \quad M_i^t=-V_3\zeta_3+\sum_i^3 P_j\zeta_j. \tag{7.12}$$

Expresiile (7.12), în care reacțiunea V_3 este dată de relația (7.11), permit să se traseze și *liniile de influență* ale eforturilor dintr-o anumită secțiune i. Ad-

mițînd că sarcina-unitate parcurge porțiunile *1-i* și *i-3* de grindă, poziția curentă este definită de coordonatele ξ și ζ față de sistemul de axe al secțiunii *i*, distanța la axa *1-2* fiind η_i. Se obțin următoarele expresii pentru coeficienții de influență:

	T_i	M_i	M_i'	
$(1-i)$	$-\eta_i/\eta_3$	$\eta_i\,\xi_3/\eta_3$	$-\eta\,\zeta_3/\eta_3$	(7.13)
$(i-3)$	$-\eta_i/\eta_3+1$	$\eta_i\,\xi_3/\eta_3-\xi$	$-\eta\,\zeta_3/\eta_3+\zeta$	

În toate expresiile apare ca variabilă distanța η_i, astfel că modul cel mai simplu de reprezentare a liniilor de influență se obține admițînd ca axă de referință o *normală* pe axa *1-2*; η_i joacă în acest caz rol de abscisă. Expresiile coeficienților de influență reprezintă variații liniare pe intervalul *1-i*, care se regăsesc în primii termeni din expresiile pentru intervalul *i-3*.

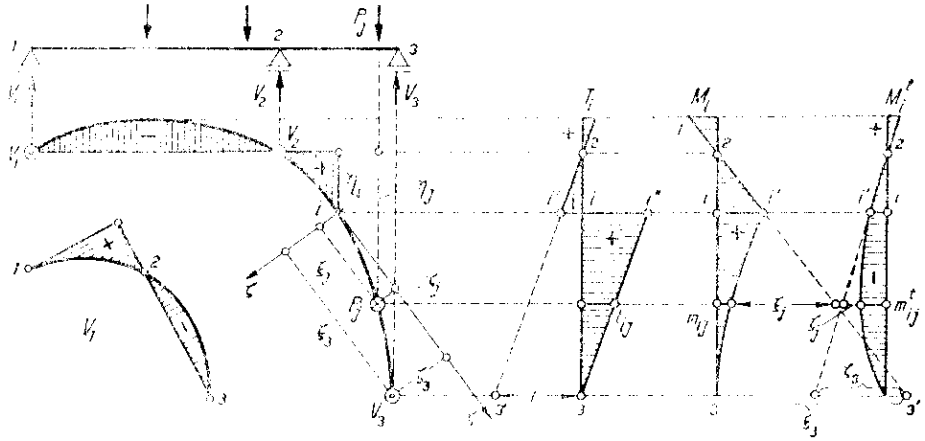


Fig. 136

Linia de influență T_i este mărginită de două drepte paralele, așezate la distanță egală cu unitatea după direcția axei *1-2*. Variația liniară pentru porțiunea *1-2-i* se anulează în dreptul reazemului *2* și are ordonată egală cu *1* în dreptul reazemului *3*. Linia de influență M_i este definită de o dreaptă care se anulează în *2* și are ordonata ξ_3 în dreptul reazemului *3*. Pentru porțiunea *i-3*, ordonatele acestei variații liniare trebuie micșorate — în dreptul fiecărei secțiuni a grinzii — cu segmentele ξ corespunzătoare; trasarea se face cu ușurință prin puncte. O situație asemănătoare se întîlnește și pentru linia de influență M_i', care este mărginită de o dreaptă ce se anulează în *2* și are ordonata $-\zeta_3$ în dreptul reazemului *3*. Pe porțiunea *i-3*, ordonatele trebuie micșorate cu segmentele ζ respective, obținîndu-se o curbă tangentă în *i'* la variația liniară.

Acest mod de reprezentare conduce la linii de influență în care ordonatele de pe porțiunea *i-3* de grindă apar cu claritate și pot fi măsurate cu exactitate.

Datorită axei de referință alese, zona corespunzătoare porțiunii *1-2* rezultă restrînsă și cu ordonate suprapuse pentru perechile de puncte care au aceeași abscisă η. Relațiile (7.13) arată însă că, pentru oricare din cele trei linii de influență, pe porțiunea *1-2-i* poate fi folosită diagrama de variație a segmentului η_i, care este reprezentată de suprafața cuprinsă între axa grinzii și axa 1-2 (hașurată în figură). Ordonatele se măsoară normal pe axa *1-2* și se multiplică cu constantele $-1/r_{33}$, ξ_3/r_{33} sau $-\zeta_{33}/r_{33}$, după linia de influență căutată.

Liniile de influență ale reacțiunilor se obțin direct din expresiile de forma (7.11); astfel, în figura 106, *b* este arătat aspectul liniei de influență V_1.

PARTEA A DOUA

REZOLVAREA STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE ÎN DOMENIUL ELASTIC

CAPITOLUL VII

DEFORMAREA ELASTICĂ A STRUCTURILOR

A. GENERALITĂȚI

1. Echilibrul în poziția deformată

Orice structură se deformează sub acțiunea sarcinilor, datorită deformabilității materialului din care este realizată. Ca efect al aplicării sarcinilor, structura trece din poziția inițială nedeformată într-o poziție vecină — poziția deformată — în care se stabilește situația reală de echilibru a structurii încărcate. O cercetare completă a comportării structurii trebuie deci să se refere la starea de echilibru în poziția deformată.

Studiul deformării structurilor intervine la determinarea deplasărilor care apar în diferite secțiuni prin trecerea din poziția inițială în poziția deformată. Se poate astfel ține seama la dimensionare de cerința ca deformabilitatea structurii, în condiții de exploatare, să fie menținută în limite admisibile. Pentru Statica construcțiilor, studiul deformării structurilor are importanță deosebită, deoarece constituie *baza de rezolvare a structurilor static nedeterminate*, problemă centrală a acestei discipline, care are drept obiect *determinarea eforturilor și a pozițiilor deformate la structuri alcătuite din bare*.

Starea de echilibru în poziția deformată, corespunzătoare unui ansamblu de sarcini dat, este caracterizată prin îndeplinirea anumitor condiții, și anume:

(1) O condiție cu caracter static, care exprimă că totalitatea forțelor exterioare și interioare se găsește în echilibru — *condiția de echilibru static*.

(2) O condiție cu caracter geometric, care exprimă că poziția deformată respectă toate legăturile exterioare și interioare existente, precum și continuitatea de material a barelor structurii[1] — *condiția de compatibilitate* (continuitate).

Legătura dintre elementele care intervin în aceste condiții, anume dintre forțe și deplasări, rezultă din datele fizice ale structurii (natura materialului, dimensiunile barelor); acestea sînt alese astfel încît să asigure că în nici o secțiune eforturile nu depășesc anumite limite, stabilite la dimensionare.

Condiția de echilibru static și condiția de compatibilitate sînt utilizate în Statica construcțiilor ca instrument pentru cercetarea comportării structurii, la determinarea eforturilor și a poziției deformate. Pentru lămurirea aplicării

[1] Condiția trebuie înțeleasă în sensul că — în poziția deformată — deplasările pe direcțiile legăturilor din rezemări sînt nule, deplasările relative dintre cele două fețe ale aceleași secțiuni sînt nule etc.

lor este necesar să se precizeze caracterul deformării structurilor și să se revină asupra principalelor ipoteze simplificatoare, menționate la începutul primului capitol.

Pentru materialele utilizate la realizarea structurilor de rezistență ale construcțiilor, deformările sînt foarte mici, astfel că în condiții normale de exploatare poziția deformată este foarte apropiată de poziția inițială. Deplasările diferitelor secțiuni pot fi asimilate unor infiniți mici în raport cu dimensiunile geometrice ale structurii. În această situație, care caracterizează *domeniul micilor deplasări*, se poate accepta prima ipoteză simplificatoare: *la aplicarea condiției de echilibru static, sistemul de forțe în echilibru se consideră raportat la poziția nedeformată a structurii*, aceasta indiferent dacă structura este static determinată sau nedeterminată.

Admiterea ipotezei simplificatoare are consecințe importante. La structuri static determinate, condiția de echilibru static este suficientă pentru rezolvare, numărul necunoscutelor fiind totdeauna egal cu numărul ecuațiilor de echilibru static disponibile. Înseamnă că, la asemenea structuri, această condiție poate fi utilizată *independent* de condiția de compatibilitate: se determină mai întîi reacțiunile și eforturile cu ajutorul condiției de echilibru static, apoi se trece la determinarea poziției deformate, folosindu-se condiția de compatibilitate. La structuri static nedeterminate, acest lucru nu mai este posibil. Datorită legăturilor suplimentare, numărul necunoscutelor este mai mare decît cel al ecuațiilor de echilibru static și, în consecință, se pot găsi o infinitate de soluții care să satisfacă aceste ecuații. Dintre soluțiile posibile, numai una singură corespunde comportării reale a structurii, și anume aceea care satisface și condiția de compatibilitate. Înseamnă că aplicarea celor două condiții devine *interdependentă* și numai folosirea lor împreună permite determinarea reacțiunilor și a eforturilor din structura static nedeterminată.

Studiul deformării structurilor ridică problema modului cum poate fi schematizată pentru calcul comportarea materialelor de construcție sub acțiunea sarcinilor. Se știe că această comportare este oglindită de *curba caracteristică*, care reprezintă corelația dintre deformațiile specifice ε și eforturile unitare σ. Astfel, pentru oțelul moale de construcții, curba caracteristică arată ca în figura 107, *a*. La alte materiale se obțin alte curbe caracteristice. Se poate totuși admite, ca o schematizare comună a comportării diferitelor materiale de construcție, că este posibil să se stabilească — pentru fiecare — o anumită limită pînă la care să fie acceptabilă comportarea perfect elastică, deformațiile cu caracter permanent fiind neglijabile față de cele cu caracter elastic. Dincolo de această limită comportarea s-ar schimba, deformarea căpătînd caracter perfect plastic. O asemenea schematizare duce la curba caracteristică simplificată din figura 107, *b*, propusă de *Prandtl* și care este folosită în calculul structurilor. Punctul de frîngere dintre cele două zone corespunde atingerii limitei de curgere a materialului.

Urmează să se stabilească acum în care din aceste zone se găsește materialul din structură sub acțiunea sarcinilor date. În condiții normale de exploatare a construcțiilor, eforturile unitare care se dezvoltă în secțiunile structurilor de rezistență se situează obișnuit în zona de comportare perfect elastică a materialului. În consecință, caracteristicile acestei zone sînt luate ca bază la de-

terminarea poziţiilor deformate şi la rezolvarea structurilor static nedeterminate. În această concepţie, situaţia limită a structurii se consideră atinsă cînd în secţiunea cea mai solicitată s-a ajuns la limita zonei elastice.

În cele ce urmează se studiază *deformarea structurilor în stadiul elastic*, admiţîndu-se comportarea perfect elastică a materialului. Se consideră că materialul este continuu, omogen şi cu aceleaşi proprietăţi în toate punctele şi pe toate

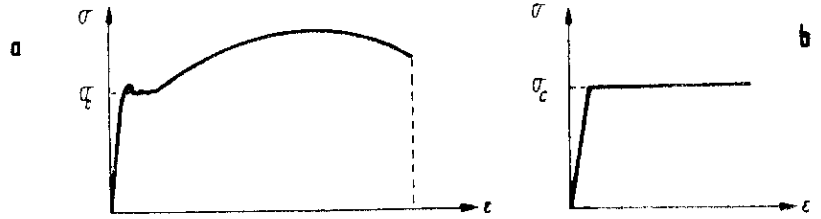


Fig. 107

direcţiile, invariabile în timp, de asemenea că este satisfăcută legea proporţionalităţii între σ şi ε (Hooke).

În domeniul micilor deplasări, admiterea comportării perfect elastice a materialului permite să se folosească şi cea de-a doua ipoteză simplificatoare: *proporţionalitatea dintre sarcini şi deplasările corespunzătoare*. Înseamnă că deplasările diferitelor secţiuni sînt legate prin proporţionalitate de mărimea sarcinii care produce deformarea. În consecinţă, se poate utiliza *suprapunerea de efecte*, considerînd ca independente acţiunile diferitelor sarcini aplicate pe structură. Fiecare dintre aceste sarcini produce efecte proporţionale cu mărimea sa şi care nu sînt influenţate de efectele altor sarcini aplicate concomitent sau anterior. Efectele totale se obţin prin însumarea efectelor parţiale, astfel că eforturile şi deplasările pot fi exprimate prin *relaţii liniare* în funcţie de mărimile sarcinilor. Aceasta caracterizează *statica liniară* a structurilor alcătuite din bare, care este aplicabilă în domeniul micilor deformări.

Admiterea comportării perfect elastice dă materialului un anumit caracter convenţional, cu proprietăţi simple, care uşurează transpunerea în calcul a fenomenelor. Rezultatele obţinute prin calcul concordă în limite satisfăcătoare cu datele ce rezultă prin încercări şi măsurători pe modele, sau pe construcţii la scară naturală, dovedindu-se în general acoperitoare. În acest fel, criteriul practicii a consacrat metodele de calcul stabilite admiţînd comportarea perfect elastică a structurilor şi aplicarea lor este pînă astăzi generală în proiectare.

Totuşi, acestei concepţii de calcul i se aduc şi critici. Considerînd ca situaţie limită a unei structuri static nedeterminate atingerea în secţiunea cea mai solicitată a limitei superioare a zonei elastice, se foloseşte un criteriu care nu reprezintă o limită naturală pentru comportarea structurii în ansamblu, şi deci nu poate oglindi capacitatea sa reală de rezistenţă. Experimentările şi calculele teoretice arată că structurile static nedeterminate au rezerve de rezistenţă, pe care calculul în domeniul elastic nu le poate prinde. Datorită legăturilor suplimentare, structura este capabilă să suporte sarcini mai mari,

chiar dacă în anumite locuri limita zonei elastice este depășită și se ajunge la plastic izarea materialului.

Aceste aspecte sînt prezentate mai departe în capitolul XVI, deoarece necesită cunoașterea rezolvării structurilor static nedeterminate în domeniul elastic.

2. Elemente pentru exprimarea echilibrului în poziția deformată

a. **Aplicarea suprapunerii efectelor.** Admiterea celei de-a doua ipoteze simplificatoare (proporționalitatea dintre sarcini și deplasările corespunzătoare) permite ca deplasările produse în diferite secțiuni de o anumită sarcină P_j să poată fi exprimate în funcție de mărimea sarcinii. Astfel, pentru cazul din figura 108, *a* se poate scrie

$$\Delta_i = P_j \delta_{ij} \quad \text{și} \quad \Delta_j = P_j \delta_{jj}, \tag{8.1}$$

unde δ_{ij} și δ_{jj} sînt *coeficienți de influență*[1]; aceștia reprezintă deplasările care apar în secțiunile i și j cînd pe grindă ar acționa o sarcină egală cu unitatea, avînd același suport cu sarcina P_j (fig. 108, *b*). Coeficienții de influență de forma δ_{ij} și δ_{jj} poartă numele de *deplasări unitare*, deoarece sînt efecte produse de o cauză egală cu unitatea; ei depind numai de structura considerată.

Dimensiunea coeficienților de influență rezultă scriind relațiile de mai înainte sub forma

$$\delta_{ij} = \Delta_i / P_j \quad \text{și} \quad \delta_{jj} = \Delta_j / P_j,$$

Fig. 108

care arată că *dimensiunea unui coeficient de influență este dată de dimensiunea simbolului său, împărțită cu dimensiunea cauzei care-l produce*. Aceasta revine la a considera coeficientul de influență ca un efect al unei sarcini-unitate, *fără dimensiune*, aplicată pe structură. Astfel, dacă P_j reprezintă o forță și Δ_i este o deplasare liniară, δ_{ij} are dimensiunea L/F.

Cînd pe structură ar acționa *concomitent* mai multe sarcini, efectele totale se obțin prin suprapunerea efectelor parțiale; deplasările din diferite secțiuni pot fi exprimate prin relații liniare în funcție de sarcini. Considerînd o structură încărcată cu sarcinile $P_1, \ldots, P_n$ (fig. 108, *c*), deplasarea elastică Δ_i care se produce în secțiunea i pe o direcție dată se scrie sub forma

$$\Delta_i = P_1 \delta_{i1} + \ldots + P_j \delta_{ij} + \ldots + P_n \delta_{in} = \sum_j P_j \delta_{ij}, \tag{8.2}$$

[1] Noțiunea de coeficient de influență a fost introdusă anterior în legătură cu relațiile (6.1) și (6.2).

unde pentru fiecare sarcină s-a folosit relația (8.1). Coeficienții de influență $\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}$ reprezintă deplasările care s-ar produce în punctul i pe direcția dată, dacă structura ar fi încărcată separat cu sarcinile-unitate $P_1=1, \ldots P_n=1$.

De remarcat că proporționalitatea dintre sarcini și deplasările corespunzătoare, admisă în domeniul micilor deplasări în baza celei de-a doua ipoteze simplificatoare, nu trebuie confundată cu proporționalitatea dintre eforturi unitare și deformații (fig. 107, *b*). Legea lui Hooke are un domeniu mai larg, fiind caracteristică comportării perfect elastice a materialului; în consecință, rămîne valabilă și în afara domeniului micilor deplasări, unde proporționalitatea dintre sarcini și deplasările corespunzătoare nu mai poate fi admisă. Însemnă că cea de-a doua ipoteză simplificatoare este condiționată atît de comportarea perfect elastică a materialului, cît și de menținerea poziției deformate în domeniul micilor deplasări; mai este necesar ca mărimile sarcinilor să nu ridice problema pierderii stabilității echilibrului.

Aceste precizări sînt utile pentru a cunoaște limitele de aplicare ale expresiilor de forma (8.1) și (8.2). În afara domeniului micilor deplasări, ele nu mai pot fi utilizate, deși comportarea materialului rămîne perfect elastică. În astfel de cazuri, deformarea structurii influențează sensibil modul de acțiune a sarcinilor aplicate. Efectele sarcinilor devin interdependente, în sensul că deformarea datorită unora dintre sarcini afectează — în măsura ce nu mai poate fi neglijată — efectele produse de alte sarcini aplicate concomitent. Astfel, dacă în cazul din figura 108, *c* ar acționa și o pereche de forțe H aplicate după axa grinzii, cît timp deplasările Δ_i pot fi asimilate unor infiniți mici, momentele încovoietoare produse de forțele H sînt neglijabile. Pentru o grindă flexibilă însă, aceste momente încovoietoare capătă mărimi finite și contribuie la accentuarea deformării grinzii; mărimile deplasărilor Δ_i își pierd proporționalitatea în raport cu mărimile sarcinilor transversale $P_1, \ldots P_n$.

În esență, asemenea situații sînt caracterizate de faptul că, la aplicarea ecuațiilor de echilibru static, nu mai poate fi admisă raportarea forțelor la poziția inițială a structurii, ci pentru rezolvare trebuie să se considere poziția deformată.[1]

b. **Lucru mecanic de deformare. lucru mecanic virtual.** Trecerea structurii din poziția inițială într-o anumită poziție deformată implică parcurgerea de către sarcini a unor deplasări. Drept consecință, se produce o cantitate de lucru mecanic, numit *lucru mecanic exterior*. Deplasarea care intervine în expresia lucrului mecanic este reprezentată de către proiecția deplasării punctului de aplicație a forței pe direcția suportului acesteia; o vom numi deplasare *corespunzătoare* forței considerate. Astfel, în figura 109, *a*, deplasarea efectivă din punctul i este $\overline{ii'}$, iar deplasarea corespunzătoare sarcinii P este $\overline{ii''}=\delta$.

Privitor la evaluarea lucrului mecanic se pot întîlni situații distincte, după cum poziția deformată considerată este produsă chiar de aplicarea sarcinilor ai caror lucru mecanic se caută, sau se datorează unei alte cauze.

(1) Prima situație este binecunoscută din Rezistența materialelor și se referă la *lucrul mecanic de deformare* produs de aplicarea „statică" a sarcinilor.

[1] Aceste probleme sînt examinate mai departe în capitolul XV.

Se admite că deformarea este continuă și lentă, intensitatea sarcinii aplicate crescînd de la zero la valoarea finală P, în timp ce deplasarea corespunzătoare crește și ea de la zero la mărimea finală δ. Caracterul „lent" al deformării trebuie înțeles în sensul că se poate admite neglijarea energiei cinetice. În schimb, transmiterea deformării în întreaga structură se consideră instantanee, astfel că pe măsura aplicării sarcinilor deplasările care se produc urmează aceeași lege.

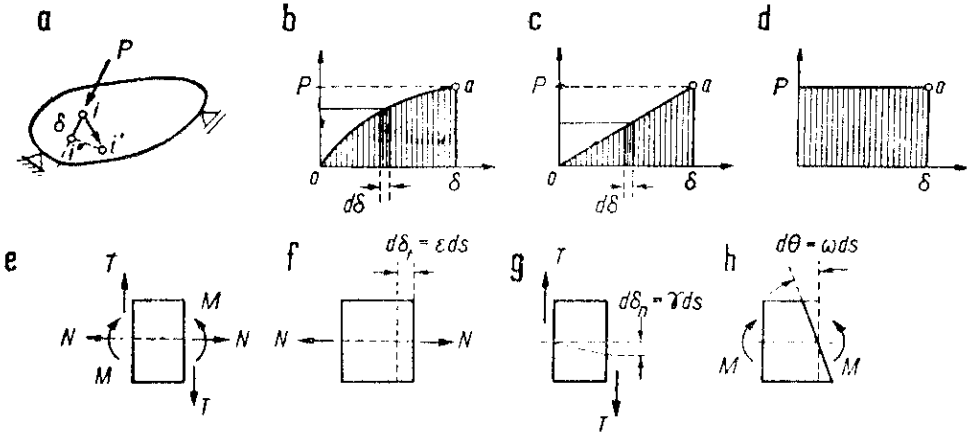


Fig. 109

În general, corelația dintre variația intensității sarcinii aplicate P și variația mărimii deplasării corespunzătoare δ poate fi reprezentată printr-o curbă care pornește din origine (fig. 109, *b*); mărimea lucrului mecanic este

$$L_e = \int_0^{\delta} P d\delta = \alpha P \delta,$$

care corespunde ariei haşurate din diagramă și unde coeficientul α depinde de forma curbei și de poziția punctului a. În domeniul micilor deplasări, corelația capătă o formă simplă *prin admiterea celei de-a doua ipoteze simplificatoare*, care este reprezentată prin *legea liniară* din figura 109, *c*. Mărimea lucrului mecanic devine $L_e = P\delta/2$, fiind dată de aria triunghiului $Oa\delta$. Cînd asupra structurii acționează concomitent mai multe forțe exterioare $P_1, \ldots, P_n$ (forțe propriu-zise sau cuple), cărora în poziția deformată le corespund deplasările totale $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (deplasări liniare sau rotiri), prin suprapunere de efecte se găsește că lucrul mecanic exterior este

$$L_e = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + \cdots + P_n\Delta_n) = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_i. \qquad (8.3)$$

unde intervine coeficientul $\alpha = 1/2$.

(2) A doua situație apare cînd sarcinile se găsesc aplicate pe structură cu întreaga lor intensitate, iar trecerea într-o anumită poziție deformată se face

independent de aceste sarcini, datorită unei alte cauze, cum ar fi impunerea unei deplasări virtuale. Parcurgerea deplasărilor de către forțe poate fi reprezentată în acest caz sub forma din figura 109, *d*; mărimea *lucrului mecanic virtual* corespunde ariei dreptunghiulare haşurate, şi deci factorul 1/2 nu mai intervine. Pentru ansamblul sarcinilor $P_1, \ldots, P_n$ rezultă

$$L_e = P_1\Delta_1 + \cdots + P_n\Delta_n = \sum P_i\Delta_i. \tag{8.3'}$$

Această deosebire trebuie bine reținută, deoarece mai departe se va folosi principiul deplasărilor virtuale pentru exprimarea condiției de echilibru elastic.

Situația este în totul asemănătoare pentru *lucrul mecanic al forțelor interioare*, produs de acestea parcurgînd deformațiile. Lucrul mecanic interior este *negativ*, deoarece *forțele interioare se opun deformării*; dezvoltarea acestor forțe reprezintă răspunsul materialului la acțiunea forțelor exterioare, şi deci sensurile lor sînt opuse celor în care se produc deformațiile respective. Evaluarea lucrului mecanic interior este cunoscută din Rezistența materialelor. Admiterea ipotezei lui Bernoulli (secțiunile plane înainte de deformare rămîn plane şi după deformare) permite ca evaluarea să se facă sub forma $-L_i = L_{ef}$, considerînd elementele ds ale structurii (fig. 109, *e*), pe care acționează eforturile N, T, M; acestea parcurg deplasările relative $d\delta_t = \varepsilon ds$, $d\delta_n = \gamma ds$, $d\theta = \omega ds$ dintre fețe (fig. 109, *f*—*h*), ce caracterizează deformarea elementelor respective. La structuri spațiale mai intervine şi momentul de torsiune M_t, căruia îi corespunde deplasarea $d\varphi = \omega_t ds$.

Pentru cele două situații menționate mai sus, mărimea lucrului mecanic interior este:

— Cînd deplasările $d\delta_t$, $d\delta_n$, $d\theta$ şi $d\varphi$ sînt produse de dezvoltarea eforturilor N, T, M, M_t, crescînd împreună proporțional de la valoarea zero la valoarea finală

$$-L_i = \frac{1}{2}\int N\,d\delta_t + \frac{1}{2}\int T d\delta_n + \frac{1}{2}\int M d\theta + \frac{1}{2}\int M_t d\varphi. \tag{8.4}$$

— Cînd deformarea caracterizată de deplasările $d\delta_t$, $d\delta_n$, $d\theta$ şi $d\varphi$ este *independentă* de starea de eforturi caracterizată de N, T, M şi M_t, care rămîn constante

$$-L_i = \int N d\delta_t + \int T d\delta_n + \int M d\theta + \int M_t d\varphi. \tag{8.4'}$$

La aplicarea practică, utilizarea expresiilor (8.4) sau (8.4') — în forma lor completă — conduce la calcule laborioase. O simplificare rațională se obține examinînd importanța relativă a fiecăruia dintre termeni asupra mărimii L_i, pentru diferite categorii de structuri, pe baza de calcule comparative. Dacă se ține seama de aproximațiile folosite în calculul structurilor, privitor la evaluarea sarcinilor, la schematizarea construcțiilor reale şi la admiterea unor caracteristici simplificate convențional privind comportarea materialelor, apare nerațional să se mențină în calcul termeni care au o influență foarte redusă. Practica a consacrat următoarele:

— la structuri plane alcătuite din bare drepte, solicitate dominant la încovoiere (grinzi, cadre), termenul datorit momentelor încovoietoare formează

aproape totalitatea lucrului mecanic interior, astfel că termenii dați de N și T pot fi în genere neglijați;

— la structuri spațiale se va reține atît termenul dat de momentele încovoietoare, cît și cel dat de momentele de torsiune;

— la arce se rețin de obicei doi termeni, anume cei dați de M și N;

— la grinzi cu zăbrele, în ipoteza nodurilor articulate, intervine numai termenul dat de forțele axiale; acest termen trebuie considerat și atunci cînd în alcătuirea unei structuri apar bare speciale, supuse la forțe axiale importante (de exemplu, tiranți), dar numai pentru aceste bare.

Cele două modalități de considerare a lucrului mecanic exterior sau interior, oglindite în expresiile (8.3) și (8.4), respectiv (8.3′) și (8.4′), sînt legate de cele două căi generale pentru exprimarea condiției de echilibru în poziția deformată: utilizarea *legii conservării energiei* și *aplicarea principiului deplasărilor virtuale*. Pe amîndouă aceste căi se poate ajunge, în specificul domeniului de deformare elastică a structurilor, la stabilirea aceleiași expresii generale pentru condiția de echilibru elastic.

Calea energetică este de obicei utilizată în Rezistența materialelor, și deci este cunoscută de la acest curs, astfel că aici nu se va mai reveni asupra ei. În Statica construcțiilor se preferă, în genere, să se exprime condiția generală a echilibrului în poziția deformată folosind principiul deplasărilor virtuale, așa cum se arată în continuare.

B. CONDIȚIA GENERALĂ A ECHILIBRULUI ÎN POZIȚIA DEFORMATĂ

1. Aplicarea principiului deplasărilor virtuale la corpuri deformabile

Principiul deplasărilor virtuale stabilește condiția necesară și suficientă pentru exprimarea echilibrului unui sistem material: suma lucrurilor mecanice virtuale, corespunzătoare tuturor forțelor la care este supus sistemul, trebuie să fie nulă pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile. La aplicarea acestui principiu este necesar să se precizeze pe de o parte care este ansamblul de forțe ce-și fac echilibru, iar pe de alta, care este configurația deplasării virtuale compatibile cu legăturile care se dă de la poziția de echilibru.

Cînd principiul deplasărilor virtuale este aplicat pentru aflarea reacțiunilor și a eforturilor din structurile static determinate, suprimarea legăturilor corespunzătoare necunoscutelor conduce la sisteme cu grade de libertate. Deplasările virtuale ce se dau în acest caz au caracter *cinematic*, în sensul că părțile componente ale sistemului se consideră perfect rigide. Forțele interioare care se dezvoltă în structură sub acțiunea sarcinilor nu produc lucru virtual, deoarece deplasările corespunzătoare lor sînt nule (deplasarea virtuală nu deformează elementele ds ale barelor). În consecință, la rezolvarea structurilor static deter-

minate a fost suficient să se considere ca sistem de forțe în echilibru numai ansamblul forțelor exterioare (sarcini și reacțiuni).

Situația se schimbă cînd principiul deplasărilor virtuale trebuie utilizat pentru aflarea necunoscutelor suplimentare la rezolvarea structurilor static nedeterminate, sau cînd se studiază poziția deformată a unei structuri static determinate sau static nedeterminate. De data aceasta nu mai intervin sisteme cu grade de libertate, și deci deplasările virtuale nu mai pot avea caracter cinematic; trecerea în poziție deplasată trebuie să fie caracterizată prin deformarea elementelor ds ale barelor structurii. Condiția de compatibilitate a deplasării virtuale capătă în acest caz o nouă semnificație, anume că alături de respectarea legăturilor existente în rezemări, mai este necesar ca — în poziția deplasată — deformările succesiunii de elemente ds să fie compatibile între ele, respectînd continuitatea barelor. Aceasta revine la a spune că *deplasarea virtuală trebuie să fie reprezentată de o poziție deformată posibilă a structurii*, deci care să poată fi produsă în realitate de acțiunea unei cauze, oricare ar fi această cauză (de exemplu, acțiunea unui sistem de sarcini arbitrar ales, efectul unei variații de temperatură etc.).

Folosirea unei asemenea deplasări virtuale, care modifică forma elementelor ds ale barelor, face ca și forțele interioare ce se dezvoltă în structură sub acțiunea sarcinilor să efectueze lucru mecanic virtual, care trebuie introdus în condiția de echilibru. Rezultă că *sistemul de forțe în echilibru este reprezentat de forțele exterioare și de forțele interioare care le echilibrează*. Lucrul mecanic virtual total se obține însumînd lucrul mecanic produs de forțele exterioare cu cel produs de forțele interioare; această sumă trebuie egalată cu zero: $L_{total} = L_{ext} + L_{int} = 0$.

O dată precizat specificul celor două elemente care intervin cînd principiul deplasărilor virtuale este aplicat la structuri deformabile, și anume alcătuirea sistemului de forțe în echilibru, precum și caracterul deplasării virtuale compatibile, este necesar de subliniat că acestea sînt *independente*, în sensul că între ele nu există nici un raport de cauzalitate. Aceasta revine la a admite că cele două elemente provin de la *două situații diferite de încărcare* ale structurii considerate. În fiecare situație sînt desigur îndeplinite ambele condiții (cea de echilibru a forțelor și cea de compatibilitate a deformatei), dar pentru aplicarea principiului deplasărilor virtuale se consideră de la fiecare dintre situații numai cîte unul din elemente, împreună cu condiția pe care acesta o satisface:

- una din situații dă sistemul de forțe, reprezentat de forțele exterioare și de forțele interioare, care îndeplinește numai condiția de a fi în echilibru;
- cealaltă situație dă configurația deplasării virtuale, reprezentată de poziția deformată a structurii, care îndeplinește numai condiția de a fi compatibilă cu legăturile din rezemări și cu continuitatea barelor.

Dintre cele două situații *diferite* de încărcare ale structurii, desigur că numai una poate fi situația *reală* corespunzătoare problemei care se studiază. Rezultă că cealaltă trebuie să fie o situație *auxiliară* (fictivă) aleasă în mod arbitrar, desigur astfel ca să conducă la o rezolvare cît mai simplă. Prin aceasta, utilizarea sa poate fi adaptată obiectivelor care se urmăresc.

Într-adevăr, din enunțarea principiului rezultă că, dacă sistemul de forțe considerat este în echilibru și dacă deplasarea virtuală dată este compatibilă, lucrul mecanic virtual se anulează în mod necesar. Această enunțare conține de fapt trei condiții — echilibrul sistemului de forțe, compatibilitatea deplasării virtuale și anularea lucrului mecanic virtual — care sînt însă dependente între ele, în sensul că dacă două dintre aceste condiții sînt îndeplinite, implicit este îndeplinită și a treia. Se pot enunța astfel următoarele două variante:

(1) dacă deplasarea virtuală este compatibilă, condiția de lucru mecanic virtual nul este suficientă pentru a asigura că sistemul de forțe considerat este în echilibru;

(2) dacă sistemul de forțe este în echilibru, condiția de lucru mecanic virtual nul este suficientă pentru a asigura că deplasarea virtuală dată este compatibilă.

Acestor variante le corespund două moduri diferite de aplicare a principiului deplasărilor virtuale, privitor la modul de alegere a situației auxiliare, după cum pentru problema dată este necesar să se exprime condiția de echilibru a forțelor care acționează structura, sau condiția de compatibilitate a deformatei sale.

2. Forma generală a condiției de echilibru în poziția deformată

a. **Stabilirea condiției.** Fie o structură oarecare, considerată în două situații diferite de încărcare; se admite că prima situație este cea *reală*, iar a doua este o situație *auxiliară*, aleasă în mod arbitrar. Rezultă:

(1) În prima situație (fig. 110, *a*), structura este încărcată cu forțele exterioare P_i, care produc în secțiunea curentă eforturile M, N, ...; în poziția deformată, deplasările corespunzătoare forțelor P_i sînt Δ_i, iar deplasările relative dintre fețele elementului curent ds — pe direcțiile eforturilor M, N, ... — sînt $d\theta$, $d\delta_t$, ...

(2) În a doua situație (fig. 110, *b*), structura este încărcată cu forțele exterioare $\overline{P}_j$, care produc în secțiunea curentă eforturile $\overline{M}$, $\overline{N}$, ...; în poziția deformată, deplasările corespunzătoare forțelor $\overline{P}_j$ sînt $\overline{\Delta}_j$, iar deplasările relative corespunzătoare eforturilor sînt $d\overline{\theta}$, $d\overline{\delta}_t$, ... Pentru diferențierea notațiilor se adoptă aici simboluri barate.

La fiecare dintre cele două situații apare, pe de o parte, un sistem de forțe în echilibru, reprezentat de forțele exterioare și de forțele interioare care le echilibrează, iar pe de altă parte, o poziție deformată compatibilă. Aceste două elemente trebuie privite ca *independente* unul de altul, atunci cînd se aplică principiul deplasărilor virtuale. Sînt două sisteme de forțe în echilibru și două poziții deformate compatibile, ceea ce oferă posibilitatea de a le combina între ele după voință.

Se va ține seama că, în domeniul micilor deplasări, ipoteza simplificatoare permite să se aplice condiția de echilibru static raportînd sistemul de forțe în echilibru la situația nedeformată a structurii. Înseamnă că deplasarea virtuală

poate fi dată pornind de la poziția inițială și nu de la poziția deformată ce corespunde sistemului de forțe în echilibru; aceasta reprezintă o simplificare substanțială.

O primă posibilitate este să se considere că atît sistemul de forțe pentru care trebuie exprimat echilibrul, cît și poziția deformată care dă configurația deplasării virtuale, sînt cele corespunzătoare situației reale de încărcare (fig. 110, *a*).

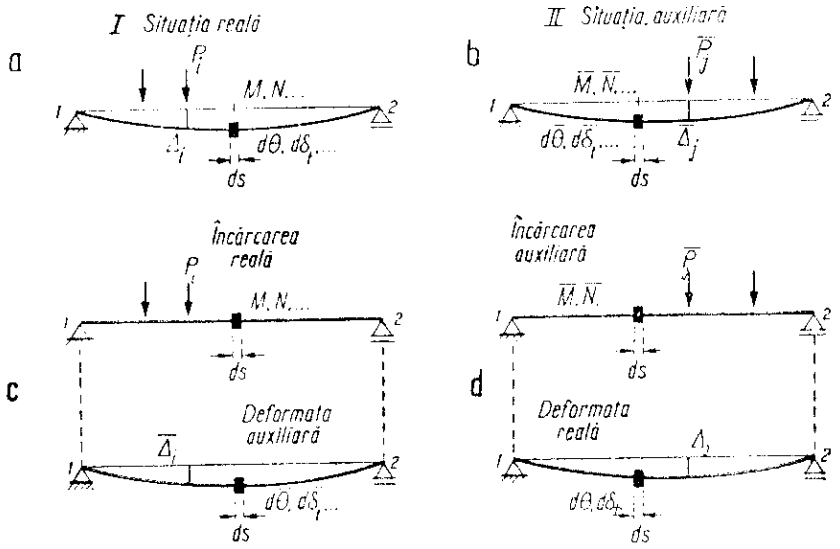


Fig. 110

Lucrul mecanic virtual efectuat de forțele P_i, parcurgînd deplasările Δ_i, este pozitiv, în timp ce lucrul mecanic virtual efectuat de forțele interioare este negativ, fiind egal și de semn contrar cu lucrul mecanic virtual efectuat de eforturile M, N, ..., parcurgînd deplasările relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... așa cum s-a arătat în legătură cu relația (8.4'). Condiția de echilibru este

$$\sum P_i\Delta_i - \int M d\theta - \int N d\delta_t - \ldots = 0,$$

de unde se obține

$$\sum P_i\Delta_i = \int M d\theta + \int N d\delta_t + \int T d\delta_n + \int M_t d\varphi. \tag{8.5}$$

relație care poate fi aplicată structurilor alcătuite din bare drepte, sau bare curbe cu rază de curbură mare. Această relație este în general improprie pentru aplicarea practică, cu excepția anumitor cazuri particulare, deoarece conține deplasările Δ_i corespunzătoare tuturor sarcinilor aplicate și care inițial sînt necunoscute (cunoașterea acestora nici nu este de obicei necesară pentru problema care se studiază).

Relații de largă utilizare se obțin aplicînd principiul deplasărilor virtuale, astfel ca să intervină numai cîte unul dintre elementele ce caracterizează situația reală de încărcare, fie sistemul de forțe în echilibru, fie poziția defor-

mată. S-a arătat în paragraful precedent că pe această cale se pot exprima condiții diferite privind situația reală, fie echilibrul sistemului de forțe, fie compatibilitatea poziției deformate.

După modul cum se aleg elementele, rezultă următoarele două variante:

(1) Din situația reală de încărcare se consideră sistemul de forțe în echilibru, reprezentat de forțele exterioare P_i și de eforturile M, N, ... (fig. 110, *c*); drept configurație a deplasării virtuale se alege poziția deformată dată de situația auxiliară de încărcare, caracterizată prin deplasările $\bar{\Delta}_i$ pe direcțiile forțelor P_i, și de deplasările relative $d\bar{\theta}$, $d\bar{\delta}_t$, ... pe direcțiile eforturilor. Scriind că lucrul mecanic virtual este nul, rezultă relația

$$\sum P_i \bar{\Delta}_i - \int M\, d\bar{\theta} - \int N\, d\bar{\delta}_t - \ldots = 0, \tag{8.6}$$

(situația reală; situația auxiliară)

care reprezintă *condiția de echilibru a sistemului real de forțe*, deoarece s-a folosit o deplasare virtuală compatibilă aleasă în mod arbitrar.

(2) Din situația auxiliară de încărcare se consideră sistemul de forțe în echilibru, reprezentat de forțele exterioare $\bar{P}_j$ și de eforturile $\bar{M}$, $\bar{N}$, ... (fig. 110, *d*); drept configurație a deplasării virtuale se alege poziția deformată din situația reală de încărcare, la care pe direcțiile forțelor $\bar{P}_j$ corespund deplasările Δ_j, iar pe direcțiile eforturilor se produc deplasările relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... Scriind că lucrul mecanic virtual este nul, rezultă relația

$$\sum \bar{P}_j \Delta_j - \int \bar{M}\, d\theta - \int \bar{N}\, d\delta_t - \ldots = 0, \tag{8.7}$$

(situația reală; situația auxiliară)

care reprezintă *condiția de compatibilitate a poziției deformate reale*, deoarece s-a folosit un sistem de forțe în echilibru ales în mod arbitrar.

Relațiile (8.6) și (8.7) exprimă *condiția generală de echilibru elastic* a structurii în situația sa reală de încărcare, și anume sub cele două aspecte ale sale: condiția de echilibru static și condiția de compatibilitate a poziției deformate. Se va utiliza deci una sau alta dintre aceste variante, după obiectivul urmărit în problema care se studiază. Privitor la situația auxiliară de încărcare, ea poate fi aleasă după voință și este avantajos să fie cît mai simplă. Obișnuit, se aplică încărcarea cu cîte o singură sarcină-unitate, aleasă corespunzător specificului chestiunii tratate.

Este util de subliniat *caracterul cu totul general* pe care îl capătă relația (8.7), datorită stabilirii ei cu ajutorul deplasărilor virtuale. În această relație, situația reală de încărcare intervine prin poziția deformată, considerată drept configurație de deplasare virtuală; acesteia îi este impusă *singura condiție de a fi compatibilă*. Înseamnă că poziția deformată reală poate fi datorită *oricărei*

cauze (aplicare de sarcini, variații de temperatură, cedări de reazeme, inexactități de montaj etc.), de asemenea unei deformări în întregime elastice sau cu zone de deformare elastico-plastică. Aplicarea relației (8.7) apare astfel limitată numai de posibilitatea de evaluare a deplasărilor relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... în *toate* secțiunile structurii, sub acțiunea cauzei reale. Relația poate fi utilizată pentru studiul poziției deformate date de această cauză, în condițiile considerate. O asemenea lărgire a domeniului de aplicare este deosebit de utilă și ca depășește cadrul echilibrului elastic.

b. **Forțe și deplasări generalizate.** La stabilirea relațiilor (8.6) și (8.7) s-a considerat — pentru ușurința urmăririi — că P_i și $\overline{P}_j$ sînt forțe propriu-zise, iar $\overline{\Delta}_i$ și Δ_j sînt deplasările liniare corespunzătoare (v. fig. 110). Este ușor de văzut, urmărind raționamentele făcute, că natura forțelor și a deplasărilor nu a intervenit explicit, ci numai prin condiția de a fi considerate acele deplasări, prin parcurgerea cărora forțele dau lucru mecanic. Această constatare permite să se extindă aplicarea relațiilor și la alte feluri de deplasări. În figura 111 se dau cîteva exemple simple, unde încărcările și pozițiile deformate au fost reprezentate împreună, spre a se vedea direct modul cum își corespund forțele și deplasările.

Cazul din figura 111, *a* este cel folosit de la început; forței P_i îi corespunde deplasarea liniară Δ_i, deoarece prin parcurgerea acesteia forța produce lucru mecanic. În figura 111, *b*, grinda este acționată de un moment exterior M_1; deplasarea corespunzătoare acestui moment, prin parcurgerea căreia acesta dă lucru mecanic, este rotirea θ_1 a extremității *1*. În cazul din figura 111, *c*, *perechea* de forțe egale și direct opuse P poate fi privită ca o singură încărcare aplicată asupra cadrului; deplasarea corespunzătoare este *variația de distanță* $\Delta l_{24}=\overline{2'4'}-\overline{24}$, deoarece — oricare ar fi poziția deformată — dacă $\Delta l_{24}=0$, perechea de forțe P nu dă lucru mecanic. În figura 111, *d*, o *pereche* de momente egale și de sens contrar acționează pe cele două fețe ale secțiunii

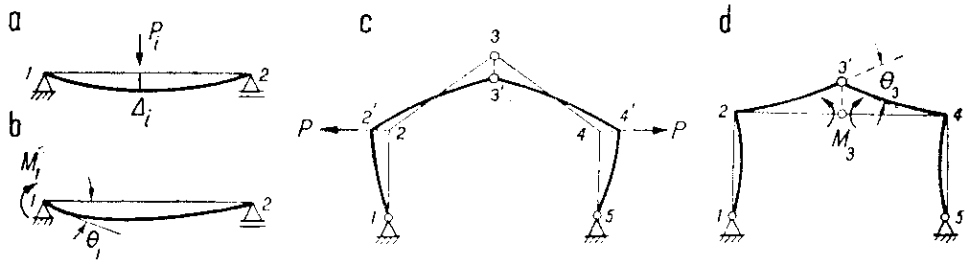


Fig. 111

din articulația *3*. Dacă aceste fețe rămîn paralele, oricare ar fi poziția deformată, perechea de momente nu poate da lucru mecanic; în consecință, deplasarea corespunzătoare perechii de momente este *rotirea relativă* θ_3 care se produce în articulație.

Cazurile de încărcare din figura 111 pot fi toate cuprinse în noțiunea de *forțe generalizate*; se poate considera ca atare orice grup de forțe interdependente

static care alcătuiește o încărcare bine precizată și complet definită printr-un singur simbol. Unei forțe generalizate îi corespunde o *deplasare generalizată* și reciproc; aceasta se identifică prin condiția că *forța generalizată dă lucru mecanic numai parcurgînd deplasarea generalizată corespunzătoare.* Astfel, forței generalizate din figura 111, *d* îi corespunde deplasarea generalizată Δl_{24}; forței generalizate din figura 111, *e* îi corespunde deplasarea generalizată θ_3.

Această generalizare permite să se utilizeze și să se determine direct diferite categorii de deplasări care apar la rezolvarea structurilor static nedeterminate.

3. Teorema generală a reciprocității

Utilizarea în paralel a două situații diferite de încărcare pentru o structură, oglindită de relațiile (8.6) și (8.7), permite să se stabilească o teoremă deosebit de importantă a *echilibrului elastic.*

Fie cele două situații de încărcare considerate anterior, dintre care prima este caracterizată prin forțele exterioare P_i și eforturile M, N, ..., iar a doua prin forțele exterioare $\overline{P}_j$ și eforturile $\overline{M}$, $\overline{N}$, ... Aplicînd principiul deplasărilor virtuale pentru variantele din figurile 110, *c* și *d*, s-au stabilit relațiile

$$\sum P_i \overline{\Delta}_i = \int M \mathrm{d}\overline{\theta} + \int N \mathrm{d}\overline{\delta}_t + \cdots \quad \text{și} \quad \sum \overline{P}_j \Delta_j = \int \overline{M} \mathrm{d}\theta + \int \overline{N}\, \mathrm{d}\delta_t + \cdots$$

În cazul *deformării elastice*, deplasările relative $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\delta_t$, ... și respectiv $\mathrm{d}\overline{\theta}$, $\mathrm{d}\overline{\delta}_t$, ... care rezultă din deformarea elementelor $\mathrm{d}s$, așa cum se arată în figurile 109, *e-h*, se pot exprima în funcție de eforturi în forma cunoscută din Rezistența materialelor, astfel

$$\mathrm{d}\theta = \omega\, \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\delta_t = \varepsilon \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\delta_n = \gamma \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\varphi = \omega_t\, \mathrm{d}s,$$

și deci

$$\mathrm{d}\theta = \frac{M}{EI}\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\delta_t = \frac{N}{EA}\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\delta_n = \frac{kT}{GA}\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{M_t}{GI_t}\mathrm{d}s;$$

$$\mathrm{d}\overline{\theta} = \frac{\overline{M}}{EI}\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\overline{\delta}_t = \frac{\overline{N}}{EA}\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\overline{\delta}_n = \frac{k\overline{T}}{GA}\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\overline{\varphi} = \frac{\overline{M}_t}{GI_t}\mathrm{d}s.$$

Introducîndu-le în cele două relații generale, se constată că, pentru ambele, membrul al doilea rezultă cu aceeași expresie, anume

$$\int \frac{M\overline{M}}{EI}\mathrm{d}s + \int \frac{N\overline{N}}{EA}\mathrm{d}s + \int \frac{kT\overline{T}}{GA}\mathrm{d}s + \int \frac{M_t\overline{M}_t}{GI_t}\mathrm{d}s,$$

ceea ce înseamnă că și primii membrii trebuie să fie egali. Se obține relația

$$\sum P_i \overline{\Delta}_i = \sum \overline{P}_j \Delta_j, \tag{8.8}$$

care exprimă teorema generală a reciprocității (teorema lui *Betti*): *pentru o structură considerată în două situații diferite de încărcare, lucrul mecanic dat de forțele exterioare din prima situație, parcurgînd deplasările care le corespund în poziția deformată produsă de a doua situație, este egal cu lucrul mecanic dat*

de forțele exterioare din a doua situație, parcurgînd deplasările care le corespund în poziția deformată dată de prima situație.

Această teoremă, denumită și teorema reciprocității lucrului mecanic, care pune în reciprocitate cele două situații de încărcare, se referă numai la lucrul mecanic al forțelor exterioare. Una dintre situații va fi desigur cea reală, corespunzătoare problemei care se studiază; cealaltă se alege în mod arbitrar, astfel ca să se obțină rezultate simple și expresive. Totodată, ținînd seama de precizările făcute în legătură cu figura 111, rezultă că *teorema se aplică pentru forțe și deplasări generalizate*. Considerînd că în cele două situații de încărcare i și j ar fi aplicate forțe generalizate P_i, respectiv $\overline{P}_j$, semnificația deplasărilor din relația (8.8) devine: $\overline{\Delta}_i$ este deplasarea generalizată corespunzătoare forței generalizate P_i, produsă de situația de încărcare j; Δ_j — deplasarea generalizată corespunzătoare forței generalizate $\overline{P}_j$, produsă de situația de încărcare i.

La aplicarea expresiei (8.8) este util de precizat că simbolurile P_i și respectiv $\overline{P}_j$ se referă la *totalitatea* forțelor exterioare din situațiile de încărcare considerate — sarcini și reacțiuni —, deoarece acestea împreună formează sistemul de forțe în echilibru ce caracterizează fiecare dintre situații. Reacțiunile dintr-o situație de încărcare apar în expresia (8.8) numai în măsura în care se produc deplasări pe direcțiile lor în cealaltă situație de încărcare. Asemenea deplasări sînt *cedările de rezemări* și desigur ele pot interveni numai pentru situația *reală* de încărcare. În consecință, diferențiind notațiile și admițînd că prima situație este cea reală, se poate scrie

$$\sum P_i \Delta_i = \sum \overline{P}_j \Delta_j + \sum \overline{R}_j \Delta_r, \tag{8.9}$$

unde cu $\overline{R}_j$ s-au notat reacțiunile din situația auxiliară și cu Δ_r cedările de reazeme pe direcțiile acestora, în situația reală.

Domeniul de aplicare al teoremei reciprocității poate fi lărgit, dacă se consideră raportul de cauzalitate în care se găsesc cele două elemente ale situațiilor de încărcare, anume sistemul de forțe în echilibru și poziția deformată compatibilă. Fiecare dintre aceste elemente poate fi considerat drept *cauză* în situația respectivă de încărcare. Din acest punct de vedere se pot distinge:

— Încărcare cu *sarcini*, care reprezintă cazul uzual. Sarcinile aplicate apar ca date ale problemei și, în consecință, trebuie privite ca variabile independente, în timp ce deplasările care rezultă în poziția deformată sînt efecte ale aplicării sarcinilor.

— Încărcare cu *deplasări*, care intervine în anumite metode pentru calculul structurilor static nedeterminate. Pe direcțiile unor legături, în rezemări sau în alte puncte ale structurii, se consideră *impuse* anumite deplasări de mărime arbitrar aleasă. Deși nu sînt aplicate sarcini, prezența legăturilor *suplimentare* obligă structura să se deformeze elastic, aceasta trecînd într-o poziție deformată compatibilă cu legăturile existente. Deplasările impuse au caracter de variabile independente și pot fi deci privite ca formînd o „încărcare" aplicată pe structură — încărcare cu deplasări, în timp ce reacțiunile care se nasc în legături sînt efecte ale aplicării deplasărilor și formează un sistem de forțe în echilibru.

Considerînd în acest mod posibilitățile de încărcare, rezultă că cele două situații legate prin relația de reciprocitate se pot referi ambele la aplicarea de sarcini sau la impunerea unor deplasări; de asemenea, nimic nu împiedică să se considere la una dintre situații aplicate sarcini, iar în cealaltă să se admită impuse anumite deplasări. Se pot astfel obține trei forme particulare ale teoremei generale, care au o largă utilizare în Statica construcțiilor.

4. Forme particulare ale teoremei reciprocității

a. **Reciprocitatea deplasărilor unitare.** Se consideră cazul particular, cînd în ambele situații de încărcare este aplicată cîte o singură forță generalizată, anume P_i și $\overline{P_j}$ (fig. 112, *a*). Forțele sînt în acest caz variabile independente, iar deplasările care se produc în poziția deformată reprezintă efecte ale aplicării forțelor.

Pentru exprimarea reciprocității (8.8), din prima situație va interveni deplasarea $\Delta_j = P_i \delta_{ji}$, care se produce pe direcția forței $\overline{P_j}$, iar din cea de a doua situație — deplasarea $\overline{\Delta}_i = \overline{P_j} \delta_{ij}$, care se produce pe direcția forței P_i. Aceste deplasări au fost exprimate în baza legii proporționalității sub forma (8.2), în funcție de forțele care le produc. Cantitățile δ_{ji} și δ_{ij} se numesc *deplasări unitare*, deoarece sînt produse de cauze (forțe) egale cu unitatea. Introducînd în relația de reciprocitate $P_i \overline{\Delta}_i = \overline{P}_j \Delta_j$, se obține

$$P_i \overline{P_j} \delta_{ij} = \overline{P_j} P_i \delta_{ji}, \quad \text{deci} \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}. \tag{8.10}$$

relație care exprimă *reciprocitatea deplasărilor unitare* (teorema Maxwell): *deplasarea corespunzătoare forței generalizate P_i, datorită aplicării pe structură a forței generalizate-unitate $\overline{P}_j = 1$, este numeric egală cu deplasarea corespunzătoare forței generalizate $\overline{P}_j$, datorită aplicării pe structură a forței generalizate-unitate $\overline{P}_i = 1$.*

Privitor la *dimensiunea* deplasărilor unitare, se reamintesc cele arătate anterior în legătură cu relațiile (8.2), anume că acestea au caracter de *coeficienți de influență*. Astfel, pentru deplasarea unitară δ_{ij} rezultă

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_i}{P_j} = \frac{\text{deplasarea generalizată } i}{\text{forța generalizată } j}$$

și deci are dimensiunea dată de dimensiunea simbolului, împărțită prin dimensiunea cauzei. Privitor la *semnele* deplasărilor unitare, trebuie ținut seama că reciprocitatea provine dintr-o relație de lucru mecanic; înseamnă că δ_{ij} este pozitiv, cînd se produce în sensul de acțiune al forței $P_i = 1$, iar δ_{ji} este pozitiv, cînd se produce în sensul de acțiune al forței $\overline{P}_j = 1$.

În figurile 112, *b-d* se dau cîteva exemple de reciprocitate a deplasărilor unitare, considerînd încărcări cu forțe și cu momente. Pentru claritate, notațiile deplasărilor s-au particularizat, fiind totodată adăugat și un al treilea indice, care arată natura cauzei ce produce deplasarea. În cazul din figura 112, *b*

$P_i=1$ și $\overline{P}_j=1$ sînt forțe, iar $\delta_{ij,f}$ și $\delta_{ji,f}$ sînt deplasări liniare produse de forțe-unitate. Reciprocitatea are forma

$$\delta_{ij,f}=\delta_{ji,f} \tag{a}$$

și arată că cele două deplasări liniare însemnate pe figură cu aceste notații sînt egale; ambele sînt negative și au dimensiunea L/F. În cazul din figura

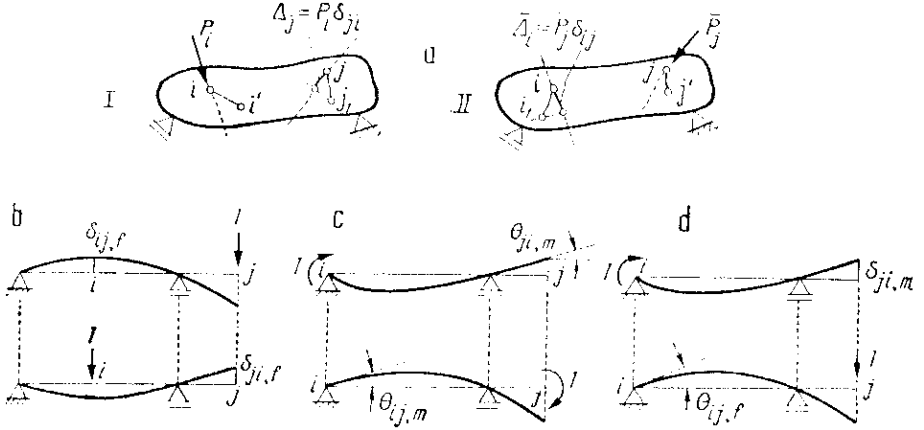


Fig. 112

112, *c*, $P_i=1$ și $\overline{P}_j=1$ sînt momente exterioare, iar $\theta_{ij,m}$ și $\theta_{ji,m}$ sînt rotiri unitare produse de momente-unitate. Reciprocitatea are forma

$$\theta_{ij,m}=\theta_{ji,m}, \tag{b}$$

astfel că cele două rotiri indicate pe figură sînt egale; ambele au valori negative și dimensiunea $1/FL$.

Un caz interesant apare în figura 112, d, unde în prima situație $P_i=1$ este un moment exterior, iar în a doua situație $\overline{P}_j=1$ este o forță. În aceste condiții, $\theta_{ij,f}$ este rotire unitară produsă de forță-unitate, iar $\delta_{ji,m}$ — deplasare liniară dată de moment-unitate. Reciprocitatea are forma

$$\theta_{ij,f}=\delta_{ji,m}, \tag{c}$$

și arată că cele două cantități însemnate pe figură cu aceste notații sînt egale. Nu este numai o egalitate numerică, ci și o concordanță dimensională, deoarece pentru ambele deplasări unitare rezultă dimensiunea $1/F$; amîndouă sînt negative.

Reciprocitatea deplasărilor unitare va fi utilizată mai departe la rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda generală a eforturilor.

b. **Reciprocitatea reacțiunilor unitare.** Este o relație de reciprocitate specifică structurilor static nedeterminate, care se obține considerîndu-se în ambele situații încărcare cu deplasări, și anume cîte o singură deplasare pe direc-

ția uneia dintre legături (fig. 113, *a*). În prima situație se impune deplasarea Δ_i pe direcția legăturii i, iar a doua situație se impune deplasarea $\overline{\Delta}_j$ pe direcția legăturii j[1]. Deplasările Δ_i și $\overline{\Delta}_j$ sînt în acest caz variabilele independente, iar reacțiunile care se produc în rezemări reprezintă efecte ale aplicării deplasărilor.

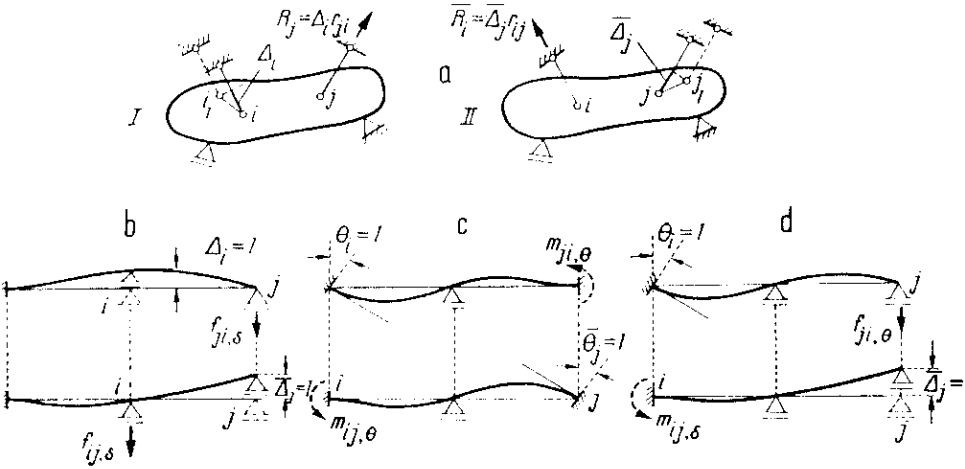


Fig. 113

Pentru exprimarea reciprocității (8.8), din prima situație va interveni reacțiunea $R_j = \Delta_i r_{ji}$, care se produce în legătura j, iar din a doua situație va interveni reacțiunea $\overline{R}_i = \overline{\Delta}_j r_{ij}$, care se produce în legătura i. Reacțiunile au fost exprimate în funcție de deplasările care le produc, pe baza legii proporționalității, folosindu-se cantitățile r_{ji} și r_{ij}, ale căror semnificații sînt

r_{ji} — reacțiunea care se naște în legătura j, cînd se impune o deplasare $\Delta_i = 1$ pe direcția legăturii i;

r_{ij} — reacțiunea care se naște în legătura i, cînd se impune o deplasare $\overline{\Delta}_j = 1$ pe direcția legăturii j.

Cantitățile r_{ji} și r_{ij} se numesc *reacțiuni unitare*, deoarece sînt produse de cauze (deplasări) egale cu unitatea. Introducînd în relația de reciprocitate care aici are forma $\Delta_i \overline{R}_i = \overline{\Delta}_j R_j$, se obține

$$\Delta_i \overline{\Delta}_j r_{ij} = \Delta_j \Delta_i r_{ji}, \quad \text{deci} \quad r_{ij} = r_{ji}, \tag{8.11}$$

relație care exprimă *reciprocitatea reacțiunilor unitare: reacțiunea care se naște în legătura i, cînd se impune o deplasare-unitate pe direcția legăturii j, este egală cu reacțiunea care se naște în legătura j, cînd se impune o deplasare unitate pe direcția legăturii i.*

[1] Datorită deformării de ansamblu a structurii, deplasările efective care rezultă în punctele i și j sînt ii_1 și jj_1.

Relaţia (8.11) are caracter general, referindu-se la reciprocitatea reacţiunilor unitare, oricare ar fi cele două legături considerate ale sistemului static nedeterminat. Aceasta înseamnă că reciprocitatea nu se aplică numai la legăturile din rezemări, ci şi la orice alte legături din cuprinsul structurii; *termenul „reacţiune" se referă în acest caz la forţa de legătură respectivă (efort), care apare ca o forţă generalizată.*

Privitor la *dimensiunea* reacţiunilor unitare, se va ţine seama că şi acestea au caracter de coeficienţi de influenţă. Astfel, pentru reacţiunea unitară r_{ij} rezultă

$$r_{ij} = \frac{R_i}{\Delta_j} = \frac{\text{forţa generalizată } i}{\text{deplasarea generalizată } j}$$

având dimensiunea dată de dimensiunea simbolului, împărţită prin dimensiunea cauzei. Privitor la *semnele* reacţiunilor unitare, trebuie ţinut şi aici seama că relaţia de reciprocitate provine dintr-o relaţie de lucru mecanic; înseamnă că r_{ij} este pozitivă în sensul deplasării-unitate $\Delta_i = 1$, iar r_{ji} este pozitivă în sensul deplasării-unitate $\bar{\Delta}_j = 1$.

Pentru ilustrarea reciprocităţii reacţiunilor unitare se dau cîteva exemple în figurile 113, *b-d*. În cazul din figura 113, *b*, $\Delta_i = 1$ şi $\bar{\Delta}_j = 1$ sînt ambele deplasări liniare, iar r_{ij} şi r_{ji} sînt reacţiuni-forţă unitare produse de deplasări liniare. Particularizînd notaţiile şi introducînd un al treilea indice care să arate natura cauzei ce produce reacţiunea, reciprocitatea se scrie sub forma

$$f_{ij,\delta} = f_{ji,\delta}, \tag{a}$$

şi arată că cele două reacţiuni-forţă însemnate pe figură cu aceste notaţii sînt egale; ambele reacţiuni sînt negative, avînd dimensiunea F/L. În cazul din figura 113, *c*, $\Delta_i = 1$ şi $\bar{\Delta}_j = 1$ sînt ambele rotiri, iar r_{ij} şi r_{ji} sînt reacţiuni-moment unitare produse de rotiri-unitate. Particularizînd şi aici notaţiile, reciprocitatea are forma

$$m_{ij,0} = m_{ji,0}, \tag{b}$$

astfel că cele două momente indicate pe figură sînt egale; ambele sînt negative şi au dimensiunea FL.

Un alt caz este arătat în figura 113, *d*, unde în prima situaţie $\Delta_i = 1$ reprezintă o rotire, iar în a doua situaţie $\bar{\Delta}_j = 1$ reprezintă o deplasare liniară. În aceste condiţii, r_{ij} este reacţiune-moment unitară produsă de deplasare liniară, iar r_{ji} este reacţiune-forţă unitară produsă de rotire. Reciprocitatea apare sub forma

$$m_{ij,\delta} = f_{ji,0} \tag{c}$$

şi arată că cele două reacţiuni însemnate pe figură cu aceste notaţii sînt egale. Această egalitate nu se referă numai la valorile numerice, ci oglindeşte şi o concordanţă dimensională, deoarece pentru ambele reacţiuni unitare rezultă dimensiunea F; amîndouă sînt negative.

Reciprocitatea reacţiunilor unitare va fi utilizată mai departe la rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda generală a deplasărilor.

c. **Reciprocitatea dintre deplasări unitare și reacțiuni unitare.** Este de asemenea o relație de reciprocitate specifică structurilor static nedeterminate, care se obține considerînd că într-una dintre situații se aplică o forță generalizată, iar în cealaltă situație se impune o deplasare pe direcția uneia dintre legături (fig. 114, *a*). Astfel, în prima situație este aplicată forța P_i, care produce dezvoltarea de reacțiuni în legături, de exemplu în legătura j;

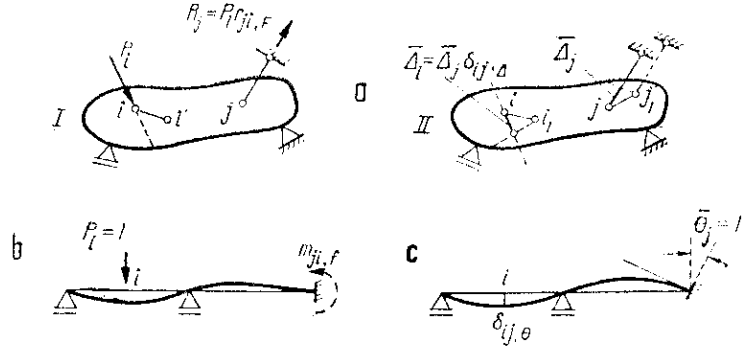


Fig. 114

în a doua situație se impune deplasarea $\bar{\Delta}_j$ pe direcția legăturii j, rezultînd o poziție deformată compatibilă cu celelalte legături și caracterizată prin diferite deplasări, între care și o deplasare pe direcția forței P_i. În situația *I*, sarcina P_i este variabila independentă și reacțiunile din legături sînt efectele sale; în situația *II*, deplasarea $\bar{\Delta}_j$ apare ca variabilă independentă, iar deplasările ce caracterizează poziția deformată sînt efecte.

Pentru exprimarea reciprocității (8.8), din prima situație vor interveni două forțe, și anume forța generalizată P_i și reacțiunea $R_j=P_i r_{ji,F}$ care se produce în legătura j, iar din a doua situație vor interveni deplasările corespunzătoare acestora, anume deplasarea $\bar{\Delta}_i=\bar{\Delta}_j\delta_{ij,\Delta}$ pe direcția forței P_i și deplasarea $\bar{\Delta}_j$.[1] R_j și Δ_i sînt exprimate pe baza legii proporționalității, în funcție de cauzele care le produc. De remarcat că în a doua situație nu sînt forțe cărora să le corespundă deplasări în prima situație, astfel că în relația de reciprocitate primul membru va conține doi termeni, în timp ce al doilea membru este nul. Deci $P_i\bar{\Delta}_i+R_j\Delta_j=0$, unde introducînd pe Δ_i și R_j cu expresiile de mai sus, rezultă

$$P_i\Delta_j\delta_{ij,\Delta}+\Delta_j P_i r_{ji,F}=0 \quad \text{sau} \quad \delta_{ij,\Delta}=-r_{ji,F}, \tag{8.12}$$

relație care exprimă *reciprocitatea dintre deplasări unitare și reacțiuni unitare: deplasarea care se produce pe direcția forței generalizate P_i, cînd se impune o*

[1] Pentru al treilea indice s-au admis aici simbolurile F și Δ, deoarece se referă la cazul general, anume la forțe și deplasări generalizate.

deplasare $\bar{\Delta}_j=1$ pe direcția legăturii j, este egală și de semn contrar cu reacțiunea care se naște în legătura j cînd pe structură acționează sarcina $P_i=1$.

Faptul că din relația (8.12) rezultă aparent o egalitate între două mărimi de naturi diferite nu trebuie să surprindă. Este în primul rînd vorba de o egalitate numerică, dar și dimensional relația este omogenă, deoarece cantitățile care intervin au caracter de coeficienți de influență și dimensiunea fiecăreia dintre ele este dată de dimensiunea simbolului împărțită cu dimensiunea cauzei. Este același lucru cu a considera pe $\delta_{ij,\Delta}$ și $r_{ji,F}$ drept efecte ale unor cauze-unitate *fără dimensiune.*

Privitor la *semne*, trebuie și aici ținut seama că reciprocitatea provine dintr-o relație de lucru mecanic; înseamnă că $\delta_{ij,\Delta}$ se consideră pozitivă în sensul de acțiune al sarcinii $P_i=1$, iar $r_{ji,F}$ este pozitivă în sensul deplasării $\bar{\Delta}_j=1$.

Un exemplu este dat în figura 114, *b-c*. În prima situație se aplică o forță $P_i=1$ în secțiunea *i*, iar în a doua situație se impune o rotire $\bar{\theta}_j=1$ în încastrarea *j*. Prin reciprocitate, înseamnă că reacțiunea-moment $m_{ji,f}$ din prima situație este egală și de semn contrar cu deplasarea liniară $\delta_{ij,0}$ din a doua situație, deci se ajunge la relația

$$m_{ji,f}=-\delta_{ij,0},$$

în care ambii membri au dimensiunea *L*. Din figură se vede că cele două cantități au semne contrare, anume $m_{ji,f}$ este negativ și $\delta_{ij,0}$ este pozitivă, așa cum cere relația stabilită.

Reciprocitatea dintre deplasări unitare și reacțiuni unitare prezintă o importanță deosebită, deoarece stă la baza construirii liniilor de influență la structuri static nedeterminate. De asemenea, este utilizată în metoda mixtă pentru rezolvarea cadrelor.

C. CALCULUL DEPLASĂRILOR

1. Expresia generală a deplasărilor

Pentru studiul pozițiilor deformate este necesar să se determine diferite *deplasări*, de exemplu deplasarea liniară și rotirea unei secțiuni, care se produc prin trecerea structurii din poziția inițială în poziția deformată. Asemenea deplasări se numesc și *deplasări punctuale*, deoarece se produc într-un anumit punct al axei structurii. Prin extindere, se pot cuprinde în această denumire și *deplasări generalizate* de felul celor arătate în figura 111 (variația de distanță dintre două puncte, rotirea relativă dintre cele două fețe ale unei articulații etc.). În afară de specificul deplasării considerate, trebuie să se țină seama și de *natura cauzei* care produce deformarea: acțiunea unor sarcini, variații de temperatură, cedări de reazeme etc.

Cazul general se referă deci la *determinarea deplasărilor punctuale oarecare, oricare ar fi cauza ce produce deformarea structurii*. Vom stabili o expresie ge-

nerală a deplasărilor, care să poată apoi fi particularizată în raport cu natura cauzei. În acest scop se utilizează condiția generală a echilibrului în poziția deformată, sub forma (8.7), deoarece în această formă intervine elementul care interesează aici, anume poziția deformată din situația reală de încărcare. Datorită caracterului cu totul general al relației (8.7), evidențiat anterior, se asigură și generalitatea necesară privitor la natura cauzei ce produce deformarea.

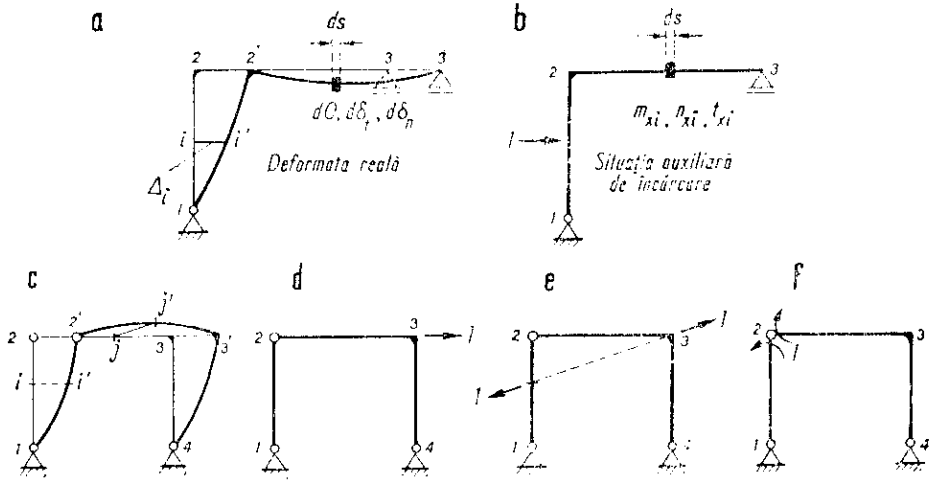


Fig. 115

Fie poziția deformată a unei structuri oarecare (fig. 115, *a*), datorită unei cauze inițial neprecizate și pentru care se cere să se determine o *anumită* deplasare Δ_i (în figură s-a admis deplasarea orizontală $\overline{ii'}$). Deformata considerată este caracterizată prin deplasări relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... ale elementelor ds. Utilizarea relației (8.7) cere să se ia în paralel și o situație *auxiliară* de încărcare, adaptată specificului problemei, anume aplicînd pe structură *o sarcină-unitate pe direcția deplasării căutate* (fig. 115, *b*). Datorită acestei sarcini, pe fețele elementului curent ds se dezvoltă eforturile m_{xi}, n_{xi}, ... În aceste condiții, relația generală (8.7) se scrie

$$1 \cdot \Delta_i - \int m_{xi}\, d\theta - \int n_{xi}\, d\delta_t - \ \dots \ = 0,$$

de unde rezultă

$$\Delta_i = \int m_{xi}\, d\theta + \int n_{xi}\, d\delta_t + \int t_{xi}\, d\delta_n + \int m^t_{xi}\, d\varphi, \tag{8.13}$$

care este *expresia generală a deplasării* Δ_i[1]. Expresia poate fi aplicată *oricare ar fi cauza deformării*; singura limitare constă în posibilitatea de a evalua deplasările relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... în toate punctele axei structurii.

[1] Expresia a fost scrisă cu toți termenii, inclusiv cel corespunzător momentelor de torsiune, urmînd ca la aplicarea practică să se rețină numai unii termeni, cum s-a precizat anterior.

Se ajunge la concluzia că pentru calculul deplasării Δ_i (care poate fi o deplasare generalizată oarecare) este necesar:

— să se considere poziția deformată *reală* și să se stabilească expresiile deplasărilor relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... în secțiunea curentă, pentru toate părțile structurii;

— să se considere o situație *auxiliară* de încărcare, aplicînd pe structură sarcina-unitate corespunzătoare deplasării căutate și să se traseze diagramele de eforturi m_{xi}, n_{xi}, ..., stabilind expresiile corespunzătoare.

Cu ajutorul acestor elemente se efectuează apoi integrările produselor indicate de expresie, în lungul axelor tuturor barelor care alcătuiesc structura.

Pentru aplicarea practică a expresiei (8.13) sînt necesare unele precizări privitoare la *semne*, care apar evidente dacă se ține seama că s-a pornit de la relația generală (8.7), ai cărei termeni au semnificație de lucru mecanic:

(1) Sarcina-unitate din situația auxiliară de încărcare se aplică cu un anumit sens. Produsul $1 \cdot \Delta_i$ este pozitiv cînd acest sens concordă cu acel al deplasării efective Δ_i. Înseamnă că sensul de aplicare al sarcinii-unitate trebuie să fie cel admis pozitiv pentru deplasare. Cu alte cuvinte, *sensul sarcinii-unitate din situația auxiliară definește convenția de semne pentru deplasarea căutată*: dacă aceasta rezultă din calcul pozitivă, înseamnă că se produce în sensul sarcinii-unitate.

(2) Semnele integralelor rezultă ținînd seama că acestea reprezintă lucrul mecanic dat de eforturile m_{xi}, n_{xi}, ... parcurgînd deplasările corespunzătoare $d\theta$, $d\delta_t$, ... din situația reală. *Semnul* integralei într-o anumită porțiune a structurii se obține deci comparînd *sensul* de deformare al elementului curent ds, produs de m_{xi}, n_{xi}, ..., cu *sensul* deplasării relative $d\theta$, $d\delta_t$, ...; cînd sensurile concordă — integrala este pozitivă, cînd nu concordă — integrala este negativă.

Pentru o anumită poziție deformată pot fi calculate diferite deplasări punctuale. La toate aceste deplasări, în expresia (8.13) elementele care provin de la deformata reală (anume deplasările relative $d\theta$, $d\delta_t$, ...) sînt aceleași; în schimb, situația auxiliară de încărcare este specifică fiecărei deplasări, și deci diagramele de eforturi m_{xi}, n_{xi}, ... se modifică de la o deplasare la alta. Astfel, pentru poziția deformată din figura 115, *c*, deplasării liniare orizontale $u_3 = \overline{33'}$ îi corespunde situația auxiliară din figura 115, *d*, variației de distanță dintre secțiunile *i* și *3* — situația auxiliară din figura 115, *e*, iar pentru rotirea relativă dintre fețele secțiunii din articulația *2* trebuie considerată situația auxiliară din figura 115, *f*. Cînd direcția unei deplasări este inițial necunoscută, se determină obișnuit *proiecțiile* deplasării efective pe două direcții, de exemplu proiecția pe orizontală și proiecția pe verticală a deplasării $\overline{jj'}$ din figura 115, *c*, folosindu-se două situații auxiliare, în care apar sarcini-unitate pe aceste două direcții.

O formă mai completă a expresiei (8.13) se obține prin introducerea efectului *cedărilor de reazeme*. Pentru aceasta, în situația auxiliară de încărcare trebuie considerată atît sarcina-unitate aplicată pe direcția deplasării căutate, cît și reacțiunile pe care aceasta le produce în rezemările structurii. Cînd reazemele nu au cedări, aceste reacțiuni nu au deplasări corespunzătoare de parcurs,

și deci lucrul mecanic virtual respectiv este nul. Dacă intervin cedări de reazeme, reacțiunile din situația auxiliară dau lucru mecanic virtual, parcurgînd componentele cedărilor de pe direcțiile lor, și deci aceste cedări intră în expresia deplasării.

Notîndu-se în general cu Δ_r cedările de reazeme din situația reală și cu $\bar{r}_i$ reacțiunile din situația auxiliară, date de sarcina-unitate corespunzătoare deplasării Δ_i, se obține condiția

$$1 \cdot \Delta_i + \sum \bar{r}_i \Delta_r - \int m_{xi}\, d\theta - \int n_{xi}\, d\delta_t - \ldots = 0,$$

de unde rezultă

$$\Delta_i = \int m_{xi}\, d\theta + \int n_{xi}\, d\delta_t + \int t_{xi}\, d\delta_n + \int m^t_{xi}\, d\varphi - \sum \bar{r}_i \Delta_r, \tag{8.14}$$

care este forma completă a expresiei generale a deplasărilor. Ultimul termen introduce efectul cedărilor de reazeme, exprimînd corectarea mărimii deplasării Δ_i din această cauză.

2. Deplasări datorite sarcinilor

a. **Stabilirea formulei Maxwell-Mohr.** Expresia (8.13) este generală și la stabilirea ei nu s-a precizat cauza care produce deformarea structurii. Această cauză intervine în expresie prin deplasările relative $d\theta$, $d\delta_t$ ... pe care le produce asupra elementului curent ds. Precizarea cauzei permite evaluarea deplasărilor relative și scrierea expresiei sub forma particularizată corespunzătoare.

Cazul cel mai des întîlnit se referă la *încărcarea cu sarcini*, care produce deformarea elastică a structurii. Pentru deplasările relative $d\theta$, $d\delta_t$, ... urmează să se introducă expresiile cunoscute din Rezistența materialelor, stabilite în ipoteza secțiunilor plane (Bernoulli). Notînd cu M_x, N_x, ... eforturile care se produc în secțiunea curentă a structurii sub acțiunea sarcinilor date, se poate scrie

$$d\theta = M_x \frac{ds}{EI}, \quad d\delta_t = N_x \frac{ds}{EA}, \quad d\delta_n = kT_x \frac{ds}{GA}, \quad d\varphi = M^t_x \frac{ds}{GI_t},$$

astfel că expresia generală (8.13) capătă forma

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int N_x n_{xi} \frac{ds}{EA} + \int kT_x t_{xi} \frac{ds}{GA} + \int M^t_x m^t_{xi} \frac{ds}{GI_t}, \tag{8.15}$$

care este formula *Maxwell-Mohr* cu ajutorul căreia se pot determina deplasările elastice punctuale de orice fel, în înțelesul de deplasări generalizate.

Folosind această expresie, calculul unei deplasări se conduce astfel:

— se trasează diagramele M_x, N_x, ... pentru ansamblul de sarcini dat și se stabilesc expresiile ordonatelor pe diferitele bare ale structurii;

— se consideră situația auxiliară de încărcare, aplicîndu-se pe structură sarcina-unitate corespunzătoare deplasării căutate și se trasează diagramele m_{xi}, n_{xi}, ..., stabilindu-se și aici expresiile ordonatelor;

— se integrează produsele ordonatelor din secțiunea curentă în lungul axelor tuturor barelor structurii; semnele integralelor rezultă automat, pe baza semnelor diagramelor de eforturi din cele două situații de încărcare, trasate pe baza aceleiași convenții de semne.

Particularizarea făcută nu restrînge domeniul de aplicare, astfel că *formula (8.15) poate fi folosită atît la structuri static determinate, cît și la structuri static nedeterminate.*

În expresia deplasării Δ_i nu este necesar să se rețină toate integralele. S-a arătat anterior că integralele care conțin efectul încovoierii și al torsiunii (la structuri spațiale) constituie cea mai mare parte a deplasării calculate cu formula (8.15); față de aceasta, celelalte două integrale (efectul forțelor axiale și al forțelor tăietoare) aduc corecții reduse și pot fi deseori neglijate. Astfel:

(1) La grinzi și cadre alcătuite din bare drepte, care sînt solicitate dominant la încovoiere, este suficient să se rețină integrala momentelor încovoietoare; efectul forțelor axiale este totdeauna neglijabil la aceste structuri, cu excepția barelor avînd efort axial important (de exemplu tiranți).

(2) La arce și în general la bare curbe este deseori suficient să se rețină numai integrala momentelor încovoietoare, cît timp sarcinile date sînt astfel încît curba de presiune este departe de axa barei; pentru cazuri apropiate de forma de coincidență trebuie considerat și efectul forțelor axiale. Deoarece arcele folosite în construcții au obișnuit curbură redusă și grosime mică, se neglijează efectul curburii și al forțelor tăietoare.

(3) La grinzi cu zăbrele nu intervine decît integrala care conține forțele axiale.

Pentru exemplificare, fie structura din figura 116, *a*, care are bara superioară de formă parabolică; se cere determinarea deplasării orizontale u_3 din reazemul simplu 3, sub acțiunea unei sarcini orizontale uniform distribuită pe porțiunea *1-2*. Momentul de inerție este constant pe bara *1-2*, iar pe porțiunea curbă variază după legea $I = I_c/\cos\varphi$, unde I_c corespunde secțiunii de la mijlocul deschiderii (cheie).

Cele două situații de încărcare se văd în figurile 116, *a* și *b*, unde s-au trasat diagrama M_x dată de sarcini și diagrama m_{x3} dată de sarcina-unitate corespunzătoare deplasării căutate. Expresiile momentului încovoietor din secțiunea curentă, pentru cele două porțiuni ale structurii, sînt:

— situația reală de încărcare

$$(1-2) \qquad M_x = phy - py^2/2 = ph^2\eta_1(2-\eta_1)/2, \qquad (\eta_1 = y/l)$$

$$(2-3) \qquad M_x = ph^2x'/2l = ph^2\xi'/2, \qquad (\xi' = x'/l)$$

situația auxiliară de încărcare

$$(1-2) \qquad m_{x3} = y = h\eta_1,$$

$$(2-3) \qquad m_{x3} = hx'/l + 4f\,\xi(1-\xi) = h\xi' + 4f\,\xi'(1-\xi').$$

Legea de variație a momentului de inerție pe porțiunea curbă *2-3* conduce la

$$ds/EI = ds\cos\alpha/EI_c = dx'/EI_c,$$

unde numitorul EI_c este o constantă, iar *integrarea urmează a se face după orizontală*. Ținînd seama că $dx = l\,d\xi$ și $dy = h\,d\eta$, se obține

$$(1-2) \qquad \int M_x m_{x3} \frac{dy}{EI} = \frac{ph^4}{2EI_1} \int_0^1 \eta^2(2-\eta)d\eta = \frac{5\,ph^4}{24\,EI_1},$$

$$(2-3) \qquad \int M_x m_{x3} \frac{dx}{EI_c} = \frac{ph^2l}{2EI_c} \int_0^1 \xi'^2 d\xi' + \frac{2\,ph^2fl}{EI_c} \int_0^1 \xi'^2(1-\xi')d\xi' = \frac{ph^2l(h+f)}{6EI_c},$$

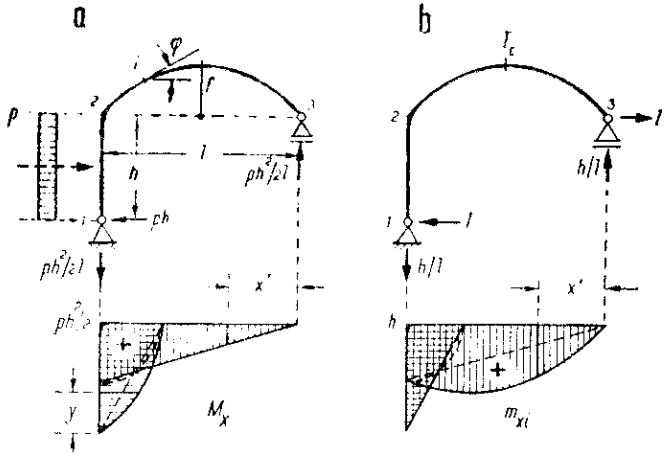


Fig. 116

astfel că rezultă următoarea expresie pentru deplasarea căutată

$$u_3 = \frac{5\,ph^4}{24\,EI_1} + \frac{ph^2l(h+f)}{6\,EI_c} = \frac{ph^2l}{24\,EI_c}\left[5\,k + 4\,(1+\alpha)\right],$$

unde s-au introdus rapoartele $f/h = \alpha$ și $hI_c/lI_1 = k$. Se vede că mărimea deplasării depinde atît de configurația geometrică a structurii, cît și de raportul dintre momentele de inerție ale barelor.

b. **Calculul deplasărilor unitare.** Deplasările unitare sînt deplasări elastice produse de sarcini-unitate; ele au caracter de coeficienți de influență, cum s-a arătat anterior în legătură cu stabilirea relației (8.10). Calculul deplasărilor unitare se face aplicînd expresia (8.15) pentru cazul de încărcare cu o singură sarcină-unitate.

Fie de calculat o deplasare unitară δ_{ij} (fig. 117, *a*); aceasta este deplasarea Δ_i, cînd pe structură se aplică sarcina $P_j = 1$. Încărcarea reală fiind o sarcină-unitate, se poate scrie $M_x = m_{xj}$, $N_x = n_{xj}$, ... și expresia deplasării devine

$$\delta_{ij} = \int m_{xj} m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int n_{xj} n_{xi} \frac{ds}{EA} + \ldots,$$

unde eforturile m_{xi}, n_{xi}, ... sînt date de sarcina-unitate, aplicată în situația auxiliară de încărcare pe direcția deplasării căutate (fig. 117, *b*). În mod

asemănător, pentru deplasarea unitară δ_{ji} (fig. 117, *d*), care este deplasarea Δ_j pentru încărcarea cu $P_i=1$, va rezulta $M_x=m_{xi}$, $N_x=n_{xi}$, ... și expresia capătă forma

$$\delta_{ji}=\int m_{xi}\,m_{xj}\frac{ds}{EI}+\int n_{xi}\,n_{xj}\frac{ds}{EA}+\dots$$

unde de data aceasta eforturile m_{xj}, n_{xj}, ... sînt date de sarcina-unitate aplicată în situația auxiliară de încărcare (fig. 117, *c*).

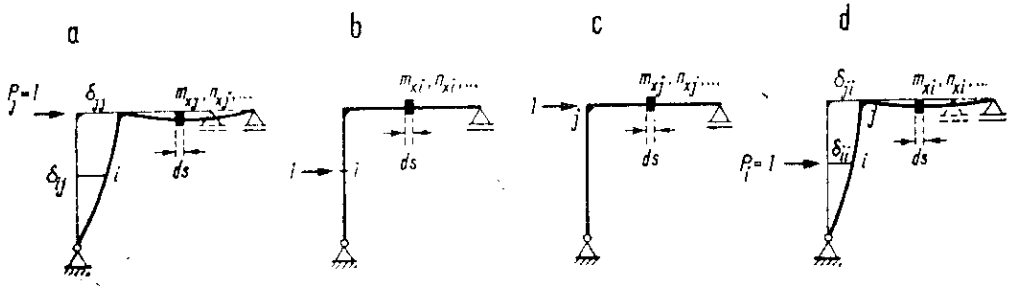


Fig. 117

Se controlează imediat că în ambele cazuri expresia deplasării este aceeași, astfel că se obține

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}=\int m_{xi}\,m_{xj}\frac{ds}{EI}+\int n_{xi}\,n_{xj}\frac{ds}{EA}+\dots, \tag{8.16}$$

care reprezintă *expresia generală a deplasărilor unitare* și care include relația de reciprocitate (8.10). Sub integrale apar produsele coeficienților de influență-eforturi datorite celor două situații de încărcare cu sarcini-unitate, indiferent care dintre acestea este situația reală; trecerea de la δ_{ij} la δ_{ji} se obține inversînd între ele situația reală cu cea auxiliară. Expresia are caracter general, în fiecare situație putînd interveni forțe și deplasări generalizate.

Cînd deplasarea unitară căutată este chiar *cea corespunzătoare sarcinii-unitate* aplicată în situația reală de încărcare, de exemplu δ_{ii} (fig. 117, *d*), expresia deplasării devine

$$\delta_{ii}=\int m_{xi}^2\frac{ds}{EI}+\int n_{xi}^2\frac{ds}{EA}+\dots, \tag{8.17}$$

deoarece situația auxiliară de încărcare (fig. 117, *b*) este identică cu cea reală. Expresia arată că δ_{ii} este totdeauna pozitivă.

3. Utilizarea simetriei și a antisimetriei

La calculul deplasărilor elastice pentru *structuri simetrice* se obțin avantaje importante dacă se ține seama de această particularitate. Prin simetria unei structuri în raport cu o axă se înțelege atît simetria geometrică și de reze-

mări, cît și simetria privitoare la caracteristicile secțiunilor transversale ale barelor (de exemplu, A, I) și la material (E, G). Astfel, pentru cadrul din figura 118, *a*, la care axa de simetrie este verticala ce trece prin articulația *3*, perechile de bare *1-2* și *5-4*, respectiv *2-3* și *4-3*, trebuie să fie identice. Simetria rezemărilor rezultă fie din natura acestora (articulații, încastrări), fie din faptul că sub acțiunea sarcinilor date ele se comportă la fel.

La structuri simetrice este avantajos ca încărcarea considerată să fie descompusă într-o componentă simetrică și o componentă antisimetrică, cum s-a arătat anterior în legătură cu figura 37. În acest mod, trasarea diagramelor de eforturi pentru încărcarea dată se înlocuiește prin trasarea a două serii de diagrame, corespunzătoare componentelor acesteia. În loc de diagrame de formă oarecare se obțin perechi de diagrame simetrice și antisimetrice. Astfel, la structuri plane:

— pentru o încărcare *simetrică*, diagramele N și M rezultă simetrice, iar diagrama T antisimetrică;
— pentru o încărcare *antisimetrică*, diagramele N și M rezultă antisimetrice, iar diagrama T simetrică.

La structuri spațiale, diagrama M^t rezultă antisimetrică pentru încărcări simetrice și simetrică pentru încărcări antisimetrice.

Utilitatea descompunerii apare la aplicarea expresiei (8.15), unde trebuie efectuată integrarea produsului ordonatelor curente a două diagrame diferite. Dacă ambele diagrame sînt simetrice, sau ambele antisimetrice, integrarea se poate face numai pentru *jumătate* de structură, multiplicînd rezultatele cu doi. Dacă una dintre diagrame este simetrică și cealaltă antisimetrică, *integrala se anulează*, deoarece efectuarea pe cele două jumătăți de structură conduce la rezultate egale și de semn contrar.

Reținînd de exemplu numai efectul momentelor încovoietoare, expresia unei deplasări elastice oarecare este

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi}\, ds/EI.$$

Dacă sarcinile date și deplasarea căutată sînt astfel încît una dintre diagramele M_x sau m_{xi} este simetrică, iar cealaltă antisimetrică, *deplasarea* Δ_i *este nulă*. Un astfel de exemplu se vede în figura 118, *a*, unde se caută mărimea rotirii relative din articulația *3*, cînd asupra cadrului acționează o sarcină orizontală P aplicată în nodul *2*. Diagrama M_x (fig. 118, *b*) este antisimetrică, în timp ce diagrama m_{x3} (fig. 118, *c*) — dată de perechea de momente-unitate aplicată în articulație — este simetrică; rezultă $\theta_3 = 0$.

Cînd cele două diagrame sînt oarecare, se poate descompune atît situația reală de încărcare, cît și situația auxiliară (sarcina-unitate corespunzătoare deplasării), în încărcări simetrice și antisimetrice, trasînd diagramele de momente încovoietoare respective. Astfel

$$M_x = M_x^s + M_x^a \quad \text{și} \quad m_{xi} = m_{xi}^s + m_{xi}^a,$$

și deci expresia deplasării devine

$$\Delta_i = \int (M_x^s + M_x^a)(m_{xi}^s + m_{xi}^a)\frac{ds}{EI} = \int M_x^s m_{xi}^s \frac{ds}{EI} + \int M_x^a m_{xi}^a \frac{ds}{EI} = \Delta_i^s + \Delta_i^a. \qquad (8.18)$$

Rezultă că trebuie integrate separat componentele simetrice și cele antisimetrice, celelalte două integrale fiind nule. Cînd una dintre diagrame este simetrică sau antisimetrică, iar cealaltă oarecare, din aceasta din urmă se va reține numai componenta de același fel cu prima diagramă, cealaltă componentă ne mai intervenind în calcul.

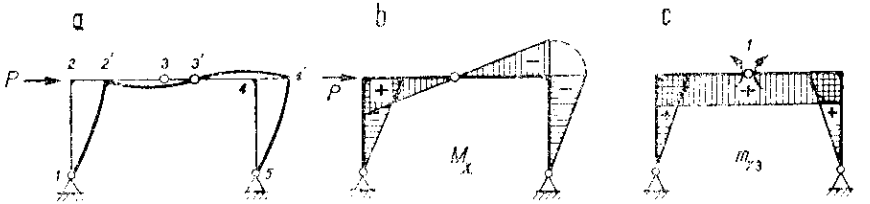


Fig. 118

Pe această cale se pot obține simplificări substanțiale la calculul deplasărilor elastice, utilizînd diagrame mai simple și reducînd efectuarea integrării la jumătate de structură.

4. Deplasări datorite variațiilor de temperatură și cedărilor de reazeme

a. **Efectul variațiilor de temperatură.** În acest caz nu mai apare o deformare elastică, ci forma barelor se modifică datorită variației de temperatură ce intervine în cursul exploatării construcției, față de temperatura la care s-a efectuat punerea în operă a elementelor structurii. Urmează să particularizăm la aceste condiții expresia (8.13).

La structuri *static determinate*, variațiile de temperatură produc numai o modificare în configurația geometrică a sistemului, *fără dezvoltare de eforturi*, cum s-a arătat în legătură cu figura 11, a. Această configurație modificată se consideră ca deplasare virtuală la aplicarea relației generale (8.7), din care provine expresia (8.13). Pentru particularizare, este necesar să se introducă expresiile deplasărilor relative $d\theta$ și $d\delta_t$, care caracterizează efectul temperaturii asupra elementului ds de bară. Particularizarea făcută în acest mod *restrînge domeniul de aplicare al expresiei la structuri static determinate*.

În figura 119 este arătat un element ds de bară; se consideră o creștere de temperatură de t_1° la partea inferioară și de t_2° la partea superioară ($t_1^\circ < t_2^\circ$). Pe grosimea barei se admite o lege liniară pentru variația de temperatură, astfel că secțiunile rămîn plane. Considerînd fața A_1B_1 fixă, deplasarea relativă poate fi reprezentată prin trecerea feței A_2B_2 în poziția $A_2'B_2'$; lungirea fibrei superioare este $B_2B_2' = \alpha t_2^0 ds$, iar a fibrei inferioare $A_2A_2' = \alpha t_1^0 ds$.

Deplasarea relativă a feței A_2B_2 poate fi descompusă într-o translație de mărime $d\delta_t$, care reprezintă lungirea elementului ds în axa barei, și o rotire $d\theta$;

acestea sînt deplasările relative care intervin în expresia (8.13). Cu elementele din figură se obține

$$\mathrm{d}\delta_t = \overline{A_2A_2'} + \overline{B_2''B_2'} \cdot y_1/d = \alpha t_1^\circ \mathrm{d}s + \alpha(t_2^\circ - t_1^\circ)\mathrm{d}s\, y_1/d, \text{ deci}$$

$$\mathrm{d}\delta_t = \alpha \mathrm{d}s\,(y_2 t_1^\circ + y_1 t_2^\circ)/d \text{ și } \mathrm{d}\theta = \alpha \mathrm{d}s\,(t_2^\circ - t_1^\circ)/d,$$

unde introducînd notațiile

$$t^\circ = (y_2 t_1^\circ + y_1 t_2^\circ)/d \text{ și } \Delta t^\circ = t_2^\circ - t_1^\circ,$$

se obține pentru cele două deplasări relative

$$\mathrm{d}\delta_t = \alpha t^\circ \mathrm{d}s \text{ și } \mathrm{d}\theta = \alpha \Delta t^\circ \mathrm{d}s/d, \tag{8.19}$$

în care t° reprezintă creșterea temperaturii în axa barei. Cînd axa este situată la mijlocul grosimii d, rezultă $t^\circ = (t_1^\circ + t_2^\circ)/2$, care este media temperaturilor de la cele două fețe. Existența unei diferențe de temperatură între fețe, și deci a unei rotiri relative $\mathrm{d}\theta$, indică o curbare a barei spre partea unde temperatura este mai ridicată; cînd $\Delta t^\circ = 0$, bara suferă numai o lungire.

Introducînd deplasările relative (8.19) în expresia generală (8.13), se obține

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha \Delta t^\circ}{d} \int m_{xi}\,\mathrm{d}s + \sum \alpha t^\circ \int n_{xi}\,\mathrm{d}s, \tag{8.20}$$

unde integrările se referă la porțiuni de structură pentru care regimul de temperatură, coeficientul de dilatație și grosimea barelor sînt aceleași. Din expresia (8.20) rezultă că, pentru calculul deplasărilor date de variații de tempe-

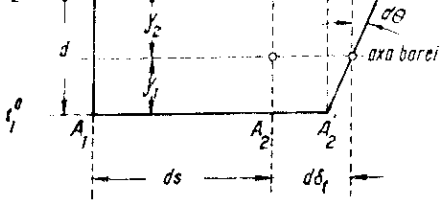


Fig. 119

ratură, este necesar să se considere structura încărcată cu sarcina-unitate corespunzătoare deplasării căutate și să se traseze diagramele de eforturi m_{xi} și n_{xi}. Integralele din expresie reprezintă chiar ariile acestor diagrame pe porțiunile respective; se poate deci utiliza și forma

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha \Delta t^\circ}{d} \Omega_{mi} + \sum \alpha t^\circ \Omega_{ni}. \tag{8.21}$$

Privitor la semnele integralelor, se va aplica norma generală stabilită pentru expresia (8.13), și anume: integralele sînt pozitive (pe o anumită porțiune) cînd deplasările relative $\mathrm{d}\theta$ și respectiv $\mathrm{d}\delta_t$ date de temperatură concordă ca sens cu deformările elementului $\mathrm{d}s$ produse de eforturile m_{xi} și n_{xi} din situația auxiliară de încărcare.

Formulele stabilite se pot aplica și în cazul barelor curbe care apar în alcătuirea structurilor, cînd la aceste bare razele de curbură sînt suficient de mari încît efectul curburii să fie neglijabil.

b. **Cedări de reazeme.** La structuri *static determinate*, cedările de reazeme produc numai o modificare de configurație geometrică a sistemului, fără modificarea formei barelor (v. fig. 11, *b*). Este o situație similară cu aceea întîlnită anterior la studiul poziților deplasate cu caracter cinematic, în care barele se considerau corpuri rigide. În consecință, expresia (8.14) se reduce la ultimul termen, și deci expresia deplasărilor produse de cedări de reazeme este

$$\Delta_{ic} = -\sum \bar{r}_i \Delta_r. \tag{8.22}$$

unde $\bar{r}_i$ sînt reacțiunile date de încărcarea cu sarcina-unitate corespunzătoare deplasării căutate, pe direcțiile cedărilor Δ_r care se produc în reazeme. Particularizarea făcută în acest mod *restrînge domeniul de aplicare al expresiei la structuri static determinate*.

Pentru aplicarea relației (8.22) este suficient să se determine reacțiunile din situația auxiliară de încărcare. Stabilirea semnelor produselor $\bar{r}_i \Delta_r$ se face ținînd seama de sensurile efective pe care le au reacțiunile $\bar{r}_i$ și cedările Δ_r în problema considerată.

Sînt utile unele precizări privind domeniul de aplicare al expresiilor (8.21) și (8.22), în raport cu acela al expresiei Maxwell-Mohr din cazul încărcării cu sarcini. Toate acestea derivă din expresia generală (8.14), care se aplică pentru orice fel de cauză, atît timp cît este posibil să se evalueze deplasările relative $d\theta$, $d\delta_l$, ... pentru cauza considerată. În cazurile concrete, aceste deplasări relative pot proveni fie de la cîte o singură cauză, cum s-a admis mai sus la stabilirea expresiilor particularizate, fie de la cauze diferite acționînd concomitent. Din acest punct de vedere trebuie arătate următoarele:

(1) Pentru încărcare cu sarcini, deplasările relative apar numai datorită deformării elastice a elementelor ds și în consecință este suficientă aplicarea expresiei (8.15), indiferent dacă structura este static determinată sau static nedeterminată.

(2) Pentru încărcare cu variații de temperatură sau cu cedări de reazeme, în structurile static determinate nu se produc eforturi, și deci nu intervine deformarea elastică a barelor, ci are loc numai o schimbare de configurație geometrică a sistemului. În acest caz, deplasările pot fi calculate folosind expresiile (8.21) sau (8.22). La structuri static nedeterminate, surplusul de legături face ca modificarea de configurație să nu se mai poată realiza liber; ea este însoțită de dezvoltare de eforturi, care produce și o deformare elastică a barelor. Înseamnă că pentru calculul unei deplasări este necesar să se considere *ambele efecte*, și deci să se țină seama că deplasarea se compune din *două* părți.

Asupra acestei probleme se revine în capitolul IX.

Pentru exemplificarea calculului deplasărilor produse de variații de temperatură, se determină variația de distanță Δl_{24} dintre nodurile *2* și *4* ale cadrului triplu articulat simetric din figura 120, *a* cînd la exterior se produce o *scădere* de temperatură de 10°C, iar la interior o *creștere* de 20°C.

Situația auxiliară de încărcare, care corespunde deplasării generalizate Δl_{24}, precum și diagramele respective m_{xg} și n_{xg} sînt arătate în figurile 120, *b-c*; perechea de forțe-unitate acționînd simetric, ambele diagrame sînt simetrice. Variația de temperatură dată are de asemenea caracter simetric și este definită prin două elemente: o variație de temperatură în axă de $t^0=+5^0$C (s-a admis că axele barelor se găsesc la jumătatea grosimii acestora) și o diferență de temperatură între fețe $\Delta t^0=30^0$C, care produce curbarea barelor spre interior.

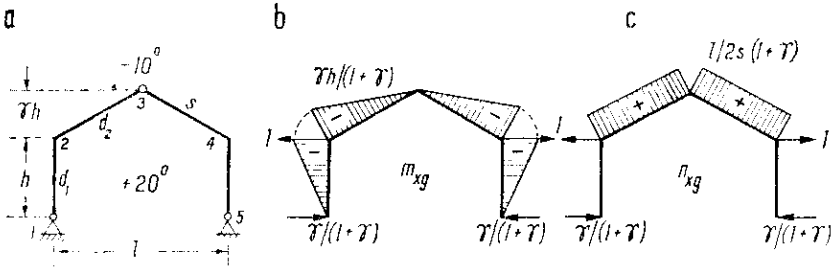


Fig. 120

Aplicînd relația generală (8.21) și ținînd seama de modul de stabilire a semnelor, se obține

$$\Delta l_{24}=\sum \frac{\alpha\Delta t^0}{d}\Omega_{m_i}+\sum\alpha t^0\Omega_{n_i}=-2\alpha\Delta t^0\,\frac{\gamma h}{2(1+\gamma)}\left[\frac{h}{d_1}+\frac{s}{d_2}\right]+2\alpha t^0 sl/2s(1+\gamma)=$$

$$=-\frac{\alpha}{1+\gamma}\left[\Delta t^0\gamma h\left(\frac{h}{d_1}+\frac{s}{d_2}\right)-t^0 l\right].$$

Pentru cazul numeric $l=12$ m, $h=5$ m (deci $s=6{,}5$ m) și $\gamma=0.5$, admițîndu-se un cadru de beton armat ($\alpha=10^{-5}$) la care secțiunea stîlpilor este 30/50 cm, iar secțiunea rigelor 30/60 cm, mărimea deplasării date de variația de temperatură este

$$\Delta l_{24}=-\frac{10^{-5}}{1{,}5}\left[30^0\cdot 2{,}5\left(\frac{5}{0{,}5}+\frac{6{,}5}{0{,}6}\right)-5^0\cdot 12\right]=-974\cdot 10^{-5}\text{m}=-0{,}97\text{ cm}.$$

Deoarece sensul sarcinii-unitate admis în situația auxiliară de încărcare definește ca pozitivă o creștere a distanței l_{24}, rezultatul obținut arată că datorită variației de temperatură considerate nodurile *2* și *4* se apropie.

5. Calculul deplasărilor la grinzi cu zăbrele

În ipoteza articulațiilor perfecte la noduri și admițînd că sarcinile sînt aplicate numai în aceste puncte, în bare se dezvoltă eforturi axiale. Înseamnă că, pentru calculul deplasărilor elastice, din expresia generală (8.15) se va reține numai cea de-a doua integrală, și deci

$$\Delta_i=\int N_x n_{xi}\,\mathrm{d}s/EA=\sum N_j n_{ji} l_j/EA_j=\sum N_j n_{ji}\varrho_j, \tag{8.23}$$

unde s-a ținut seama că forța axială este constantă în lungul fiecărei bare, de asemenea și cantitatea EA, astfel că integrala se referă numai la ds. În expresia (8.23) indicele j se referă la bara curentă, iar notația

$$\varrho_j=l_j/EA_j \tag{8.24}$$

reprezintă *caracteristica de deformabilitate* a barei, anume lungirea sub acțiunea unui efort egal cu unitatea.

Expresia stabilită pentru Δ_i arată că determinarea unei deplasări elastice oarecare necesită calcularea eforturilor din barele grinzii cu zăbrele, atît pentru situația de încărcare cu sarcinile date (N_j), cît și pentru situația auxiliară obținută aplicînd sarcina-unitate corespunzătoare deplasării căutate (n_{ji}). Calculul eforturilor se face utilizînd metodele cunoscute, de exemplu epura Cremona. Pentru aplicarea expresiei se întocmește un tablou, în care se înscriu datele referitoare la fiecare bară și apoi se efectuează produsele $N_j n_{ji} \varrho_j$; mărimea deplasării rezultă din însumarea algebrică a coloanei în care sînt înscrise aceste produse.

Privitor la sarcinile-unitate ce corespund diferitelor deplasări, trebuie ținut seama de specificul grinzilor cu zăbrele, care nu pot fi încărcate decît cu sarcini concentrate aplicate în noduri. Cîteva exemplificări sînt date privitor la grinda cu zăbrele din figura 121, *a*. Astfel, pentru deplasarea pe verticală a nodului *3*, sau deplasarea pe orizontală a nodului *6*, corespund situațiile auxiliare din figurile 121, *b* și *c*. Pentru variația de distanță dintre două noduri, de exemplu dintre nodurile *2* și *5*, sarcina-unitate corespunzătoare se vede în figura 121, *d*. Cînd trebuie calculată *rotirea* unei bare față de poziția sa inițială, în situația auxiliară se aplică un cuplu-unitate, și anume ca în figura 121, *e*, prin forțe concentrate de mărime $1/l_{24}$ acționînd în nodurile de la extremitățile barei, normal pe axa acesteia. Pentru *rotirea relativă* dintre două bare, de exemplu barele *4-6* și *6-7*, sarcina-unitate este reprezentată de o pere-

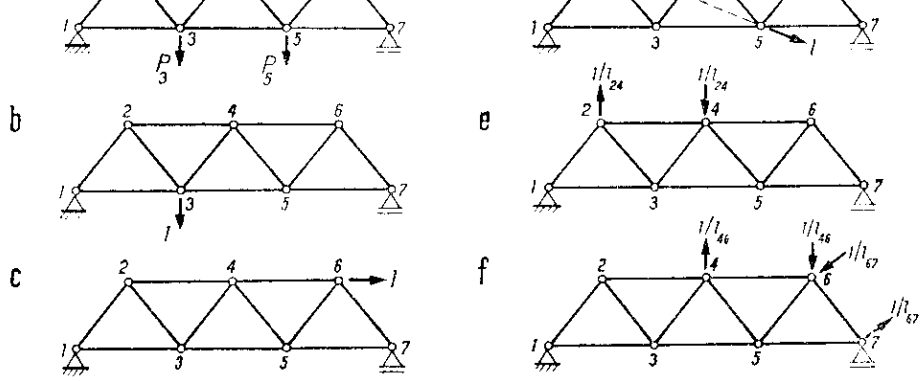


Fig. 121

che de cupluri, egale cu unitatea și avînd sensuri contrare, cum se vede în figura 121, *f*. Cele patru forțe astfel aplicate reprezintă o forță generalizată.

Expresia (8.23) se referă la deplasările elastice, produse de acțiunea unor sarcini aplicate pe structură. Se pot calcula și deplasări *care nu au caracter elastic*, cum sînt cele datorite variațiilor de temperatură sau altor cauze, care conduc la variația de lungime a uneia sau a mai multor bare. Pentru aceasta

se face uz de expresia generală (8.13), stabilită cu ajutorul deplasărilor virtuale și care este cu totul generală. Aplicată la grinzi cu zăbrele, expresia devine

$$\Delta_i = \int n_{xi}\, \mathrm{d}\delta_t = \sum n_{ji}\Delta l_j, \tag{8.25}$$

unde Δl_j este variația de lungime a barei curente j, datorită cauzei reale, iar n_{ji} este efortul din această bară pentru situația auxiliară de încărcare cu sarcina-unitate. Însumarea se referă la acele bare la care în situația reală se produce o variație de lungime. Semnele produselor din expresia (8.25) rezultă comparînd sensul de deformare dat de n_{ji} (lungire sau scurtare) cu acel al cantității Δl_j; cînd cele două sensuri concordă produsul este pozitiv, și deci variația de lungime a barei respective contribuie la producerea în sens pozitiv a deplasării Δ_i.

Pentru o grindă cu zăbrele supusă la o variație de temperatură de t°, rezultă $\Delta l_j = \alpha t^\circ l_j$, și deci expresia deplasării capătă forma

$$\Delta_i = \alpha t^\circ \sum n_{ji} l_j. \tag{8.26}$$

unde produsele care se însumează algebric reprezintă ariile diagramei de forțe axiale date în bare de situația auxiliară de încărcare. În afară de cazul variației de temperatură, expresia (8.25) poate fi folosită și pentru determinarea modificărilor în configurația grinzii cu zăbrele, care rezultă la montaj din inexactități de execuție privind lungimea barelor, din corectarea distanței dintre noduri cu ajutorul manșoanelor de reglaj etc.

D. SISTEMATIZĂRI ÎN CALCULUL DEPLASĂRILOR ELASTICE[1]

1. Efectuarea directă a integralelor

Pentru calculul deplasărilor elastice produse de acțiunea sarcinilor se utilizează expresia Maxwell-Mohr, stabilită anterior sub forma (8.15). Cînd intervine numai o singură sarcină de mărime egală cu unitatea, se ajunge la cazul particular al deplasărilor unitare, care se calculează folosind relațiile (8.16) și (8.17). Efectuarea integralelor din aceste expresii este o operație curentă, dar care în anumite cazuri (structuri sau încărcări mai complicate) poate deveni laborioasă. Este deci firesc să se dea atenție posibilităților de simplificare și sistematizare. Aceasta prezintă interes în special la structurile solicitate dominant la încovoiere (grinzi, cadre), unde în expresii se reține numai integrala ce introduce efectul momentelor încovoietoare.

Efectuarea integralelor $\int M_x m_{xi} \mathrm{d}s/EI$ poate fi făcută *sub formă generală*, evitînd astfel repetarea operației la fiecare caz particular în parte, dacă intervalul de integrare considerat se referă *la o bară dreaptă cu modulul de rigi-*

[1] Acest subcapitol se referă în întregime la structuri alcătuite din bare drepte cu secțiune constantă; cazul barelor cu secțiune variabilă este tratat în capitolul IX.

ditate EI constant. Aceasta este posibil datorită situației particulare a uneia dintre cele două diagrame care intervin. Într-adevăr, diagrama M_x poate avea orice formă, deoarece corespunde sarcinilor date, care pot fi oarecare. În schimb, diagrama m_{xi} provine de la aplicarea unei singure sarcini-unitate în situația auxiliară de încărcare; în consecință, *ea este totdeauna alcătuită din variații liniare*, oricare ar fi sarcina-unitate (forță generalizată). Rezultă că integrarea se poate împărți în intervale, astfel ca — pe un interval — una din diagrame să aibă orice formă, dar cealaltă să fie mărginită de *o singură variație liniară* (fig. 122, *a*).

În aceste condiții, cantitatea $M_x \mathrm{d}x$ reprezintă aria elementară din prima diagramă, iar ordonata curentă a celei de-a doua diagrame se poate scrie sub forma $m_{xi} = (x' + c) \operatorname{tg} \alpha$, cu notațiile din figură. Integrarea pe intervalul $A - B$ conduce la

$$\int_A^B M_x m_{xi} \mathrm{d}x / EI = \frac{1}{EI} \int_A^B M_x m_{xi} \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{EI} \int_A^B \mathrm{d}\Omega \, (x' + c) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{EI} \Omega_{AB} (x'_g + c) = \Omega_{AB} m_g / EI, \tag{8.27}$$

unde s-a notat cu Ω_{AB} aria primei diagrame, iar cu m_g ordonata diagramei m_{xi} în dreptul centrului de greutate G al diagramei M_x; ambele diagrame

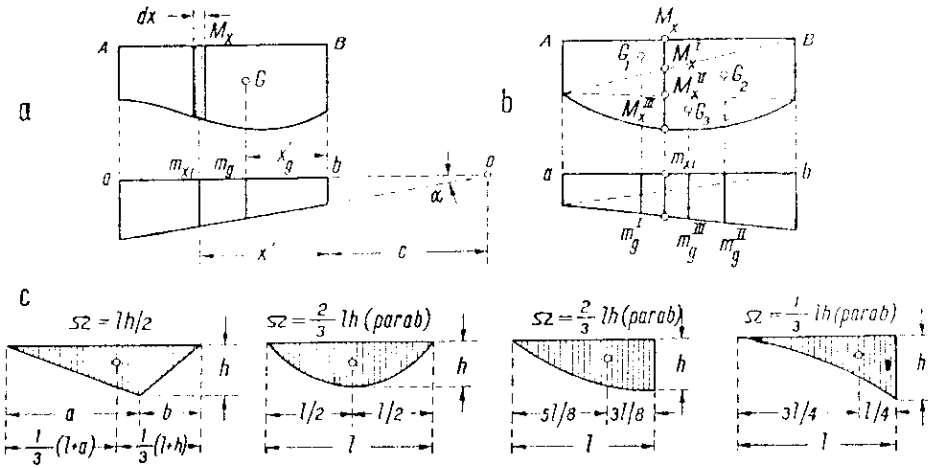


Fig. 122

se referă la intervalul $A - B$. Înseamnă că rezultatul integrării pe acest interval se obține sub forma *produsului dintre aria diagramei de formă oarecare (M_x) și ordonata corespunzătoare centrului de greutate al acesteia — din cea de-a doua diagramă (m_{xi}), împărțit cu modulul de rigiditate din interval* (regula lui Vereșceaghin).

Acest procedeu dă substanțiale simplificări la efectuarea integrărilor pentru structuri cu bare drepte de secțiune constantă. Problema se reduce în fond la găsirea ariei și a centrului de greutate pentru diagrama M_x pe intervalul A-B. Și aici calculul se poate sistematiza, cum se vede în figura 122, *b*, prin împărțirea diagramei M_x în părți componente: două triunghiuri cu ordonatele M_a și respectiv M_b, precum și partea inferioară, care reprezintă diagrama dată de sarcini pe porțiunea de bară A-B, considerată simplu rezemată. Ordonata M_x din secțiunea curentă poate fi deci scrisă sub forma $M_x = M_x^I + M_x^{II} + M_x^{III}$, și deci integrala devine

$$\int_A^B M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int_A^B M_x^I m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int_A^B M_x^{II} m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int_A^B M_x^{III} m_{xi} \frac{ds}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\Omega_1 m_g^I + \Omega_2 m_g^{II} + \Omega_3 m_g^{III}\right]. \tag{8.28}$$

Expresia arată că fiecare porțiune a diagramei superioare trebuie integrată separat cu diagrama inferioară, însumînd apoi algebric rezultatele. Se poate de asemenea împărți și diagrama inferioară în două porțiuni (punctat pe figură); în acest caz, fiecare porțiune a acestei diagrame se integrează separat cu toate porțiunile diagramei superioare. Efectuarea integrării este astfel împărțită într-o serie de operații simple. Pentru porțiunea de diagramă dată de sarcini pe bara simplu rezemată A-B, în figura 122, *c* sînt indicate ariile și pozițiile centrelor de greutate în cîteva cazuri uzuale ce apar mai frecvent în aplicații.

Pentru exemplificare, se determină deplasarea pe orizontală din extremitatea 3 a barei cotite din figura 123, *a*, avînd dimensiunile și sarcinile indicate. Considerînd separat sarcinile ph și P, s-au trasat diagramele corespunzătoare de momente încovoietoare în figurile 123, *b* și *d*. Situația auxiliară de încărcare pentru deplasarea u_3 și diagrama m_{x3} se văd în figura 123, *c*; sensul admis pozitiv pentru deplasare este spre dreapta. Se efectuează integrarea cu ajutorul regulii stabilite, împărțind în două porțiuni partea de pe stîlp a diagramei M_x' dată de sarcina ph; se introduce și notația $k = sI_1/hI_2$, care caracterizează raportul de rigiditate al celor două bare. Se obține:

— încărcare cu sarcina ph

$$u_3 = \int M_x' m_{x3} \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI_1}\left(\frac{ph^2}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2h}{3} + \frac{2}{3} h \cdot \frac{ph^2}{8} \cdot \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{ph^2}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{2h}{3} =$$

$$= \frac{5\, ph^4}{24\, EI_1} + \frac{ph^3 s}{6\, EI_2} = \frac{ph^4}{24\, EI_1}(5 + 4k);$$

— încărcare cu sarcina P

$$u_3 = \int M_x'' m_{x3} \frac{ds}{EI} = -\frac{1}{EI_1} \cdot Ph \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2h}{3} - \frac{1}{EI_2} \cdot Ph \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{2h}{3} =$$

$$= -\frac{Ph^3}{3\, EI_1} - \frac{Ph^3 s}{3\, EI_2} = -\frac{Ph^3}{3\, EI_1}(1 + k).$$

Pentru acțiunea concomitentă a sarcinilor ph și P, mărimea deplasării este

$$u_3 = \frac{ph^4}{24EI_1}(5+4k) - \frac{Ph^3}{3EI_1}(1+k) = \frac{h^3}{24EI_1}[ph\ (5+4k) - 8\ P\ (1+k)].$$

Expresia obținută arată că raportul de rigiditate al barelor, caracterizat prin valoarea lui k, influențează asupra mărimii deplasării.

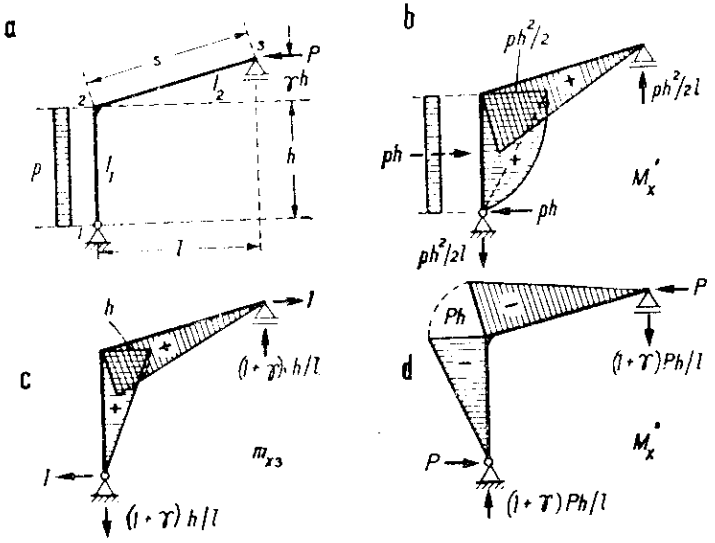


Fig. 123

Observație. Din expresia deplasării u_3 se vede că există un raport al sarcinilor pentru care $u_3=0$. Astfel, dacă $P=ph\cdot(5+4\ k)\ /\ 8\ (1+k)$, deplasarea din punctul *3* se anulează, și deci deformata barei cotite este la fel ca în cazul cînd *rezemarea din 3 ar fi o articulație*. Înseamnă că valoarea găsită pentru P corespunde reacțiunii orizontale din această articulație; condiția de anulare a deplasării u_3 conduce astfel la *rezolvarea unui sistem o dată static nedeterminat*. Diagrama de momente încovoietoare a grinzii cotite dublu articulate rezultă prin suprapunerea $M_x=M'_x+M''_x$, unde la a doua diagramă se va lua pentru P valoarea indicată mai sus; de exemplu, momentul încovoietor din secțiunea *2* este

$$M_2 = ph^2/2 - Ph = ph^2/2 - ph^2(5+4\ k)/8(1+k) = -\ ph^2/8(1+k).$$

Se constată că diagrama de momente încovoietoare a sistemului static nedeterminat este influențată de mărimea raportului k.

2. Lungimi transformate, caracteristici de încărcare

Sistematizarea calculului deplasărilor elastice, la structuri alcătuite din bare drepte cu secțiune constantă, se poate duce mai departe introducînd anumite elemente convenționale pentru definirea comportării elastice a barei, cît și a sarcinilor ce o acționează.

Fie o porțiune de bară j-k, încărcată cu o sarcină oarecare $p=f(x)$; relația (8.27) arată că prin integrare rezultă

$$\int_j^k M_x m_{xi}\, ds/EI = \Omega_{jk} m_g/EI.$$

În forma sa generală, diagrama M_x este ca în figura 124 și poate fi împărțită în suprafețe simple, cum se indică prin linii punctate: două suprafețe triunghiulare și porțiunea rămasă sub linia j'-k' (M_x^0), care corespunde barei j-k considerată simplu rezemată și încărcată cu sarcina ce îi revine.

Înseamnă că, oricare ar fi diagramele M_x și m_{xi} pe intervalul j-k, acestea pot fi alcătuite din suprafețele simple arătate în figura 125: cazul a se referă

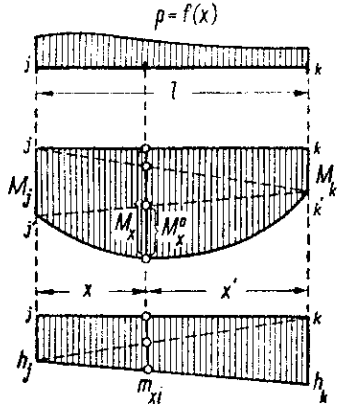


Fig. 124

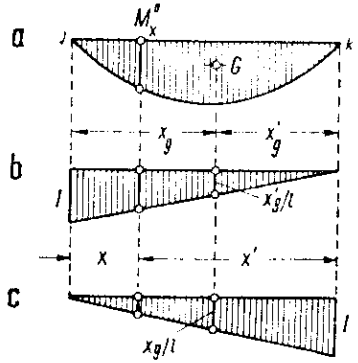


Fig. 125

la bara simplu rezemată j-k încărcată cu sarcina dată, iar cazurile b și c se referă la efectul continuității din secțiunile j și k, unde ordonata-unitate urmează a fi multiplicată cu momentul încovoietor respectiv. Este deci suficient să se efectueze integrările considerînd „produsele" acestor suprafețe, luate două cîte două.

Pentru sistematizarea rezultatelor se admite că deplasarea este multiplicată cu constanta $6\,EI_c$, unde I_c este un moment de inerție arbitrar ales. Aplicînd regula de integrare, se obține:

(1) Integrarea produsului diagramelor a cu b

$$6\,EI_c \cdot \frac{1}{EI_{jk}} \cdot \Omega_{jk} \frac{x'_g}{l} = l \frac{I_c}{I_{jk}} \cdot \frac{6\,S_{kj}}{l^2} = \lambda_{jk} m_j, \tag{8.29}$$

unde cu Ω_{jk} s-a notat aria diagramei M_x^0 și cu S_{kj} — momentul static al acestei diagrame în raport cu extremitatea k.

(2) Integrarea produsului diagramelor a cu c

$$6\,EI_c \cdot \frac{1}{EI_{jk}} \cdot \Omega_{jk} \frac{x_g}{l} = l \frac{I_c}{I_{jk}} \cdot \frac{6\,S_{jk}}{l^2} = \lambda_{jk} m_k, \tag{8.30}$$

unde cu S_{jk} s-a notat momentul static al diagramei M_x^0 în raport cu extremitatea j.

(3) Integrarea produsului diagramelor b cu b, sau c cu c (două diagrame triunghiulare orientate *în același sens*)

$$6EI_c \cdot \frac{1}{EI_{jk}} \cdot \frac{l}{3} = 2\,l\frac{I_c}{I_{jk}} = 2\,\lambda_{jk}. \tag{8.31}$$

(4) Integrarea produsului diagramelor b cu c (două diagrame triunghiulare orientate *în sensuri contrare*)

$$6EI_c \cdot \frac{1}{EI_{jk}} \cdot \frac{l}{6} = l\frac{I_c}{I_{jk}} = \lambda_{jk}. \tag{8.32}$$

Folosind ultimele două cazuri, se găsește că pentru o diagramă triunghiulară și una dreptunghiulară rezultatul integrării este $\lambda_{jk}+2\,\lambda_{jk}=3\,\lambda_{jk}$, iar pentru două diagrame dreptunghiulare $2\cdot 3\,\lambda_{jk}=6\,\lambda_{jk}$.

În expresiile (8.29)—(8.32) s-a folosit notația

$$\lambda_{jk}=l_{jk}\cdot I_c/I_{jk}, \tag{8.33}$$

care reprezintă lungimea transformată (redusă) a barei j-k; aceasta este cu atît mai mare cu cît *flexibilitatea* barei la încovoiere este mai mare (lungime mai mare, respectiv moment de inerție mai redus). Prin raportare la același moment de inerție convențional, *barele unei structuri apar comparabile între ele prin lungimile lor transformate*.

S-au folosit de asemenea notațiile

$$m_j=6\,S_{kj}/l^2 \quad \text{și} \quad m_k=6\,S_{jk}/l^2, \tag{8.34}$$

care definesc mărimile numite *caracteristici* (*termeni*) *de încărcare*. Acestea corespund celor două extremități ale barei: m_j pentru extremitatea j se obține din momentul static S_{kj} luat față de extremitatea k și reciproc. Caracteristicile de încărcare *au dimensiune de moment* și se notează cu un singur indice, spre a se deosebi de coeficienții de influență. Cantitățile m_j și m_k caracterizează complet sarcinile aplicate pe bara j-k și reprezintă forma sistematizată sub care aceste sarcini se pot introduce în calcul, în mod neparticularizat, permițînd stabilirea de formule cu caracter general. În memoratoare se găsesc expresiile caracteristicilor de încărcare pentru diferite sarcini; unele cazuri uzuale sînt date în tabela 3.

Utilizarea expresiilor (8.29)—(8.32), care pot fi ușor reținute, permite să se citească direct pe diagrame rezultatul integrării. Se va ține seama de semnele suprafețelor componente, de asemenea de ordonatele reale ale diagramelor triunghiulare, cu care trebuie multiplicate rezultatele. Astfel, pentru diagramele din figura 124, considerate pozitive, se obține

$$6EI_c\int_j^k M_x m_{x\delta}\,ds/EI=\lambda_{jk}[h_j m_j+h_k m_k+(2\,h_j+h_k)M_j+(h_j+2\,h_k)M_k],$$

oricare ar fi sarcinile aplicate pe bară, caracterizate prin cantitățile m_j și m_k.

Expresiile (8.34) stabilite pentru caracteristicile de încărcare au la bază situația din figura 124, unde sarcinile sînt aplicate *normal* pe axa barei. Se întîlnesc și cazuri de bare înclinate față de direcția sarcinilor, ca în figura 126, *a*.

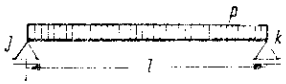
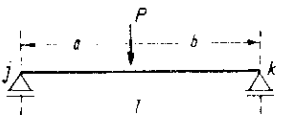
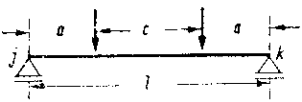
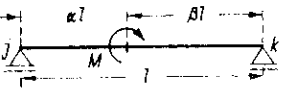
Pentru comparație, se consideră în paralel și cazul din figura 126, *b*, unde bara $j'-k'$ este egală cu proiecția barei date pe direcția normală la sarcini.

Este cunoscut că diagramele de momente încovoietoare — considerînd barele simplu rezemate și încărcate cu aceleași sarcini — au ordonate egale în secțiunile corespunzătoare. Ceea ce diferă este lungimea diagramelor, astfel încît

$$l=l_{jk}\cos\alpha, \quad x=s\cos\alpha \quad dx=ds\cos\alpha.$$

Tabela 3

Caracteristici de încărcare

	Încărcarea	Caracteristici
1		$m_j=m_k=\frac{pl^2}{4}$
2		$m_j=2\,pcb(l^2-b^2-c^2)\,/\,l^2$ $m_k=2\,pca\,(l^2-a^2-c^2)\,/\,l^2$
3		$m_j=\frac{Pab}{l^2}(l+b),\ m_k=\frac{Pab}{l^2}(l+a)$ pentru $a=b,\ m_j=m_k=\frac{3Pl}{8}$
4		$m_j=m_k=\frac{3Pa}{l}(l-a)$ pentru $a=c,\ m_j=m_k=\frac{2Pl}{3}$
5		$m_j=\frac{2\,pl^2}{15},\ m_k=\frac{7\,pl^2}{60}$
6		$m_j=(3\,\beta^2-1)\,M$ $m_k=(3\,\alpha^2-1)\,M$

Aceasta face ca ariile diagramelor și momentele lor statice față de extremități să difere în cele două cazuri. Notînd cu indicele „o" elementele ce se referă la cazul din figura 126, *b*, se obține

$$\Omega_{jk}=\int M_x^0\,ds=\int M_x^0\,dx/\cos\alpha=\Omega_{jk}^0/\cos\alpha \text{ sau } \Omega_{jk}=\Omega_{jk}^0\cdot l_{jk}/l.$$

$$S_{jk}=\int M_x^0 s\,ds=\int M_x^0\,x\,dx/\cos^2\alpha=S_{jk}^0/\cos^2\alpha \text{ sau } S_{jk}=S_{jk}^0\cdot l_{jk}^2/l^2.$$

Formînd acum caracteristicile de încărcare m_k și m_k^0, se ajunge la

$$m_k = \frac{6\,S_{jk}}{l_{jk}^2} \text{ și } m_k^0 = \frac{6\,S_{jk}^0}{l^2}, \text{ deci } \frac{m_k}{m_k^0} = \frac{S_{jk}}{S_{jk}^0} \cdot \frac{l^2}{l_{jk}^2} = 1,$$

astfel încît *caracteristicile de încărcare sînt egale în cele două situații*. Această concluzie este deosebit de utilă deoarece, la bare înclinate față de direcția sarcinilor, caracteristicile de încărcare se pot calcula folosind proiecția barei, ca în figura 126, *b*. De reținut însă că, la aplicarea expresiilor (8.29) și (8.30), calculul lungimii transformate λ_{jk} trebuie făcut pentru bara reală înclinată, considerînd lungimea l_{jk}.

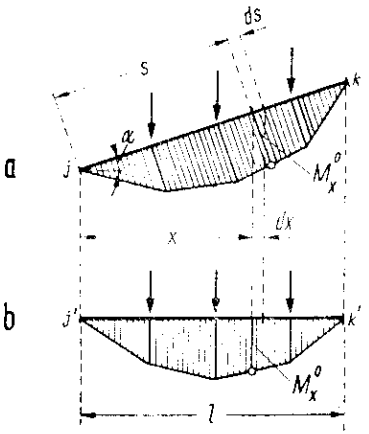


Fig. 126

Pentru exemplificare, se reia calculul deplasării u_3 la bara cotită din figura 123, *a*, utilizînd diagramele M_x', M_x'' și m_{xi} din figura 123, *b-d*. Lungimile transformate ale barelor sînt

$$\lambda_{12} = hI_c/I_1 = h \text{ și } \lambda_{23} = sI_c/I_2 = sI_1/I_2,$$

unde s-a admis $I_c = I_1$; caracteristicile de încărcare ale barei *1-2* au mărimea $m_1 = m_2 = ph^2/4$, cum rezultă din cazul *1* al tabelei 3.

Aplicînd cazurile tip de integrare date de relațiile (8.29)–(8.32), se obține prin citire directă de pe diagrame:

– încărcare cu sarcina ph

$$6\,EI_1 u_3 = \lambda_{12} h m_2 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) h \cdot ph^2/2 = (5+4k)ph^3/4;$$

– încărcare cu sarcina P

$$6\,EI_1 u_3 = -2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) h \cdot Ph = -2(1+k)Ph^2,$$

unde s-a notat $k = \lambda_{23}/\lambda_{12} = sI_1/hI_2$. S-au regăsit astfel aceleași rezultate.

3. Formularea matriceală a calculului deplasărilor elastice

Se consideră că diagramele M_x și m_{xi} au fost construite de proiectant, urmînd să se formuleze matriceal efectuarea operațiilor pentru calculul deplasării, pe baza expresiei Maxwell-Mohr

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi}\,\mathrm{d}s/EI.$$

Pentru aceasta, efectuarea directă a integrării trebuie înlocuită prin operații matriceale cu elemente discrete, care în cazul de față pot fi eforturile din secțiunile de capăt ale barelor.

Fie mai întîi cazul unei singure bare $1-B$ izolată din structură, pentru care se cunosc diagramele M_x și m_{xi}. Cu aceste două situații de încărcare ale barei se poate aplica forma generală (8.7) a condiției de compatibilitate:

— din situația reală (fig. 127, *a*), echivalentă cu o bară simplu rezemată încărcată cu sarcinile aferente și cu momentele de continuitate M_a și M_b, se reține poziția deformată caracterizată prin rotirile θ_a și θ_b ale secțiunilor extreme față de linia ce unește aceste două extremități, precum și prin deformările $d\theta$ ale elementelor ds;

— din situația auxiliară (fig. 127, *b*) se reține echilibrul static caracterizat prin momentele de continuitate m_{ai} și m_{bi}, precum și eforturile m_{xi}.

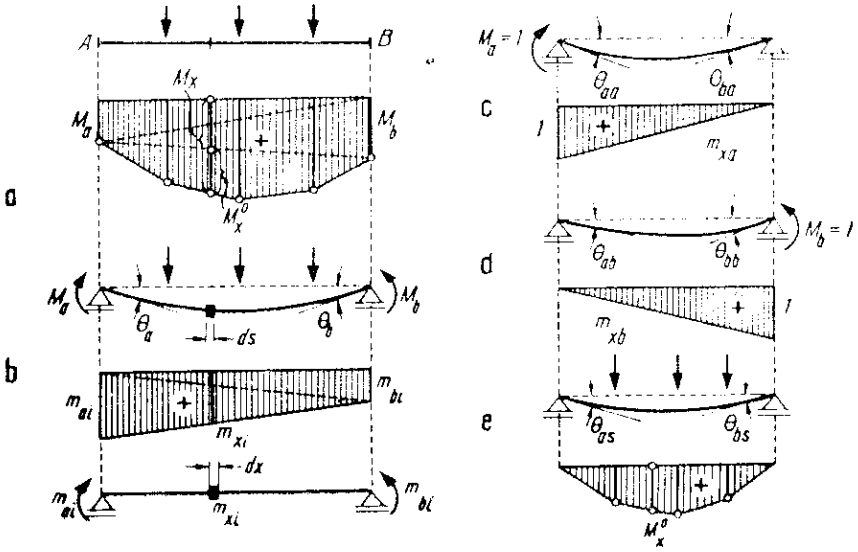


Fig. 127

Exprimînd echilibrul situației auxiliare printr-o deplasare virtuală reprezentată de deformata din situația reală, se obține

$$m_{ai}\theta_a + m_{bi}\theta_b - \int_a^b m_{ix}\,d\theta = 0,$$

iar introducînd $d\theta = M_x dx/EI$ rezultă[1]

$$\int_a^b M_x m_{xi}\,dx/EI = m_{ai}\,\theta_a + m_{bi}\,\theta_b = \mathbf{m}_i^T\boldsymbol{\theta}, \tag{8.35}$$

unde s-au utilizat matricele-coloană cu cîte doi termeni (corespunzînd celor două capete ale barei considerate)

$$\mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_{ai} \\ m_{bi} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}. \tag{8.36}$$

[1] Se reamintește că la exprimarea lucrului mecanic prin produs de două matrice-coloană, prima matrice apare transpusă.

Prima matrice cuprinde ordonatele diagramei m_{xi} din situația auxiliară, iar a doua matrice cuprinde rotirile extremităților barei în situația reală.

Rotirile θ_a și θ_b (fig. 127, *a*) pot fi calculate prin suprapunere de efecte sub forma

$$\theta_a = \theta_{aa} M_a + \theta_{ab} M_b + \theta_{as},$$

$$\theta_b = \theta_{ba} M_a + \theta_{bb} M_b + \theta_{bs},$$

unde s-au folosit rotirile unitare θ_{aa}, $\theta_{ab} = \theta_{ba}$ și θ_{bb} indicate în figura 127, *c* și *d*, cît și rotirile θ_{as} și θ_{bs} date de sarcini pe bara simplu rezemată (fig. 127, *e*). În formă matriceală relațiile se scriu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{aa} & \theta_{ab} \\ \theta_{ba} & \theta_{bb} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{as} \\ \theta_{bs} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_s}, \tag{8.37}$$

unde apare produsul dintre matricea pătrată $\mathbf{f}$ ce conține rotirile unitare și matricea-coloană $\mathbf{M}$ care cuprinde ordonatele diagramei M_x din extremitățile barei.

Calculul rotirilor unitare se face cu ajutorul relațiilor (8. 16) și (8.17), utilizînd diagramele unitare m_{xa} și m_{xb} date de momente-unitate aplicate în extremitățile barei simplu rezemate; pentru rotirile θ_{as} și θ_{bs} intervine și diagrama M_x^0 produsă de sarcinile aferente. Pe baza sistematizărilor date de relațiile (8.29) —(8.32), se obține:

$$6\,EI_c\,\theta_{aa} = 6\,EI_c \int m_{xa}^2 \mathrm{d}x/EI = 2\,\lambda,$$

$$6\,EI_c\,\theta_{bb} = 6\,EI_c \int m_{xb}^2 \mathrm{d}x/EI = 2\,\lambda,$$

$$6\,EI_c\,\theta_{ab} = 6\,EI_c\,\theta_{ba} = 6\,EI_c \int m_{xa}\, m_{xb} \mathrm{d}x/EI = \lambda,$$

$$6\,EI_c\,\theta_{as} = 6\,EI_c \int M_x^0 m_{xa} \mathrm{d}x/EI = \lambda\, m_{st},$$

$$6\,EI_c\,\theta_{bs} = 6\,EI_c \int M_x^0 m_{xb} \mathrm{d}x/EI = \lambda\, m_{dr},$$

unde apare lungimea transformată $\lambda = lI_c/I$ a barei, precum și caracteristicile de încărcare[1] m_{st} și m_{dr}. Cu aceste rezultate se obține

$$6\,EI_c\,\mathbf{f} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad 6\,EI_c\,\boldsymbol{\theta}_s = \lambda \begin{bmatrix} m_{st} \\ m_{dr} \end{bmatrix}. \tag{8.38}$$

Matricea $\mathbf{f}$, care depinde direct de lungimea transformată λ, poartă numele de *matrice de flexibilitate a barei*.

[1] S-au notat astfel pentru a nu se confunda cu ordonatele m_a și m_b din diagrama m_{xi}.

În concluzie, matricea $\boldsymbol{\theta}$ se poate obține sub forma

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{fM} + \boldsymbol{\theta}_s,$$

iar rezultatul integrării din relația (8.35) devine

$$6EI_c \int_a^b M_x m_{xi}\, dx/EI = \mathbf{m}_i^T \boldsymbol{\theta} = \mathbf{m}_i^T (\mathbf{fM} + \boldsymbol{\theta}_s), \tag{8.39}$$

unde intervin matricele cunoscute $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{f}$ și $\boldsymbol{\theta}_s$.

Rămîne să se treacă de la o singură bară la întreaga structură, sumînd rezultatele corespunzătoare fiecărei bare. Relația de forma (8.39) se păstrează, dar trebuie formate matrice globale care au ca elemente matricele corespunzătoare succesiunii de bare (numerotate 1, ...h, ...b). Aceste matrice sînt

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_h \\ \vdots \\ \mathbf{M}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{1i} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{hi} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{bi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{f}_h & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{f}_b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{1s} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{hs} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{bs} \end{bmatrix}, \tag{8.40}$$

unde fiecare element este la rîndul său o matrice cu două linii. Astfel, pentru bara curentă h trebuie introdus

$$\mathbf{M}_h = \begin{bmatrix} M_a^{(h)} \\ M_b^{(h)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_{hi} = \begin{bmatrix} m_a^{(hi)} \\ m_b^{(hi)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_h = \lambda_h \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_{hs} = \lambda_h \begin{bmatrix} m_{st}^{(h)} \\ m_{dr}^{(h)} \end{bmatrix}$$

și deci matricele globale (8.40) au toate cîte $2b$ linii. Matricea $\mathbf{F}$ poartă numele de *matrice de flexibilitate a structurii*; elementele sale $\mathbf{f}_1$, ...$\mathbf{f}_b$ au fost așezate pe diagonală pentru a introduce succesiv în calcul matricea de flexibilitate a fiecărei bare în parte prin produse de forma $\mathbf{f}_h\mathbf{M}_h$.

Cu ajutorul matricelor (8.40) expresia deplasării Δ_i capătă forma

$$6EI_c\Delta_i = \mathbf{m}_i^T (\mathbf{FM} + \boldsymbol{\theta}_s). \tag{8.41}$$

Matricele $\mathbf{M}$ și $\mathbf{m}_i$ se alcătuiesc direct din inspectarea diagramelor M_x și m_{xi}. Pentru matricele $\mathbf{F}$ și $\boldsymbol{\theta}$ trebuie calculate la fiecare bară în parte lungimea transformată și caracteristicile de încărcare, apoi alcătuite matricele parțiale $\mathbf{f}_h$ și $\boldsymbol{\theta}_{hs}$ pe baza relațiilor (8.38).

Procedeul de calcul este descris în schema logică din figura 128.

Expresia (8.41) poate fi particularizată și pentru calculul deplasărilor unitare, de exemplu pentru δ_{ij}; aceasta este deplasarea Δ_i cînd pe structură acționează $P_j = 1$. Înseamnă că M_x este în acest caz m_{xj} și deci matricea $\mathbf{M}$ devine matricea $\mathbf{m}_j$, care este similară cu alcătuirea cu matricea $\mathbf{m}_i$ corespunzătoare diagramei m_{xi}. Deoarece în acest caz nu sînt alte sarcini pe structură, matricea $\boldsymbol{\theta}_s$ este nulă și deci expresia deplasării unitare este

$$6EI_c\,\delta_{ij} = \mathbf{m}_i^T \mathbf{F} \mathbf{m}_j = \mathbf{m}_j^T \mathbf{F} \mathbf{m}_i = 6EI_c\delta_{ji}, \tag{8.42}$$

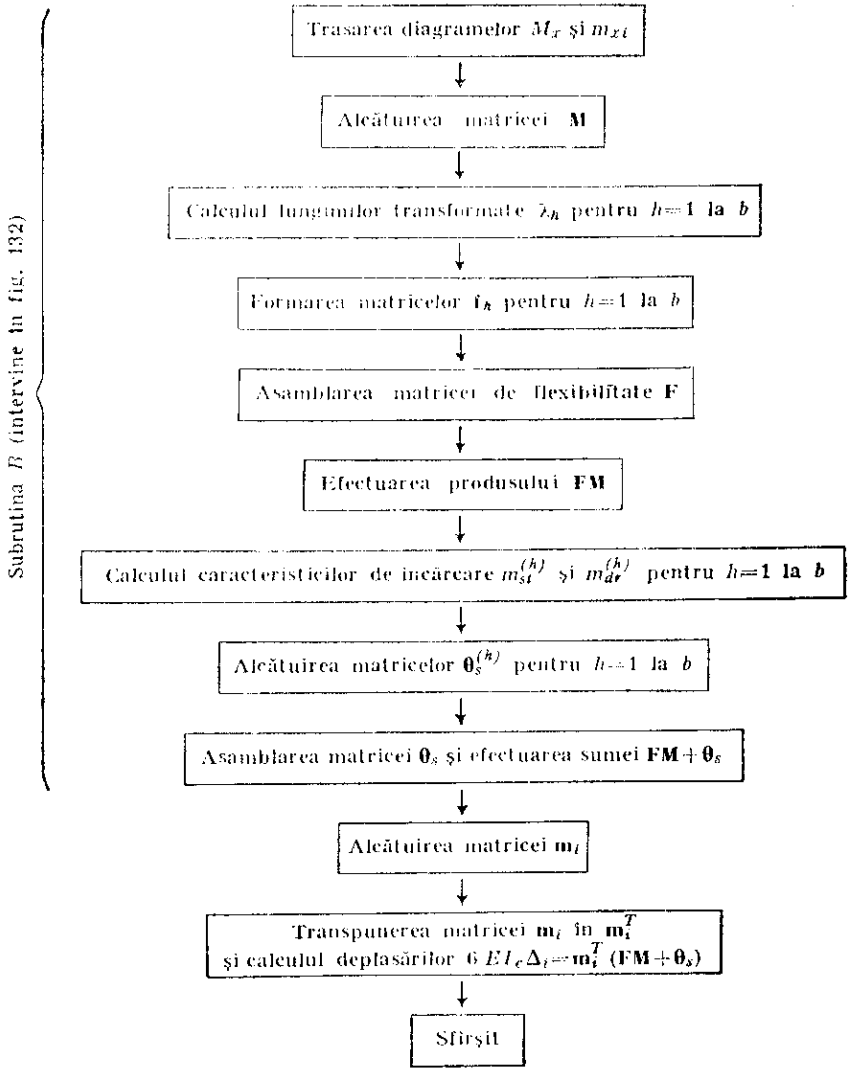


Fig. 128. Schemă logică pentru calculul deplasărilor elastice.

iar în cazul unei deplasări unitare de forma δ_{ii},

$$6EI_c\delta_{ii} = \mathbf{m}_i^T \mathbf{F}\mathbf{m}_i, \tag{8.43}$$

unde intervine atît matricea $\mathbf{m}_i$, cît și transpusa sa.

Pentru exemplificare, fie din nou grinda cotită din figura 123, *a*, la care se calculează deplasarea u_3 pentru cele două situații de încărcare (sarcini ph și P). Admițînd $I_c = I_1$, se obține

$$\lambda_{12} = h,\ \lambda_{23} = sI_1/I_2,\ \lambda_{23}/\lambda_{12} = sI_1/hI_2 = k,$$

iar caracteristicile de încărcare sînt $m_1 = m_2 = ph^2/4$.

Cu aceste date și cu diagramele M'_x, M''_x, m_{xt} din figura 123, *b-d* se alcătuiesc matricele **M**, $\mathbf{m}_i$, **F** și $\boldsymbol{\theta}_s$. Cele două situații de încărcare se pot considera în paralel, introducînd cîte două coloane în matricele **M** și $\boldsymbol{\theta}_s$, corespunzînd respectiv diagramelor M'_x și M''_x. Rezultă

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ph^2/2 & -Ph \\ ph^2/2 & -Ph \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ h \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = h\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \\ 0 & 0 & k & 2k \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta}_s = h\begin{bmatrix} ph^2/4 & 0 \\ ph^2/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{FM} = h\begin{bmatrix} ph^2/2 & -Ph \\ ph^2 & -2Ph \\ kph^2 & -2kPh \\ kph^2/2 & -kPh \end{bmatrix},$$

astfel că din aplicarea relației (8.41) rezultă

$$6EI_1\Delta_{it} = \mathbf{m}_i^T(\mathbf{FM} + \boldsymbol{\theta}_s) = \left[(5+4k)ph^4/4 - 2(1+k)Ph^3\right],$$

regăsind aceleași rezultate pentru deplasările corespunzătoare celor două încărcări date.

4. Determinarea poziției deformate la grinzi drepte

a. **Căi de determinare.** Spre deosebire de calculul deplasărilor punctuale, determinarea poziției deformate a unei grinzi necesită construirea diagramei săgeților din toate secțiunile grinzii. Cercetarea pozițiilor deformate este legată în primul rînd de problema limitării deformabilității grinzilor, dar pentru Statica construcțiilor ea reprezintă și un interes deosebit în legătură cu construirea liniilor de influență pentru grinzi static nedeterminate, cum se va vedea în capitolul XIV.

Unele modalități de determinare a poziției deformate la grinzi drepte sînt cunoscute din Rezistența materialelor. Astfel, se poate utiliza ecuația fibrei deformate, care se integrează ținînd seamă de sarcinile date și de condițiile de rezemare din cazul considerat. Această cale are caracter analitic și devine greoaie pentru cazuri mai complicate.

O altă posibilitate constă în folosirea expresiei Maxwell-Mohr, stabilită pentru cazul deplasărilor punctuale: se determină săgeata în secțiunea *curentă* a grinzii și apoi se admite ca variabilă poziția acesteia, ajungîndu-se astfel la ecua-

ția deformatei. Este necesar ca grinda să fie împărțită în intervale, astfel ca pentru toate secțiunile dintr-un interval expresia deplasării să fie aceeași, variind numai abscisa secțiunii.

Un exemplu este dat în figura 129, *a*, referitor la determinarea poziției deformate la o grindă cu consolă, de secțiune constantă. Pentru aflarea săgeții v_x din secțiunea curentă trebuie considerate separat intervalele *1–2* și *2–3* ale grinzii. Diagrama M_x se vede în figura 129, *b*, iar cele două diagrame unitare care corespund aplicării sarcinii-unitate în secțiunile curente *i* și *j* ale celor două intervale sînt date în figura 129, *c*.

Pentru efectuarea integrării se utilizează lungimi transformate și caracteristici de încărcare; diagramele M_x și m_{xi} se împart în porțiunile arătate pe figură. Rezultă

$$\lambda_{12}=l,\ \lambda_{1i}=l\xi,\ \lambda_{i2}=l(1-\xi),\ \lambda_{2j}=a\alpha,$$

$$m_{12}^{st},\quad m_{12}^{dr}=\frac{pl^2}{4},\quad m_{1i}^{st}=m_{1i}^{dr}=\frac{pl^2}{4}\xi^2,\quad m_{i2}^{st}=m_{i2}^{dr}=\frac{pl^2}{4}(1-\xi)^2,$$

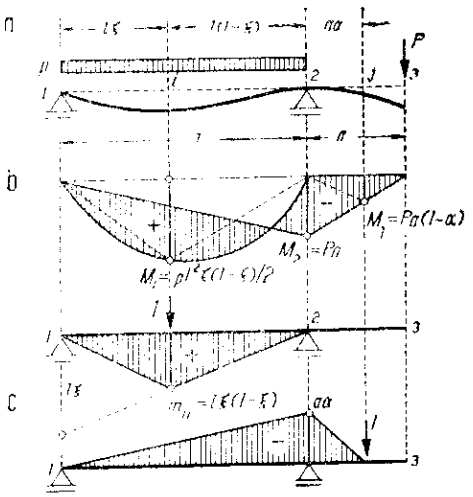


Fig. 129

$$M_i=\frac{pl^2}{2}\xi(1-\xi),\qquad M_j=Pa(1-\alpha),$$

$$M_2=Pa,\qquad m_{ij}=l\xi(1-\xi).$$

Aplicînd relațiile de integrare (8.29) – (8.32), se obține:

$$(1-2)\ 6EIv_x=l\xi\left[\lambda_{12}m_{12}^{st}-\lambda_{1i}(M_i+m_{1i}^{st})-\lambda_{12}M_2+\lambda_{1i}M_2\xi\right],$$

sau $$v_x=\frac{l^2}{24EI}\xi(1-\xi)\left[pl^2(1+\xi-\xi^2)-4Pa(1+\xi)\right];$$

$$(2-3)\ 6EIv_x=a\alpha\left[-\lambda_{12}m_{12}^{dr}+2\lambda_{12}M_2+\lambda_{2j}(2M_2+M_j)\right],$$

sau $$v_x=\frac{a\alpha}{24EI}\left[4Pa(2+3a\alpha-a\alpha^2)-pl^3\right].$$

Acestea sînt ecuațiile axei deformate a grinzii pe cele două intervale, în primul variabila fiind ξ și în al doilea α, ambele variind de la 0 la 1. Trasarea se face prin puncte, împărțind grinda într-un număr de porțiuni și calculînd mărimile săgeților în punctele de diviziune. Astfel, pentru mijlocul deschiderii *1-2* se găsește $v=5pl^4/384EI-Pal^2/16EI$, iar pentru vîrful consolei rezultă $v=Pa^2(l+a)/3EI-pal^3/24EI$, unde apar în termeni separați efectele celor două sarcini aplicate pe grindă.

Acest mod de determinare a pozițiilor deformate este simplu în principiu, dar calculul devine laborios cînd trebuie considerate mai multe intervale. Pentru cazuri mai complicate se impune deci un alt mod de abordare. Metoda specifică pentru determinarea pozițiilor deformate la structuri oarecare constă în utilizarea *sistemelor conjugate*[1]. Această metodă are caracter general și un domeniu larg de aplicare în calculul structurilor. Aici se va considera numai o formă

[1] Forma generală a teoriei sistemelor conjugate, proprietățile acestora și modul de utilizare în calculul structurilor sînt date în S.C-1, capitolul X și S.C-2, capitolele II și VII.

particularizată a metodei, adaptată determinării poziției deformate în cazul simplu al grinzilor drepte, care oferă posibilități de sistematizare și formulare matriceală în vederea automatizării calculului.

b. **Semnificația și alcătuirea grinzilor conjugate.** Pentru studiul poziției deformate, grinzii reale i se asociază un sistem convențional — numit *grindă conjugată* — pe care se conduce rezolvarea. Sistemul convențional se stabi-

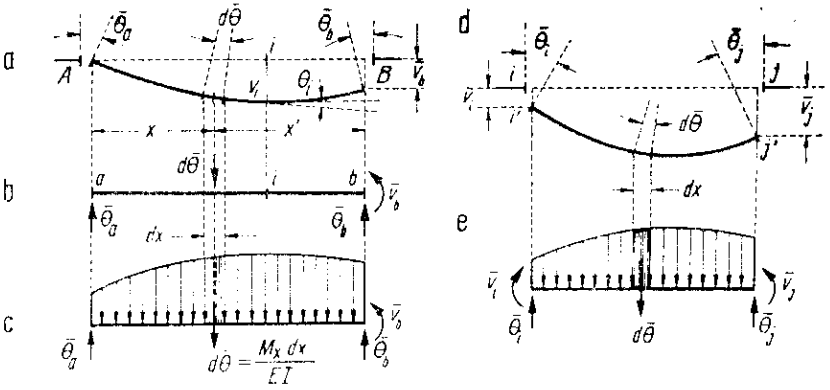


Fig. 130

lește în baza unei analogii, care conferă semnificație statică corelațiilor geometrice dintre deplasările ce caracterizează poziția deformată. În acest mod, studiul geometric se înlocuiește cu un studiu static.

Analogia rezultă considerînd o poziție deformată oarecare a unei porțiuni $A-B$ de grindă (fig. 130, *a*). Admițînd că secțiunile extreme sînt raportate la reperele A și B ce le fixează poziția inițială, rezultă că prin trecerea în poziția deformată apar deplasările *relative*[1] $\bar{\theta}_a$ în extremitatea A și $\bar{\theta}_b$ în extremitatea B, precum și $d\bar{\theta}$ în fiecare element ds. Ținînd seamă de sensuri[2], condiția de închidere a deplasărilor relative între repere (de la reperul A la reperul B) conduce la corelațiile geometrice

$$\bar{\theta}_a - \int_a^b d\bar{\theta} + \bar{\theta}_b = 0 \quad \text{și} \quad \theta_a l - \int_a^b d\theta\, x' - \bar{v}_b = 0, \tag{8.44}$$

unde prima relație exprimă că reperul B nu se rotește față de A, iar a doua — că reperul B nu se deplasează pe verticală.

---

[1] În cele ce urmează este esențial să se deosebească:

- deplasări *relative* între secțiuni vecine ale axei structurii, inclusiv deplasările ce rezultă în extremități față de reperele care fixează pozițiile inițiale ale secțiunilor extreme;
- deplasări *efective* ale diferitelor secțiuni față de poziția lor inițială.

Pentru claritate, în acest paragraf deplasările relative se scriu cu simboluri *barate*, iar deplasările efective cu simboluri nebarate.

[2] Sensurile deplasărilor relative rezultă considerînd cele două secțiuni vecine în ordinea stînga->dreapta.

Fie acum o bară rigidă convențională a-b (fig. 130, b) încărcată cu deplasările relative, considerate în următoarele semnificații statice:

— rotirile relative $\bar{0}$ sînt privite ca *forțe*, sensul de aplicare a acestora fiind acela al deformării corespunzătoare (rotirile relative cu sens orar apar ca forțe dirijate de jos în sus);

— deplasările liniare relative v sînt privite ca *momente exterioare* (pentru deplasările de sus în jos, momentul are sens orar).

Este ușor de controlat că relațiile (8.44) reprezintă, în această interpretare, condiția de echilibru a barei rigide convenționale.

Bara rigidă convențională, încărcată cu deplasările *relative* ce caracterizează poziția deformată considerată, privite în semnificația lor statică de *forțe exterioare*, reprezintă un sistem în echilibru; ea poartă numele de *grindă conjugată*.

Cînd grinda dată este încărcată cu sarcini, rotirea relativă dintre fețele elementului curent ds are mărimea $\mathrm{d}\bar{\theta} = M_x \mathrm{d}x/EI$. Înseamnă că pe bara convențională trebuie aplicată o încărcare distribuită de intensitate M_x/EI (fig. 130, c). Dacă grinda reală are moment de inerție constant pe toată lungimea, se poate admite ca încărcare distribuită convențională *chiar diagrama* M_x, cu condiția ca rezultatele să fie împărțite cu constanta EI. Cînd în lungul grinzii date sînt porțiuni cu momente de inerție diferite, încărcarea distribuită pe conjugată este reprezentată de diagrama corectată $M_x I_c/I$, constanta cu care se împart rezultatele fiind în acest caz EI_c.

Deplasările *efective* θ_i și v_i dintr-o secțiune oarecare i a grinzii (fig. 130, a) se pot scrie pe cale geometrică sub forma

$$0_i = \bar{0}_a - \int_a^i \mathrm{d}\bar{0} \quad \text{și} \quad v_i = 0_a x_i - \int_a^i \mathrm{d}\,\bar{\theta}(x_i - x). \tag{8.45}$$

Se controlează imediat că aceste deplasări sînt reprezentate în grinda conjugată prin *eforturile* din secțiunea corespunzătoare i, anume $0_i = T_i^c$ și $v_i = M_i^c$. Din aceste relații rezultă:

(1) diagrama rotirilor tuturor secțiunilor grinzii reale se obține sub forma diagramei de forțe tăietoare din grinda conjugată;

(2) diagrama săgeților din toate secțiunile grinzii reale este dată de diagrama de momente încovoietoare a grinzii conjugate.

Înseamnă că *determinarea poziției deformate a grinzii date se reduce la trasarea diagramei de momente încovoietoare a grinzii conjugate asociate.*

Considerînd două secțiuni consecutive i și j pe grindă (fig. 130, d), se pot scrie pe cale geometrică următoarele relații între deplasările efective

$$0_j = 0_i - \int_i^j \mathrm{d}\bar{0} \quad \text{și} \quad v_j = v_i + \theta_i(x_j - x_i) - \int_i^j \mathrm{d}\,\bar{\theta}(x_j - x). \tag{8.46}$$

Admițînd acum că porțiunea i-j de grindă este izolată de rest și poziția sa deformată i'-j' este raportată la reperele care fixează situația inițială a secțiunilor i și j, deplasările efective din aceste secțiuni capătă caracter de deplasări relative față de repere, corespunzînd grinda conjugată i-j din figura 130, e. Aplicarea condiției de echilibru static conduce la regăsirea relațiilor (8.46), care sînt astfel analoage cu relațiile de recurență (2.4)—(2.5) dintre eforturile din două secțiuni consecutive ale grinzii conjugate asociate grinzii date.

Rămîne de precizat o chestiune importantă. Grinda reală are anumite legături în rezemări sau în puncte intermediare. Este desigur necesar ca analogia să fie respectată și în aceste secțiuni. Aceasta se realizează printr-o *operație de transformare a legăturilor* grinzii reale, ținînd seama atît de deplasările relative permise (forțe exterioare aplicate pe conjugată), cît și de deplasările efective pe care le împiedică (eforturi nule în secțiunile corespunzătoare ale conjugatei). Operația de transformare pornește de la reperul extremității din stînga și se încheie pe reperul extremității din dreapta, ținînd seama de două criterii:

(1) Pentru fiecare legătură care lipsește în grinda reală, pe direcția sa devine posibilă o deplasare relativă și deci aceasta trebuie aplicată ca reacțiune pe conjugată. La extremități comparația trebuie deci făcută cu cazul încastrării perfecte, iar în punctele intermediare cu situația de continuitate.

(2) Pentru fiecare legătură în plus care apare în grinda reală, adusă de reazeme intermediare ce împiedică anumite deplasări efective, în conjugată trebuie suprimată o legătură, astfel ca efortul corespunzător să devină nul.

În tabela 4 sînt date cazurile uzuale de transformări de legături la grinzi drepte, cu indicarea condițiilor de aplicare a acestor două criterii.

Semnificația operației de transformarea legăturilor scoate în evidență o proprietate esențială a grinzilor conjugate. Fie ca referință o grindă dreaptă încastrată complet la ambele extremități (șase legături în total), care este de trei ori static nedeterminată. Efectuînd transformarea, grinda conjugată rezultă fără nici o legătură, deci are trei grade de libertate în plan. Față de acest caz, se ține seama că:

(a) pentru fiecare legătură de continuitate care lipsește în grinda reală, gradul său de nedeterminare statică scade cu o unitate, în timp ce la grinda conjugată se adaugă o legătură, deci și gradul de libertate al acesteia scade cu o unitate;

(b) pentru fiecare legătură adusă grinzii reale de rezemări intermediare, gradul de nedeterminare crește cu o unitate, în timp ce la grinda conjugată se suprimă o legătură, astfel că și gradul de libertate al acesteia crește cu o unitate.

Se ajunge la concluzia că numărul de nedeterminări statice al grinzii date se regăsește ca număr de grade de libertate în grinda conjugată[1]. *Cînd grinda reală este static determinată, și grinda conjugată este static determinată.*

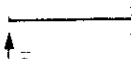
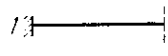
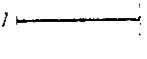
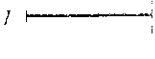
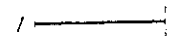
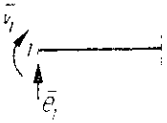
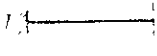
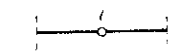
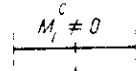
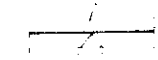
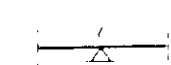
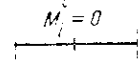
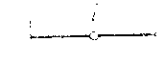
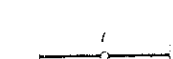
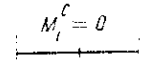
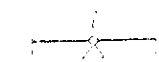
c. **Formulare matriceală a determinării pozițiilor deformate.** Obținerea poziției deformate a unei grinzi drepte sub forma diagramei de momente încovoietoare a grinzii conjugate asociate, oferă posibilitatea să se rezolve unitar cele două probleme ale studiului grinzilor drepte: determinarea diagramelor de eforturi și a poziției deformate corespunzătoare unui ansamblu de sarcini dat.

Se cunoaște că la grinzi static determinate aceste două probleme se tratează independent: mai întîi se construiesc diagramele de eforturi folosind condiția de echilibru static, apoi se determină poziția deformată cu ajutorul condiției de compatibilitate. În loc de a aplica cele două condiții asupra grinzii reale,

[1] Grinzile conjugate ale grinzilor drepte static nedeterminate sînt sisteme cu grade de libertate, dar care se găsesc în echilibru sub acțiunea sarcinilor convenționale; exprimarea echilibrului poate servi la ridicarea nedeterminării statice.

Tabela 4

Transformarea legăturilor la grinzi drepte

Grinda reală		Grinda conjugată	
Rezemări	Deplasări	Reacțiuni	Rezemări
Reazem simplu	$\bar{\theta}_i \neq 0$ $\bar{v}_i = 0$		Reazem simplu
 Încastrare	$\bar{\theta}_i = 0$ $\bar{v}_i = 0$		 Extremitate liberă
 Extremitate liberă	$\bar{\theta}_i \neq 0$ $\bar{v}_i \neq 0$		 Încastrare
 Articulație intermediară	$\bar{\theta}_i \neq 0$ $\bar{v}_i = 0$ $v_i \neq 0$		 Reazem simplu intermediar
 Reazem simplu intermediar	$\bar{\theta}_i = 0$ $\bar{v}_i = 0$ $v_i = 0$		 Articulație intermediară
 Articulație pe reazem simplu	$\bar{\theta}_i \neq 0$ $\bar{v}_i = 0$ $v_i = 0$		 Articulație pe reazem simplu

Notă: Sensurile deplasărilor relative sînt luate arbitrar.

se poate ajunge la utilizarea de două ori a unei singure condiții, anume condiția de echilibru static, mai întîi asupra grinzii date și apoi asupra grinzii conjugate. Aceasta, deoarece condiția de echilibru static a conjugatei încărcată cu deplasările relative este analoagă condiției de compatibilitate a grinzii reale și

exprimă închiderea deplasărilor relative între reperele de la extremitățile grinzii, cum se vede din relațiile (8.44).

Trasarea diagramei de momente încovoietoare a grinzii conjugate se poate face pe cale analitică sau grafică, cum s-a arătat în capitolul II. O modalitate sistematizată este cea arătată în legătură cu schema logică din figura 26, bazată pe formularea matriceală a relațiilor de recurență dintre eforturile din secțiuni succesive, analoage cu relațiile (8.46). Acest procedeu devine deosebit de avantajos pentru rezolvarea integrală a grinzii: același algoritm se aplică în ambele etape (pe grinda reală — pentru determinarea diagramelor M_x și T_x, apoi pe grinda conjugată — pentru determinarea poziției deformate); mai mult încă, matricele de trecere de la o secțiune la alta rămîn aceleași.

Deoarece eforturile și săgețile se calculează numai în dreptul punctelor de diviziune $1, 2, \ldots n$ ale axei grinzii, apare indicat ca sarcinile aplicate pe fiecare porțiune de grindă — atît sarcinile date pe grinda reală, cît și sarcinile convenționale pe grinda conjugată — să fie înlocuite prin componentele lor la extremitățile porțiunii. Se ajunge astfel la încărcări numai cu sarcini concentrate, astfel că matricele $\mathbf{T}_{ij}$ și $\mathbf{C}_j$ definite de relațiile (2.16) devin

$$\mathbf{T}_{ij}=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_j=\begin{bmatrix}0 & 0 & \Delta M_j\\ 0 & 0 & \Delta T_j\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij}=\begin{bmatrix}1 & a & \Delta M_j\\ 0 & 1 & \Delta T_j\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{8.47}$$

unde a este lungimea porțiunii i-j. Relațiile de recurență (2.17) rămîn aceleași și anume

$$\mathbf{E}_j^{st}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i^{dr}\quad \text{și}\quad \mathbf{E}_j^{dr}=\mathbf{C}_j+\mathbf{E}_j^{st}=\mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i^{dr}=(\mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij})\mathbf{E}_i^{dr}.$$

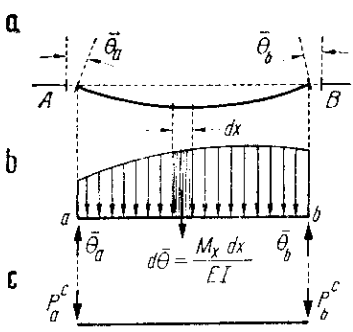


Fig. 131

Sarcinile concentrate din dreptul punctelor de diviziune intervin prin matricele $\mathbf{C}_j$, obișnuit sub forma ΔT_j; acestea sînt deci diferite în cele două etape ale rezolvării. Deoarece pe grinda conjugată acționează o sarcină distribuită de intensitate M_x/EI, este util să se stabilească un mod sistematizat de determinare a componentelor la extremitățile porțiunilor de grindă. Fie pentru aceasta situația din figura 131, *a*, unde s-a reprezentat deformata unei porțiuni de grindă raportată la linia *a*-*b* a extremităților sale. În figura 131, *b* se vede conjugata porțiunii, care reprezintă situația de echilibru static dintre încărcarea convențională distribuită și rotirile relative $\bar{\theta}_a$ și $\bar{\theta}_b$ din secțiunile extreme, raportate la reperele respective. Înseamnă că încărcarea distribuită se poate înlocui printr-un sistem echivalent reprezentat de sarcinile concentrate convenționale $P_a^e=-\bar{\theta}_a$ și $P_b^e=-\bar{\theta}_b$ aplicate la extremitățile porțiunii (fig. 131, *c*).

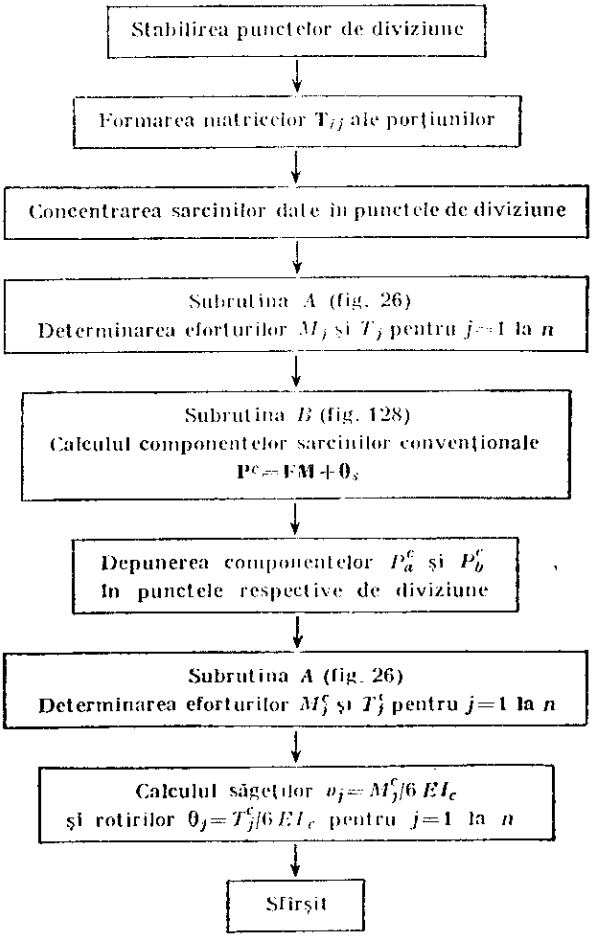


Fig. 132. Schemă logică pentru calculul deplasărilor la grinzi drepte.

Evaluarea *mărimii* acestor componente a fost făcută în paragraful precedent, anume prin relațiile (8.37) și (8.38). Se poate deci scrie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_a^c \\ P_b^c \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^c} = \lambda_{ab} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} + \lambda_{ab} \underbrace{\begin{bmatrix} m_{st} \\ m_{dr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_s}, \tag{8.48}$$

unde trebuie ținut seamă că mărimile componentelor apar multiplicate cu constanta $6EI_c$, deci săgețile obținute trebuie împărțite cu această constantă. Sensul de aplicare al componentelor rezultă din sensul încărcării convenționale

distribuite, dată de diagrama M_x. Se vede că pentru evaluarea componentelor P_a^c și P_b^c este suficient să se cunoască ordonatele M_a și M_b din diagrama M_x, precum și caracteristicile de încărcare m_{st} și m_{dr} ale porțiunii A-B din grinda reală.

Relațiile (8.48) sînt stabilite pentru o singură porțiune de grindă. În vederea obținerii tuturor componentelor, se formează matricele globale $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$ și $\boldsymbol{\theta}_s$ definite de relațiile (8.40), unde numerotarea $1, \ldots h, \ldots b$ se referă aici la succesiunea porțiunilor în care a fost împărțită grinda dată. Elementele curente $\mathbf{f}_h$, $\mathbf{M}_h$ și $\boldsymbol{\theta}_{hs}$ indicate acolo reprezintă în cazul de față matricele din relația (8.48) corespunzătoare porțiunii curente de grindă. Se obține

$$\mathbf{P}^c = \mathbf{FM} + \boldsymbol{\theta}_s, \tag{8.49}$$

unde $\mathbf{P}^c$ este matricea-coloană care cuprinde succesiunea componentelor sarcinilor convenționale (cîte două pentru fiecare porțiune).

Aceste componente trebuie apoi depuse în dreptul punctelor de diviziune corespunzătoare, pentru a obține sarcinile concentrate totale ce se aplică în punctele respective. Astfel, pentru două porțiuni succesive i-j și j-k, rezultă $P_j^c = P_{ji}^c + P_{jk}^c$, unde primul termen este componenta P_b^c de pe intervalul i-j, iar al doilea — componenta P_a^c de pe intervalul j-k.

Odată efectuată operația de transformare a legăturilor și stabilite sarcinile concentrate pe conjugată, se alcătuiesc matricele $\mathbf{C}_j$ ale corecțiilor de eforturi din punctele de diviziune și deci se poate forma matricea globală de forma (2.19) de trecere de la prima secțiune la o altă secțiune unde se cunosc anumite eforturi (de exemplu la o articulație introdusă pe parcurs, unde $M^c = 0$, sau la extremitatea din dreapta). În acest mod se determină eforturile din prima secțiune (matricea $\mathbf{E}_1^c$), după care se parcurg din nou toate punctele de diviziune determinînd eforturile M_j^c și T_j^c, care reprezintă respectiv săgeata și rotirea din secțiunea corespunzătoare a grinzii reale.

Schema de aplicare a întregului procedeu se vede în figura 132, unde s-au folosit ca părți componente grupe de operații[1] întîlnite anterior în figurile 26 și 128.

[1] În programele destinate calculului automat, asemenea grupe de operații — susceptibile de repetare în programe diferite — poartă numele de *subrutine*.

CAPITOLUL IX

METODA GENERALĂ A EFORTURILOR

A. GENERALITĂȚI

1. Stabilirea gradului de nedeterminare statică

Structurile static nedeterminate au un surplus de legături față de numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice, care corespunde situației de determinare statică. Fiecare legătură în plus introduce cîte un grad de nedeterminare, deoarece mărește cu o unitate numărul total de necunoscute (forțe de legătură), față de numărul de ecuații de echilibru static disponibile.

Din punctul de vedere al provenienței surplusului de legături se pot distinge:

(1) Nedeterminare *exterioară*, cînd surplusul de legături se găsește în rezemări. Astfel, cadrul din figura 133, *a* are în cele două încastrări un total de șase legături, față de trei ecuații de echilibru static disponibile; asemănător, grinda cu zăbrele din figura 133, *d* are patru legături în rezemări, față de numai trei cîte sînt suficiente pentru a i se asigura fixarea în plan.

(2) Nedeterminare *interioară*, cînd în rezemări se găsește numai numărul minim necesar de legături ,iar surplusul provine din modul de alcătuire a structurii. Cadrul din figura 133, *b*, alcătuit dintr-un contur închis, este static nedeterminat, deoarece numai reacțiunile pot fi determinate folosind ecuațiile de echilibru static, nu și eforturile dintr-o secțiune oarecare. Asemănător, grinda cu zăbrele din figura 133, *e* este interior static nedeterminată, deoarece are cîte două diagonale în fiecare panou, în loc de una singură.

Sînt structuri care au nedeterminare statică atît interioară cît și exterioară; astfel, cadrul din figura 133, *c* are în rezemări un total de 12 legături, cît și un contur închis în cuprinsul său.

Stabilirea gradului de nedeterminare statică și identificarea provenienței surplusului de legături constituie prima etapă în cercetarea oricărei structuri. În capitolele precedente s-au indicat căi pentru aflarea gradului de nedeterminare. Astfel, la structuri plane oarecare se poate utiliza relația $d=l+r-3c\geqslant 0$, care compară numărul de legături interioare (l) și din rezemări (r), cu numărul porțiunilor rigide care intervin în alcătuirea structurii (c); diferența $d>0$ reprezintă gradul de nedeterminare statică. Pentru specificul grinzilor cu zăbrele plane este mai indicată relația $d=b+r-2n\geqslant 0$, unde intervine numărul de bare (b), de legături în rezemări (r) și de noduri (n).

Un alt procedeu, cu aplicare simplă și rapidă în special în cazul cadrelor, este procedeul *contururilor închise*. În înțelesul acestui procedeu, drept contururi ale unei structuri se consideră atît contururile propriu-zise (mărginite numai de bare), cît și contururile la care latura de închidere este reprezentată prin baza de sprijinire. Astfel, cadrul dublu încastrat din figura 133, *a* are

un singur contur închis, în timp ce cadrul din figura 133, *c* are patru contururi închise; cadrele din figura 133, *g* și *h* au cîte trei contururi.

Procedeul pornește de la constatarea făcută în legătură cu figura 10, *j*, anume că un contur închis plan este de trei ori static nedeterminat cînd continuitatea nu este întreruptă în nici un punct. Înseamnă că, la o structură cu mai multe contururi, *fiecare contur închis și continuu aduce cîte trei nede-*

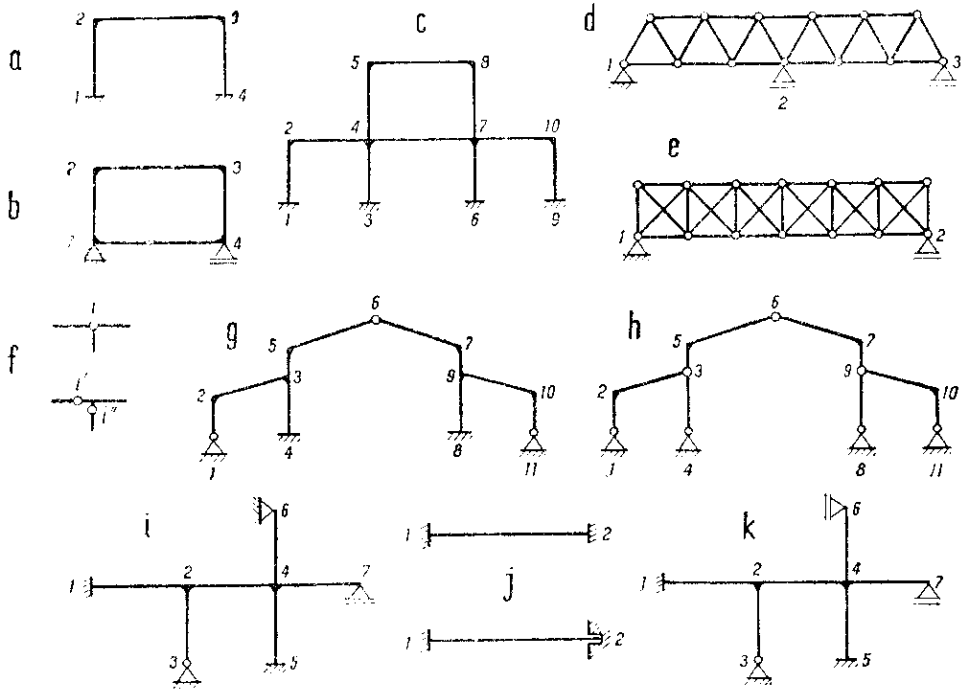


Fig. 133

terminări. Este ușor de controlat aceasta prin efectuarea unei secționări în fiecare contur, deci suprimînd cîte trei legături; se ajunge la un sistem static determinat, cum se constată de exemplu la cadrul din figura 133, *c*, dacă se secționează toate barele orizontale.

Cînd continuitatea contururilor închise este întreruptă de articulații, fiecare *articulație simplă* reprezintă o legătură mai puțin, deci gradul de nedeterminare statică *se reduce cu o unitate*. La evaluarea numărului de articulații simple se va ține seama că un nod articulat, în care se întîlnesc *k* bare, reprezintă $k-1$ articulații simple (fig. 133, *f*). Tot în categoria articulațiilor simple intră și cazul reazemelor articulate, care întrerup continuitatea dintre barele structurii și baza de sprijinire, cum sînt articulațiile *1*, *4*, *8* și *11* din figura 133, *h*. De observat că într-un *reazem simplu* lipsesc două legături de continuitate, deci gradul de nedeterminare se reduce cu două unități.

În general, stabilirea gradului de nedeterminare statică d se face pe baza următoarei relații:

$$d = 3 \text{ ori numărul de contururi} - \text{legături lipsă} \tag{9.1}$$

unde numărul legăturilor lipsă se socotește față de situația cînd toate contururile ar fi continue. Aplicînd relația (9.1), se obține:

— cadrul portal din figura 133, *a* este de trei ori static nedeterminat, la fel ca și cadrul închis din figura 133, *b*, care este exterior static determinat; structura din figura 133, *c* este de $4 \cdot 3 = 12$ ori static nedeterminată, deoarece are patru contururi și nu lipsește nici o legătură;

— cadrul de hală industrială din figura 133, *g* are trei contururi și trei articulații simple, deci $d = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6$, astfel că este de șase ori static nedeterminat, fiecare contur aducînd cîte două grade de nedeterminare; cadrul din figura 133, *h* are tot trei contururi, în cuprinsul cărora se găsesc cinci articulații simple în secțiunile *1*, *4*, *6*, *8* și *11*, precum și nodurile articulate *3* și *9*, care fiecare echivalează cu două articulații simple, astfel că $d = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$, și deci cadrul este static determinat.

La aplicarea procedeului, după aflarea gradului de nedeterminare statică pentru ansamblul structurii, este necesar să se identifice și proveniența nedeterminărilor, care reprezintă un element ce trebuie cunoscut la aplicarea metodei eforturilor; aceasta se face cu ușurință, deoarece pentru fiecare contur rezultă direct cîte legături suplimentare sînt.

O observație utilă pentru aplicarea relației (9.1) se referă la stabilirea numărului de contururi: la numărarea acestora trebuie să se țină seama ca fiecare contur să conțină *cel puțin o bară nouă*, care nu face parte din celelalte contururi. Astfel, la cadrul din figura 133, *i*, după numărarea celor trei contururi inferioare, deasupra barei *1-2-4-7* se mai poate număra încă un singur contur, anume *1-4-6* sau *6-4-7*.

O altă observație privește barele *drepte* care au rezemări la ambele extremități, de exemplu grinda dublu încastrată (fig. 133, *j*). S-a arătat anterior că la structuri alcătuite din bare drepte (grinzi, cadre) se neglijează efectul forțelor axiale asupra deformării; înseamnă că barele se consideră de lungime invariabilă. În această situație, rezemările de la capete trebuie văzute ca în figura inferioară, împiedicarea deplasării pe direcția axei barei făcîndu-se numai la o extremitate; sînt în total numai cinci legături, și deci grinda este de două ori static nedeterminată. Această dispunere a rezemărilor corespunde de altfel și cerințelor practice, permițînd manifestarea liberă a efectului variațiilor de temperatură. Numai în cazul cînd s-ar lua în considerație deformarea longitudinală a barei, iar ambele încastrări ar împiedica efectiv orice deplasare pe această direcție, ar interveni și cea de-a treia nedeterminare statică: în acest caz trebuie impusă și condiția ca lungimea barei să rămînă invariabilă.

O situație asemănătoare apare și la cadrul din figura 133, *i* privitor la bara *5-4-6*, care trebuie privită ca în figura 133, *k*, deci cu reazem simplu în extremitatea *6*. Cadrul are patru contururi, o articulație și două reazeme simple, deci $d = 4 \cdot 3 - 1 - 2 \cdot 2 = 7$, astfel că este de șapte ori static nedeterminat.

2. Ideea fundamentală a metodei; sistem de bază

Datorită surplusului de legături pe care îl conțin, structurile static nedeterminate nu se pot rezolva numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static. Este necesar să se considere starea de echilibru elastic care se stabilește în poziția deformată, utilizînd împreună cele două condiții ce o caracterizează, anume condiția de echilibru static a forțelor exterioare și interioare, precum și condiția de compatibilitate a poziției deformate cu legăturile structurii și cu continuitatea barelor.

Îndeplinirea concomitentă a ambelor condiții definește starea efectivă de eforturi a structurii pentru încărcarea considerată. În calcul, condițiile trebuie introduse succesiv, în sensul de a admite că numai una dintre ele este satisfăcută, în timp ce ne-am îndepărtat de la cealaltă, pentru a o putea apoi impune. Aceasta se realizează utilizînd un *sistem de bază*, pe care se desfășoară calculul. Sistemul de bază se obține din structura dată introducînd anumite modificări, prin suprimarea sau prin adăugarea unor legături, astfel ca să se ajungă la un sistem *a cărui rezolvare este cunoscută*.

În metoda eforturilor, sistemul de bază rezultă din structura dată prin *suprimare* de legături. Se stabilește mai întîi gradul de nedeterminare statică, care arată cîte legături suplimentare sînt în alcătuirea structurii. Se consideră apoi suprimate un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare, astfel că se obține un sistem de bază static determinat. Efectuînd suprimarea de legături, sînt puse în evidență necunoscutele static nedeterminate: acestea sînt *forțele de legătură* corespunzătoare (reacțiuni sau eforturi), de unde și numele metodei. Prin suprimarea legăturilor suplimentare și înlocuirea efectului lor cu forțele de legătură, pentru sistemul de bază necunoscutele intră în categoria forțelor exterioare, împreună cu sarcinile date.

Alcătuirea sistemului de bază este o consecință a modului cum sînt alese legăturile suplimentare. Considerînd totalitatea legăturilor structurii date, forțele de legătură respective — inițial necunoscute — se pot împărți în două categorii: un prim grup, care cuprinde un număr de necunoscute egal cu numărul ecuațiilor de echilibru static disponibile, și un al doilea grup, care conține surplusul de necunoscute. Pe baza ecuațiilor de echilibru static se pot totdeauna exprima necunoscutele din primul grup în funcție de sarcini și de necunoscutele din al doilea grup. Acestea din urmă capătă astfel caracter de *variabile independente din punct de vedere static* și pentru aflarea lor trebuie să se folosească ecuații suplimentare, care derivă din condiția de compatibilitate. Oricare dintre necunoscute poate fi plasată în a doua categorie, deci *orice forță de legătură poate fi considerată drept cantitate static nedeterminată*, dar numărul celor privite concomitent ca atare trebuie să fie egal cu gradul de nedeterminare.

Înseamnă că pentru o structură dată se pot alege mai multe sisteme de bază; se suprimă legături din rezemări sau din cuprinsul structurii, cum este mai avantajos. Astfel, cadrul din figura 134, *a* este de trei ori static nedeterminat; două sisteme de bază posibile se văd în figurile 134, *b* și *c*, primul

fiind un cadru cu o articulație și un reazem simplu, iar al doilea — un cadru cu trei articulații. Cadrul din figura 134, *d* este de patru ori static nedeterminat, fiecare din cele două contururi aducînd cîte două grade de nedeterminare; două sisteme de bază sînt indicate în figurile 134, *e* și *f*. Desigur, suprimarea legăturilor trebuie făcută judicios, astfel ca sistemul de bază să rezulte cît mai simplu, în sensul ca rezolvarea lui să fie cît mai ușoară. Se va vedea

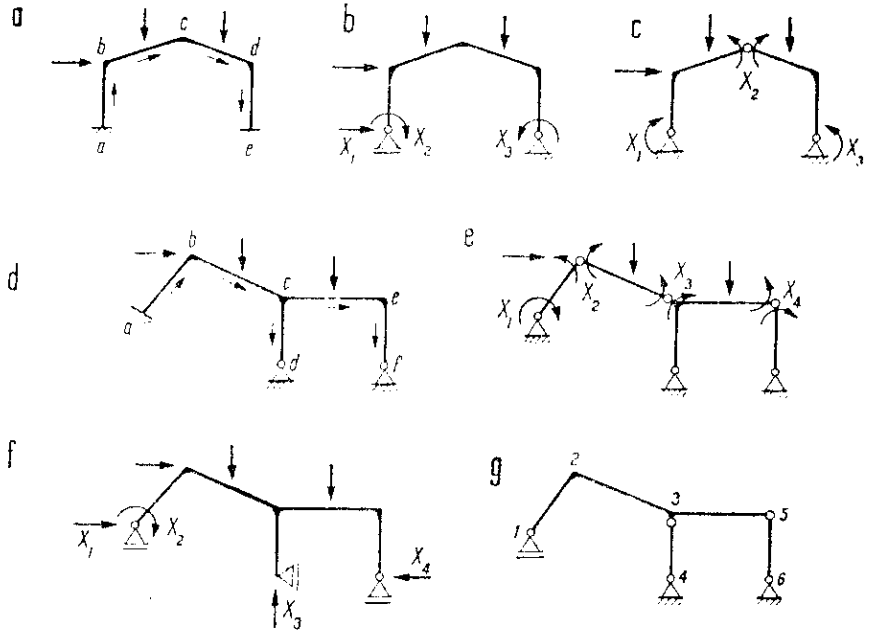


Fig. 134

mai departe că alegerea judicioasă a sistemului de bază este esențială pentru simplificarea rezolvării.

Este necesar ca prin suprimarea legăturilor suplimentare să rezulte un sistem de bază efectiv static determinat. În acest scop, distribuirea legăturilor suprimate în cuprinsul structurii trebuie să concorde cu proveniența gradelor de nedeterminare statică, stabilită prin cercetarea situației din fiecare contur. Se evită astfel transformarea unor porțiuni ale structurii în mecanisme, în timp ce alte porțiuni rămîn static nedeterminate, cum este cazul din figura 134, *g*. Se va da de asemenea atenția cuvenită *evitării situațiilor particulare de formă critică* în sistemul de bază.

Rezolvarea se conduce integral pe sistemul de bază, stabilind prin condiția de echilibru static efectele date de sarcini și de necunoscute, apoi obligînd acest sistem să se comporte identic cu structura dată.

Pentru sistemul de bază, încărcat cu sarcini și necunoscute, se aplică suprapunerea de efecte și deci eforturile și deplasările pot fi exprimate prin relații liniare. Astfel, momentul încovoietor din secțiunea curentă se scrie sub forma

$$M_x = M_{xs} + m_{x1}X_1 + \ldots + m_{xj}X_j + \ldots + m_{xn}X_n,$$

unde M_{xs} este efortul datorit numai acțiunii sarcinilor date, iar m_{xj} este efortul dat de necunoscuta-unitate $X_j = 1$. Similar, o deplasare oarecare Δ_i se scrie

$$\Delta_i = \Delta_{is} + \delta_{i1}X_1 + \ldots + \delta_{ij}X_j + \ldots + \delta_{in}X_n,$$

unde Δ_{is} reprezintă mărimea deplasării date de sarcini, iar δ_{ij} — mărimea deplasării date de necunoscuta-unitate $X_j = 1$. Relațiile se pot scrie și sub forma

$$M_x = M_{xs} + M_x^{(n)} \quad \text{și} \quad \Delta_i = \Delta_{is} + \Delta_i^{(n)}, \tag{9.2}$$

unde apar în termeni separați efectele date de sarcini, anume M_{xs} și Δ_{is}, precum și cele date de ansamblul forțelor de legătură suplimentare $X_1, \ldots, X_n$, anume $M_x^{(n)}$ și $\Delta_i^{(n)}$, care reprezintă *efectul nedeterminării statice a structurii*, raportat la sistemul de bază ales. Bineînțeles, pentru diferite sisteme de bază cele două componente variază, dar prin suprapunerea lor se obțin aceleași rezultate.

Diagramele parțiale M_{xs} și $m_{x1}, \ldots, m_{xn}$ satisfac fiecare în parte condiția de echilibru static, care este controlată tocmai prin construirea acestor diagrame pe sistemul static determinat de bază. Înseamnă că diagrama totală M_x satisface condiția de echilibru static, orice valori $X_1, \ldots, X_n$ s-ar da necunoscutelor; sînt astfel posibile o infinitate de soluții. Pentru a găsi mărimile efective ale necunoscutelor, observăm că prin trecerea la sistemul de bază devin posibile deplasări elastice pe direcțiile legăturilor suprimate, deplasări care în structura dată sînt împiedicate tocmai prin prezența legăturilor respective. Această constatare indică modul cum trebuie scrise ecuațiile suplimentare de echilibru elastic.

Considerînd sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini și cu necunoscute, acesta trebuie să se comporte la fel cu structura dată, și anume *să aibă aceeași poziție deformată*; înseamnă că necunoscutele $X_1, \ldots, X_n$ trebuie să fie astfel încît *deplasările pe direcțiile legăturilor suprimate să fie nule*. Se ajunge deci la condițiile

$$\Delta_1 = 0, \ \ldots \ \Delta_i = 0, \ \ldots \Delta_n = 0. \tag{9.3}$$

Deoarece numărul legăturilor suprimate este egal cu gradul de nedeterminare statică, condiția de deplasare nulă pe direcția fiecăreia dintre aceste legături conduce la un număr de ecuații de condiție egal cu numărul necunoscutelor $X_1, \ldots, X_n$, ale căror mărimi pot fi astfel determinate. Devin deci cunoscute toate forțele exterioare ce acționează pe sistemul de bază.

Din cele ce precedă se desprinde specificul metodei eforturilor: *trecerea la sistemul de bază reprezintă o îndepărtare de la condiția de compatibilitate (continuitate) a poziției deformate, care se restabilește sub forma ecuațiilor de condiție.* Condiția de echilibru static este respectată în toate situațiile de încărcare ce intervin în calcul.

B. FORMA GENERALĂ A METODEI

1. Ecuațiile de condiție

a. **Alcătuirea ecuațiilor.** Fie o structură de n ori static nedeterminată. Prin trecerea la sistemul de bază sînt puse în evidență necunoscutele suplimentare $X_1, \ldots, X_n$; acestea sînt reacțiuni sau eforturi și pot fi cuprinse în noțiunea de forțe generalizate. Pe direcțiile lor devin posibile deplasările $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, care sînt deplasările generalizate corespunzătoare. Restabilirea condiției de compatibilitate a deformatei, care se exprimă sub forma (9.3), cere ca în sistemul de bază încărcat cu sarcini și necunoscute aceste deplasări să fie nule.

S-a arătat că deplasarea totală Δ_i pe direcția necunoscutei X_i se poate exprima printr-o relație liniară în funcție de necunoscutele suplimentare, utilizînd coeficienții de influență $\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}$, care sînt deplasări unitare pe direcția necunoscutei X_i, produse de aplicarea succesivă pe sistemul de bază a sarcinilor-unitate $X_1=1, \ldots, X_n=1$. Condiția $\Delta_i=0$ conduce astfel la ecuația

$$\Delta_i=\delta_{i1}X_1+\ldots+\delta_{ii}X_i+\ldots+\delta_{in}X_n+\Delta_{is}=0,$$

unde termenul liber Δ_{is} reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei X_i dată în sistemul de bază de către sarcini.

Cînd trebuie ținut seama și de efectul variațiilor de temperatură sau al cedărilor de reazeme, se procedează asemănător. Sistemul de bază se consideră supus succesiv la toate încărcările care acționează asupra structurii (sarcini, variații de temperatură, cedări de reazeme), rezultînd pe direcția legăturii suprimate deplasările Δ_{is}, Δ_{it}, Δ_{ic}. Aplicarea necunoscutelor suplimentare $X_1, \ldots, X_n$ trebuie să conducă la restabilirea condiției de compatibilitate, anume $\Delta_i=0$. Se ajunge la ecuația

$$\Delta_i=\delta_{i1}X_1+\ldots+\delta_{ii}X_i+\ldots+\delta_{in}X_n+\Delta_{is}+\Delta_{it}+\Delta_{ic}=0.$$

Procedînd similar pentru toate legăturile suprimate, condițiile $\Delta_1=0, \ldots, \ldots, \Delta_n=0$ se pot scrie în formă matriceală

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}_s+\boldsymbol{\Delta}_t+\boldsymbol{\Delta}_c=0, \quad \text{unde} \tag{9.4}$$

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{vmatrix} \delta_{11}\cdots\delta_{1i}\cdots\delta_{1n} \\ \vdots \\ \delta_{i1}\cdots\delta_{ii}\cdots\delta_{in} \\ \vdots \\ \delta_{n1}\cdots\delta_{ni}\cdots\delta_{nn} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_s=\begin{vmatrix} \Delta_{1s} \\ \vdots \\ \Delta_{is} \\ \vdots \\ \Delta_{ns} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_t=\begin{vmatrix} \Delta_{1t} \\ \vdots \\ \Delta_{it} \\ \vdots \\ \Delta_{nt} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_c=\begin{vmatrix} \Delta_{1c} \\ \vdots \\ \Delta_{ic} \\ \vdots \\ \Delta_{nc} \end{vmatrix},$$

care reprezintă *sistemul ecuațiilor de condiție al metodei eforturilor*. Matricea pătrată[1] $\boldsymbol{\delta}$ cuprinde totalitatea coeficienților ecuațiilor, în timp ce matricele-

[1] Pentru simplificare, matricea coeficienților poate fi scrisă și sub forma $\boldsymbol{\delta}=[\delta_{ij}]$.

coloană Δ_s, Δ_t, Δ_c cuprind termenii liberi ce corespund respectiv acțiunii pe sistemul de bază a sarcinilor, variațiilor de temperatură și cedărilor de reazeme.

Pentru lămurirea semnificației coeficienților și termenilor liberi, fie cadrul din figura 135, *a*, care este de trei ori static nedeterminat. Sistemul de bază ales se vede în figura 135, *b*, unde sînt puse în evidență necunoscutele static nedeterminate X_1, X_2 și X_3; prima este o forță, iar celelalte două sînt perechi

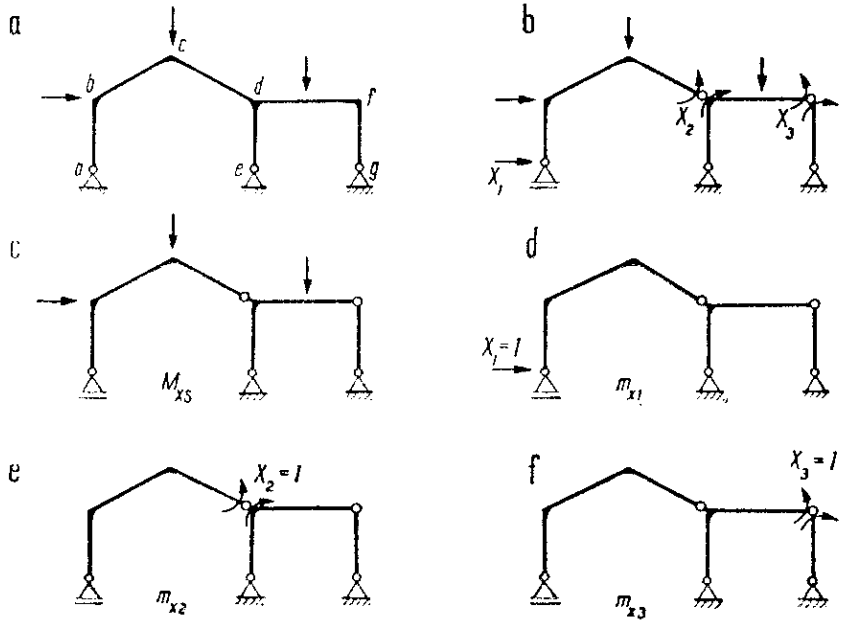


Fig. 135

de momente, deci forțe generalizate. Deplasările corespunzătoare sînt: pe direcția lui X_1 — deplasare liniară orizontală, iar pe direcțiile lui X_2 și X_3 — rotiri relative. Scriind sistemul de ecuații de forma (9.4), care în acest caz are trei ecuații cu trei necunoscute, se identifică ușor semnificațiile elementelor care intervin. De exemplu: δ_{13} — deplasarea orizontală din extremitatea *a*, cînd pe sistemul de bază acționează perechea de momente $X_3=1$ (fig. 135, *f*); δ_{21} — rotirea relativă care se produce în articulația de lîngă nodul *d*, cînd pe sistemul de bază acționează forța-unitate $X_1=1$ (fig. 135, *d*); Δ_{3s} — rotirea relativă care se produce în articulația introdusă în nodul *f*, cînd sistemul de bază este încărcat numai cu sarcinile date (fig. 135, *c*).

În ecuațiile de condiție (9.4), coeficienții necunoscutelor se calculează cu ajutorul expresiilor (8.16) stabilite pentru deplasări unitare, care au forma

$$\delta_{ij} \quad \delta_{ji} = \int m_{xi} m_{xj} \frac{\mathrm{d}s}{EI} + \int n_{xi} n_{xj} \frac{\mathrm{d}s}{EA} + \ldots;$$
$$\delta_{ii} = \int m_{xi}^2 \frac{\mathrm{d}s}{EI} + \int n_{xi}^2 \frac{\mathrm{d}s}{EA} + \ldots \tag{9.5}$$

și unde se vor reține numai anumite integrale, după categoria structurii, cum s-a arătat anterior. Din expresii se vede că este necesar să se traseze diagramele unitare m_{x1}, n_{x1}, ... pe sistemul de bază, pentru fiecare dintre necunoscute considerată egală cu unitatea și aplicată separat. Vor fi deci atîtea grupe de diagrame unitare cîte necunoscute static nedeterminate sînt. La structuri plane, alcătuite din bare drepte, se consideră obișnuit numai efectul momentelor încovoietoare asupra deformării, și deci sînt necesare numai diagramele m_{xi}. Astfel, pentru cadrul din figura 135, *a*, se vor considera situațiile de încercare din figurile 135, *d-f* și se vor trasa diagramele m_{x1}, m_{x2} și m_{x3}, care sînt suficiente pentru calculul celor nouă coeficienți.

Termenii liberi, pentru cazul încărcării cu *sarcini*, se calculează folosind expresia Maxwell-Mohr

$$\Delta_{is} = \int M_{xs} m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int N_{xs} n_{xi} \frac{ds}{EA} + \dots \tag{9.6}$$

unde M_{xs}, N_{xs}, ... sînt ordonatele curente ale diagramelor de eforturi date în sistemul de bază de acțiunea sarcinilor (fig. 135, *c*).

Din cele de mai sus rezultă că, pentru formarea sistemului ecuațiilor de condiție în metoda generală a eforturilor la o structură de n ori static nedeterminată, sistemul de bază trebuie considerat în $n+1$ situații de încărcare. Primele n situații corespund încărcării succesive cu sarcinile-unitate $X_1=1$, ... $X_n=1$, iar ultima corespunde încărcării cu sarcinile date. Pentru fiecare situație se trasează diagramele de eforturi, cu ajutorul cărora se pot calcula coeficienții și termenii liberi.

Cînd se consideră și efectul *variațiilor de temperatură*, termenul liber respectiv se calculează cu expresia (8.20), anume

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha \Delta t}{d} \int m_{xi} ds + \sum \alpha t \int n_{xi} ds, \tag{9.7}$$

unde intervin diagramele unitare m_{xi} și n_{xi} date de sarcina-unitate $X_i=1$ aplicată pe sistemul de bază. Se va ține seama de cele precizate anterior în legătură cu semnele integralelor. Pentru termenii liberi care corespund *cedărilor de reazeme*, se utilizează expresia (8.22) sub forma

$$\Delta_{ic} = -\sum \bar{r}_i \Delta_r, \tag{9.8}$$

unde Δ_r sînt cedări de reazeme ale structurii date, iar $\bar{r}_i$ sînt reacțiunile sistemului de bază — pe direcțiile cedărilor — pentru situația de încărcare cu $X_i=1$. Semnele produselor rezultă din concordanța sau neconcordanța sensurilor lui $\bar{r}_i$ și respectiv Δ_r.

b. **Cazuri cînd pe direcțiile necunoscutelor intervin deplasări.** La stabilirea ecuațiilor (9.4) s-a admis că, în structura dată, pentru oricare dintre legăturile suplimentare considerate există $\Delta_i = 0$. Se pot însă întîlni și cazuri cînd $\Delta_i \neq 0$, deci cînd membrul al doilea al ecuațiilor nu este nul. În continuare sînt examinate două situații caracteristice de acest fel.

(1) La introducerea în ecuații a efectului cedărilor de reazeme trebuie considerat și cazul cînd necunoscuta X_i este o reacțiune dintr-o rezemare,

iar pe direcția sa se produce o cedare *de mărime cunoscută* Δ_{ri}. În acest caz, $\Delta_i = \Delta_{ri}$ și ecuația de condiție corespunzătoare va avea forma

$$\delta_{i1}X_1 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{in}X_n + \Delta_{is} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = \Delta_{ri},$$

care se mai poate scrie

$$\delta_{i1}X_1 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{in}X_n + \Delta_{is} + \Delta_{it} + \Delta'_{ic} = 0, \tag{9.9}$$

unde s-a notat $\Delta'_{ic} = \Delta_{ic} - \Delta_{ri}$. Trebuie ținut seama că termenul liber Δ_{ic} reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei X_i, cînd în sistemul de bază se consideră numai cedările Δ_r pe direcțiile *reacțiunilor* $\overline{r}_i$ datorite sarcinii-unitate $X_i = 1$. Termenul liber corectat Δ'_{ic}, care apare în ecuația (9.9), are expresia

$$\Delta'_{ic} = \Delta_{ic} - \Delta_{ri} = -\sum \overline{r}_i \Delta_r - \overline{1} \cdot \Delta_{ri} = -\sum \overline{R}_i \Delta_r, \tag{9.10}$$

unde cu $\overline{R}_i$ s-a notat *grupul de forțe în echilibru format din sarcina-unitate* $X_i = 1$ *și reacțiunile pe care aceasta le dă în sistemul de bază*, iar cu Δ_r s-au notat cedările de reazeme pe direcțiile acestor forțe. Introducînd termenul liber corectat (9.10), în locul termenului liber (9.8), ecuațiile de condiție își păstrează forma (9.4) cu membrul al doilea nul.

(2) La structuri cu *tiranți* apar deplasări $\Delta_i \neq 0$ cu caracter elastic, cînd pentru trecerea la sistemul de bază se consideră tirantul *suprimat* și înlocuit cu o pereche de forțe aplicate în nodurile de la extremități (fig. 136, *a*). În acest caz, pe direcția necunoscutei X_i se produce o deplasare, datorită lungirii tirantului, de mărime

$$\Delta_i = \Delta l_t = X_i l_t / E_t A_t = X_i \varrho_t, \tag{9.11}$$

unde s-a notat cu $\varrho_t = l_t / E_t A_t$ caracteristica de deformabilitate a tirantului (lungire sub efort axial egal cu unitatea). Trebuie ținut seama că sarcina-unitate $X_i = 1$ (fig. 136, *b*) indică drept sens pozitiv pentru Δ_i micșorarea distanței dintre nodurile *b* și *d*, în timp ce sensul necunoscutei X_i (fig. 136, *a*)

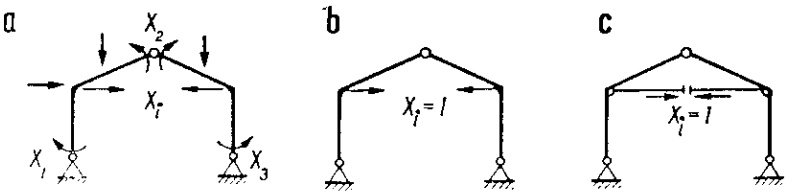


Fig. 136

corespunde unui efort de întindere, și deci conduce la o lungire $\Delta l_t = X_i \varrho_t$ a tirantului. Ecuația respectivă se va scrie deci

$$\delta_{i1}X_1 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{in}X_n + \Delta_{is} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = -X_i \varrho_t,$$

care poate fi pusă sub forma

$$\delta_{i1}X_1 + \cdots + (\delta_{ii} + \varrho_t)X_i + \cdots + \delta_{in}X_n + \Delta_{is} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = 0, \tag{9.12}$$

unde s-au strîns la un loc termenii conținînd pe X_i.

Trecerea la sistemul de bază se poate face și prin *secționarea tirantului* (acesta are numai efort axial), menținîndu-l în sistemul de bază (fig. 136, *c*). De data aceasta $\Delta_i=0$, și deci nu mai apare membrul al doilea al ecuației, dar la alcătuirea coeficientului necunoscutei X_i trebuie să se țină seama și de efortul axial din tirant, produs de necunoscuta-unitate $X_i=1$ în situația auxiliară. Deplasarea unitară totală pe direcția acestei necunoscute se compune din două părți: partea δ_{ii}, care este aceeași ca și în cazul sistemului de bază din figura 136, *a*, și partea ρ_t care provine de la tirant. Se regăsește astfel forma (9.12) a ecuației de condiție.

c. **Observații asupra ecuațiilor de condiție.** Din examinarea sistemului ecuațiilor de condiție (9.4) se desprind anumite constatări importante:

(1) Coeficienții necunoscutelor sînt deplasări unitare, care provin de la situațiile auxiliare de încărcare cu sarcinile-unitate $X_i=1$, astfel că depind numai de caracteristicile structurii date și de sistemul de bază ales. Sarcinile, variațiile de temperatură etc., intervin în ecuații prin termenii liberi respectivi. Înseamnă că, în calculul unei anumite structuri pentru mai multe situații de încărcare, ecuațiile de condiție sînt mereu aceleași, cu excepția termenilor liberi care se stabilesc pentru fiecare situație de încărcare în parte.

Se pot distinge două categorii de coeficienți: coeficienți principali de forma δ_{ii} și coeficienți secundari de forma δ_{ij}. Coeficientul principal δ_{ii} reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei X_i cînd sistemul de bază este încărcat cu sarcina-unitate respectivă ($X_i=1$). Un astfel de coeficient este totdeauna diferit de zero și pozitiv, deoarece deplasarea se produce pe direcția și în sensul de acțiune al sarcinii-unitate. Coeficienții de forma δ_{ii} aparțin necunoscutei principale din fiecare ecuație, astfel că în matricea coeficienților ei sînt așezați pe diagonala principală. Un coeficient secundar δ_{ij} reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei X_i cînd sistemul de bază este încărcat cu o altă necunoscută-unitate ($X_j=1$); acești coeficienți pot fi pozitivi, negativi sau chiar nuli, totul depinzînd de diagramele unitare m_{xi} și m_{xj}, n_{xi} și n_{xj}, ..., deci de sistemul de bază ales. Această constatare stă la baza posibilităților de simplificare a ecuațiilor de condiție, care vor fi examinate mai departe.

Datorită reciprocității deplasărilor unitare $\delta_{ij}=\delta_{ji}$, coeficienții secundari rezultă doi cîte doi egali, simetric așezați față de diagonala principală; matricea coeficienților este deci o matrice simetrică, ceea ce reprezintă un avantaj pentru rezolvare.

(2) O proprietate importantă a ecuațiilor de condiție: determinantul matricei coeficienților $D[\delta]$ este totdeauna *diferit de zero*; mai mult încă, s-a demonstrat că în toate cazurile $D>0$. Justificarea condiției $D\neq 0$ se poate face în modul următor, admițînd că poziția deformată se încadrează în domeniul micilor deplasări și deci că ecuațiile de echilibru se raportează la poziția inițială. Se consideră structura *neîncărcată*; termenii liberi sînt deci nuli astfel că se obține un sistem de ecuații omogene de forma

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Dacă $D\neq 0$, ecuațiile sînt satisfăcute numai cînd toate necunoscutele sînt nule, ceea ce concordă cu situația de neîncărcare a structurii. Dacă $D=0$, ecuațiile

omogene pot admite și alte serii de valori pentru necunoscute, diferite de zero. Fie o asemenea serie de valori $X_1', \ldots, X_n'$, pe care le considerăm aplicate ca acțiuni exterioare asupra sistemului de bază. Ecuațiile exprimă — pentru această situație de încărcare — că deplasările pe direcțiile necunoscutelor sînt nule; înseamnă că și lucrul mecanic exterior este nul, deoarece asupra sistemului de bază acționează numai necunoscutele. În consecință, lucrul mecanic interior este de asemnea nul (nu variază energia potențială a structurii), ceea ce ar însemna că nu se produce nici o deformare. Aceasta este imposibil, deoarece sistemul de bază este încărcat cu necunoscute diferite de zero. Nu se poate deci ca $D=0$.

Concluzia $D\neq 0$ arată că prin rezolvarea ecuațiilor de condiție (9.4) se obține întotdeauna o singură serie de valori pentru necunoscute. Înseamnă că pentru o structură dată și pentru o acțiune exterioară dată, rezolvarea sistemului static nedeterminat conduce la o soluție *unică* a distribuției eforturilor.

(3) În expresiile coeficienților și ale termenilor liberi intervin caracteristicile de dimensionare ale barelor structurii (I, A). Înseamnă că pentru rezolvarea unei structuri static nedeterminate trebuie să se cunoască de la început dimensiunile secțiunilor, adică tocmai elementele în vederea stabilirii cărora efectuăm de fapt rezolvarea. Dificultatea se ocolește folosind inițial o *predimensionare*, admisă pe baza experienței de proiectare sau a unor exemple similare rezolvate. La sfîrșit, aprecierile făcute trebuie confruntate cu dimensionarea rezultată din calcul, deoarece în caz de neconcordanță vădită rezolvarea trebuie reluată.

Dependența mărimii coeficienților și a termenilor liberi de dimensiunile barelor structurii are o importanță deosebită, deoarece o modificare neproporțională a acestor dimensiuni duce la alte mărimi pentru necunoscutele static nedeterminate, și deci la o *modificare a distribuției eforturilor în structură*. La o aceeași configurație geometrică și pentru aceleași sarcini, dacă se modifică distribuția materialului din structură prin modificarea secțiunilor, se obțin diagrame de eforturi diferite. Aceasta permite proiectantului să stăpînească distribuția eforturilor, adaptînd-o cerințelor unei soluționări cît mai economice a structurii.

Privitor la modulul de elasticitate, care intervine în expresiile coeficienților și ale termenilor liberi, acesta poate fi eliminat la structuri făcute din același material și acționate de sarcini, prin multiplicarea cu E a ecuațiilor. Înseamnă că *distribuția eforturilor rămîne aceeași*, oricare ar fi materialul omogen și perfect elastic utilizat. Această concluzie nu este valabilă pentru variații de temperatură sau pentru cedări de reazeme, unde E nu mai poate fi eliminat.

2. Determinarea diagramelor de eforturi

a. **Verificarea ecuațiilor de condiție.** Înainte de a trece la rezolvarea sistemului de ecuații, este indicat să se facă o verificare a coeficienților și a termenilor liberi; se pot prinde astfel fie erorile comise la trasarea diagramelor unitare, fie cele intervenite la aplicarea expresiilor (9.5) și (9.6).

Pornind de la sistemul de ecuații (9.4) și făcînd suma coeficienților în una dintre ecuații, de exemplu în ecuația curentă i, se obține

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \int m_{xi} m_{xj} \frac{ds}{EI} = \int m_{xi} (m_{x1} + \ldots + m_{xj} + \ldots + m_{xn}) \frac{ds}{EI},$$

unde se poate introduce notația

$$m_{xt} = m_{x1} + \ldots + m_{xj} + \ldots + m_{xn}, \tag{9.13}$$

care reprezintă ordonata diagramei de momente încovoietoare a sistemului de bază, *încărcat concomitent cu toate sarcinile-unitate corespunzătoare necunoscutelor* X_1, ..., X_n. Rezultă

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \int m_{xi} m_{xt} \frac{ds}{EI} \tag{9.14}$$

și deci suma coeficienților poate fi calculată direct cu ajutorul diagramelor m_{xi} și m_{xt}.

Suma tuturor coeficienților din toate ecuațiile de condiție este

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \int m_{xi} m_{xt} \frac{ds}{EI} = \int m_{xt} (m_{x1} + \ldots + m_{xj} + \ldots + m_{xn}) \frac{ds}{EI},$$

unde în paranteză a apărut iarăși diagrama totală m_{xt}, astfel că se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \int m_{xt}^2 \frac{ds}{EI} \tag{9.15}$$

și deci suma tuturor coeficienților sistemului de ecuații poate fi calculată direct numai cu ajutorul acestei diagrame.

În mod asemănător se obține pentru suma termenilor liberi

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_{is} = \sum_{i=1}^{n} \int M_{xs} m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int M_{xs} m_{xt} \frac{ds}{EI}, \tag{9.16}$$

unde de asemenea intervine diagrama m_{xt}.

Expresiile (9.14)—(9.16) indică modul de verificare a ecuațiilor de condiție. Elementul de bază constă în trasarea diagramei m_{xt}; această diagramă trebuie executată *independent* de diagramele unitare m_{x1}, ..., m_{xn}, spre a nu fi influențată de eventuale erori comise la construirea acestora. Verificarea se conduce astfel:

— Se face suma tuturor coeficienților sistemului de ecuații și se compară cu rezultatul dat de expresia (9.15), integrînd diagrama m_{xt} cu ea însăși. În caz de neconcordanță trebuie trecut la verificarea separată a fiecărei ecuații.

— Într-o ecuație oarecare i se face suma coeficienților și se compară cu rezultatul dat de expresia (9.14), integrînd diagrama m_{xt} cu diagrama unitară m_{xi} corespunzătoare sarcinii-unitate $X_i = 1$. În caz de neconcordanță trebuie verificat separat fiecare coeficient spre a se găsi eroarea.

— Se face suma termenilor liberi Δ_{is} și se compară cu rezultatul dat de expresia (9.16), integrînd diagrama m_{xt} cu diagrama M_{xs} dată de sarcini; dacă nu concordă, se verifică separat fiecare termen liber.

b. **Rezolvarea ecuațiilor și trasarea diagramelor de eforturi.** Ecuațiile de condiție formează un sistem de ecuații liniare, a căror rezolvare se face după metodele cunoscute din Matematică, folosind forme sistematizate de operare. Se știe că sînt două căi principale mai importante[1]:

(1) Rezolvarea prin *substituție*, cale cu caracter general ce nu impune condiții restrictive sistemului de ecuații care trebuie rezolvat. În esență, se urmărește eliminarea succesivă a cîte unei necunoscute, pînă se ajunge la o ecuație cu o singură necunoscută. Modul sistematizat de aplicare este cunoscut sub denumirea de *algoritmul lui Gauss*, care conduce la un sistem redus de ecuații (prima ecuație are n necunoscute, a doua ecuație are $n-1$ necunoscute etc.), din care mărimile necunoscutelor pot fi aflate succesiv trecînd de la ultima ecuație spre prima. Conducerea rezolvării se face într-un tablou, cu posibilități de verificare pe parcurs. Această cale de rezolvare a ecuațiilor de condiție se utilizează curent în metoda eforturilor.

(2) Rezolvarea prin *iterație* (aproximații succesive), în care fiecare necunoscută se obține sub forma sumei unui șir de termeni. Șirul trebuie să fie convergent, iar pentru o aplicare practică avantajoasă este necesară o rapiditate satisfăcătoare a convergenței, spre a se ajunge la aproximația dorită cu reținerea unui număr cît mai redus de termeni ai șirului. Aceste cerințe impun condiții restrictive sistemului de ecuații (îndeplinirea anumitor criterii de convergență), care sînt îndeplinite numai la anumite categorii particulare de structuri. O aplicare largă a acestui mod de rezolvare se va întîlni la metoda deplasărilor.

O altă cale, aplicabilă prin calcul manual numai în cazuri simple, dar larg folosită cînd se utilizează calculul automatizat, are la bază inversarea matricei coeficienților[2]. Pentru sistemul ecuațiilor de condiție din metoda eforturilor rezolvarea are forma

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}_s=0 \text{ și deci } \mathbf{X}=-\boldsymbol{\delta}^{-1}\boldsymbol{\Delta}_s,$$

astfel că matricea-coloană a necunoscutelor $X_1, \ldots X_n$ se obține direct prin multiplicarea inversei matricei pătrate $\boldsymbol{\delta}$ a coeficienților cu matricea-coloană a termenilor liberi $\Delta_{1s}, \ldots \Delta_{ns}$.

O dată aflate mărimile necunoscutelor $X_1, \ldots, X_n$, se trece la trasarea diagramelor de eforturi; operația se face pe sistemul de bază, folosind diagramele parțiale.

Diagrama M se construiește prin *suprapunere*, conform relației $M_x=M_{xs}+\Sigma X_i m_{xi}$. Această suprapunere se efectuează pentru ordonatele caracteristice ale diagramei, și anume în secțiunile de la capetele barelor; se unesc apoi prin linii drepte vîrfurile ordonatelor respective. Pe barele neîncărcate, aceste linii dau chiar conturul diagramei; pe barele încărcate, ele servesc drept axe de referință, de la care se măsoară ordonatele diagramelor M_x^0 (corespunzătoare barelor considerate ca simplu rezemate), cum se arată în figura 137, *b*. Pentru o bară

---

[1] O examinare mai detaliată a acestor căi principale de rezolvare este dată în S.C. – 2, capitolul III.

[2] Unele procedee pentru inversarea matricelor sînt examinate în Anexa de la sfîrșitul volumului.

încărcată, situația este ca în figura 137, *a*; momentul încovoietor din secțiunea curentă se scrie sub forma

$$M_x = M_x^0 + M_j \cdot (l-x)/l + M_k \cdot x/l = M_x^0 + M_j + (M_k - M_j) \cdot x/l, \qquad (9.17)$$

expresie cu care se pot calcula ordonate intermediare. Un control al suprapunerii se obține verificînd echilibrul în toate nodurile cu mai mult de două bare (fig. 137, *c*).

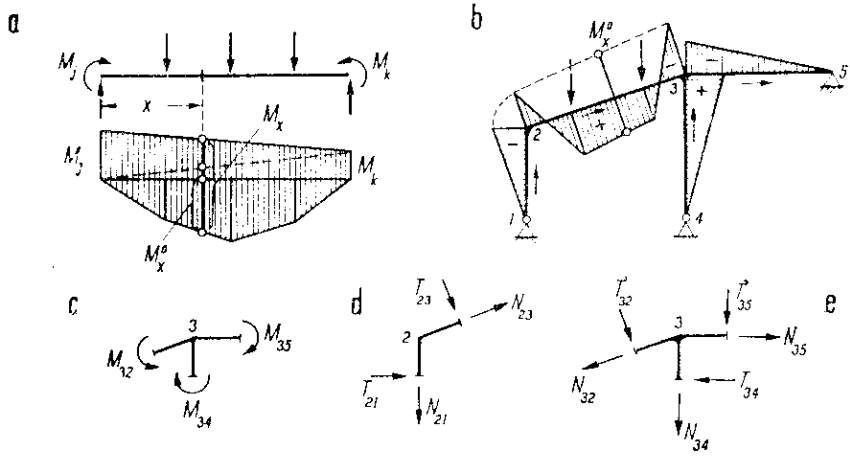


Fig. 137

Diagrama T poate fi obținută direct din diagrama *M*, pe baza relațiilor cunoscute de legătură dintre aceste două diagrame. Pentru bara *j-k*, din relația (9.17) rezultă

$$T_x = \mathrm{d}M_x/\mathrm{d}x = \mathrm{d}M_x^0/\mathrm{d}x + (M_k - M_j)/l = T_x^0 + (M_k - M_j)/l, \qquad (9.18)$$

unde M_j și M_k trebuie introduse cu semnele lor. Cel de-al doilea termen aduce o corecție, reprezentată prin deplasarea axei de referință a diagramei T_x^0, paralel cu ea însăși, cu cantitatea $(M_k - M_j)/l$. Semnele se stabilesc în raport cu sensul de parcurgere ales pentru bară.

Diagrama N se determină obișnuit cu ajutorul diagramei *T*, utilizînd condiția de echilibru a nodurilor. Se pornește de la noduri unde se întîlnesc numai două bare (fig. 137, *d*). Cunoscînd forțele tăietoare de pe fețele secțiunilor alăturate nodurilor și admițînd inițial forțe axiale pozitive, se aplică nodului izolat cele două ecuații de echilibru prin proiecții; se determină astfel — ca sens și mărime — forțele axiale din secțiunile considerate. Cînd se ajunge la un nod cu mai multe bare, o parte din forțele axiale trebuie să fie cunoscute de la nodurile precedent examinate (fig. 137,*e*), deoarece la fiecare nod al unei structuri plane se pot determina numai două necunoscute de acest fel.

Este util de remarcat că, o dată cu suprapunerea diagramelor M_{as} și $m_{x_1}X_1$, ..., $m_{xn}X_n$, se poate efectua și suprapunerea reacțiunilor corespunzătoare, obținînd reacțiunile structurii static nedeterminate. În acest caz, situația de echi-

libru a forțelor exterioare (sarcini și reacțiuni) poate servi la determinarea directă a diagramelor totale T și N.

c. **Verificarea diagramelor.** După trasarea diagramelor totale de eforturi este esențial să se facă un control al exactității rezultatelor. În acest scop se utilizează cele două condiții care caracterizează situația de echilibru elastic a structurii: condiția de echilibru static și condiția de compatibilitate a deformației. Rămîne de stabilit modul de verificare, precum și părțile de rezolvare pe care le controlează fiecare din aceste condiții.

Controlul echilibrului static se face mai întîi la noduri, verificînd că suma momentelor încovoietoare din toate secțiunile barelor care vin în nod este nulă. De asemenea, se controlează echilibrul diferitelor porțiuni din structură, izolînd — prin secționare — porțiunile respective și aplicînd asupra lor sarcinile care le revin, precum și eforturile din secționările făcute. Verificările de acest fel controlează însă *numai efectuarea corectă a suprapunerilor*. Într-adevăr, diagrama M_x și diagramele unitare m_{x1}, ... m_{xn} utilizate la trasarea diagramelor totale, satisfac fiecare în parte condiția de echilibru static. Executarea lor corectă a fost verificată o dată cu verificarea coeficienților și a termenilor liberi din ecuațiile de condiție cu ajutorul diagramei m_{xt} definită de relația (9.13). Suprapunerea trebuie deci să satisfacă condiția de echilibru static oricare ar fi mărimile necunoscutelor X_1, ..., X_n.

Înseamnă că verificarea propriu-zisă a rezolvării structurii static nedeterminate, care se referă tocmai la controlul determinării corecte a mărimilor necunoscutelor, *trebuie făcută pe baza condiției de compatibilitate*, asemănător modului cum s-au scris și ecuațiile de condiție. *Folosind diagramele totale de eforturi, se calculează anumite deplasări care în structura reală sînt nule, sau au mărimi cunoscute.* Teoretic, pentru eficiența verificării trebuie calculat un număr de deplasări egal cu gradul de nedeterminare statică; deplasările se pot considera în reazeme sau în alte secțiuni ale structurii. Astfel, pentru cadrul din figura 135, *a*, se poate controla că în articulația *a* nu există deplasare pe orizontală, sau că în secțiunea *b* nu există rotire relativă între fețele secțiunii etc.

Pentru calculul unei asemenea deplasări se consideră situația reală caracterizată prin diagramele totale de eforturi, împreună cu o situație auxiliară de încărcare rezultată prin suprimarea legăturii respective și aplicarea pe direcția sa a sarcinii-unitate corespunzătoare; situația auxiliară este deci de $n-1$ ori static nedeterminată. La efectuarea calculului sînt posibile simplificări importante, cum se arată în paragraful care urmează.

3. Calculul deplasărilor la structuri static nedeterminate

a. **Cazul încărcării cu sarcini.** Atît expresia generală a deplasărilor (8.13), cît și forma particularizată dată de formula Maxwell-Mohr pentru încărcarea cu sarcini

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int N_x n_{xi} \frac{ds}{EA} + \ldots,$$

sînt aplicabile oricărei structuri, static determinată sau static nedeterminată. La structuri static nedeterminate, diagramele totale M_x, N_x, ... sînt cunoscute cînd calculul deplasărilor se face după ridicarea nedeterminării statice și trasarea diagramelor de eforturi. Dificultatea apare la diagramele unitare m_{xi}, n_{xi}, ..., care sînt specifice deplasării căutate și trebuie special construite pentru calculul acesteia. Trasarea diagramelor unitare implică însă rezolvarea structurii static nedeterminate pentru încărcarea cu sarcina-unitate respectivă. Cînd sînt de calculat mai multe deplasări, ar trebui făcută cîte o astfel de rezolvare pentru fiecare dintre ele, ceea ce desigur ar fi excesiv. Există posibilitatea de a se evita asemenea dificultăți.

Fie o structură oarecare (fig. 138, *a*), la care trebuie calculată o anumită deplasare Δ_i produsă de sarcinile date. Pentru simplificarea scrierii se reține în expresie numai prima integrală. Diagrama M_x a structurii static nedeterminate este dată în figura 138, *b*. Admițînd că la rezolvarea structurii s-a folosit sistemul de bază din figura 138, *d*, se poate scrie

$$M_x = M_{x0} + m_{x1}X_1 + \ldots + m_{xn}X_n. \qquad (a)$$

Situația auxiliară de încărcare se vede în figura 138, *c*. La rezolvarea acesteia se poate folosi același sistem de bază (fig. 138, *e*), modificînd în ecuațiile de

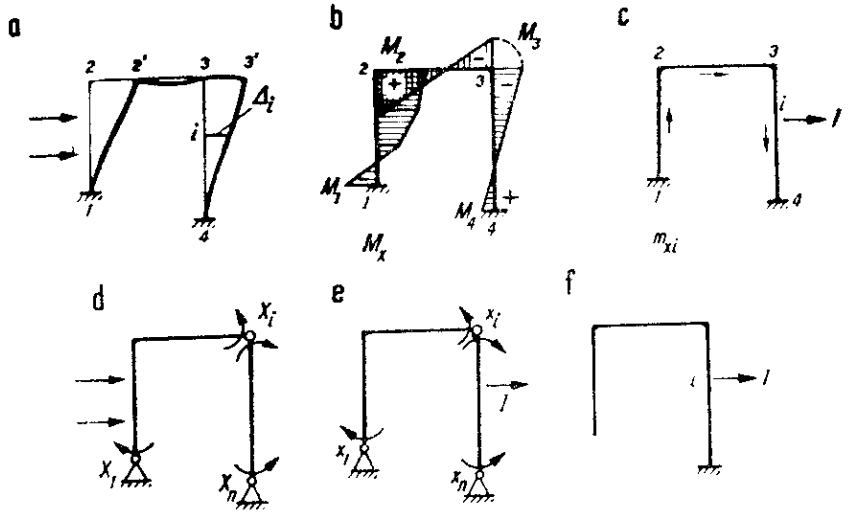


Fig. 138

condiție numai termenii liberi. Vor rezulta pentru necunoscute alte valori x_1, ..., x_n și ordonata curentă a diagramei m_{xi} va avea expresia

$$m_{xi} = m^0_{xi} + m_{x1}x_1 + \ldots + m_{xn}x_n, \qquad (b)$$

unde m^0_{xi} este diagrama dată pe sistemul de bază de sarcina-unitate aplicată pe direcția deplasării Δ_i.

În continuare, se poate proceda în două moduri:

(1) Introducînd în expresia deplasării elastice relația (b), se obține

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int M_x m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + x_1 \int M_x m_{x1} \frac{ds}{EI} + \ldots + x_n \int M_x m_{xn} \frac{ds}{EI}.$$

Se constată însă că

$$\int M_x m_{x1} \frac{ds}{EI} = 0, \quad \int M_x m_{x2} \frac{ds}{EI} = 0, \quad \ldots \int M_x m_{xn} \frac{ds}{EI} = 0,$$

deoarece aceste integrale reprezintă deplasările totale pe direcțiile necunoscutelor $X_1, \ldots, X_n$, în structura static nedeterminată încărcată cu sarcinile date (fig. 138, *a*) și caracterizată de diagrama M_x, care sînt nule datorită continuității. Dacă în aceste integrale se înlocuiește M_x prin expresia (a), se regăsesc chiar ecuațiile de condiție care au servit la determinarea necunoscutelor $X_1, \ldots, X_n$. Expresia deplasării devine deci

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int M_x m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} \tag{9.19}$$

și arată că *diagrama unitară din situația auxiliară de încărcare poate fi trasată de sistemul static determinat de bază*, în loc de a fi trasată pe structura dată. Acest rezultat simplifică considerabil calculul, deoarece elimină necesitatea unei noi rezolvări a structurii static nedeterminate.

Aceeași concluzie poate fi găsită și direct, utilizînd ideea de bază a metodei eforturilor. Structura dată (fig. 138, *a*) se înlocuiește în calcul printr-un sistem echivalent (fig. 138, *d*), reprezentat de sistemul de bază încărcat cu sarcini și cu necunoscutele static nedeterminate. Mărimile necunoscutelor se determină din condiția de identitate de deformată a sistemului echivalent cu structura dată. Înseamnă că orice deplasare elastică a structurii se regăsește în sistemul echivalent, și deci calculul ei poate fi făcut pe acest sistem. Aici, diagrama M_x este dată de totalitatea încărcărilor care acționează pe sistemul static determinat (sarcini și cantități $X_1, \ldots, X_n$). În situația auxiliară de încărcare, sarcina-unitate corespunzătoare deplasării trebuie aplicată pe același sistem, astfel că rezultă diagrama unitară m_{xi}^0. Se regăsește astfel expresia (9.19).

(2) Introducînd în expresia deplasării elastice relația (a), se obține

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int M_{xs} m_{xi} \frac{ds}{EI} + X_1 \int m_{x1} m_{xi} \frac{ds}{EI} + \ldots + X_n \int m_{xn} m_{xi} \frac{ds}{EI},$$

unde m_{xi} corespunde structurii static nedeterminate. Se constată și aici că

$$\int m_{x1} m_{xi} \frac{ds}{EI} = 0, \quad \int m_{x2} m_{xi} \frac{ds}{EI} = 0, \quad \ldots \int m_{xn} m_{xi} \frac{ds}{EI} = 0,$$

deoarece aceste integrale reprezintă deplasările totale pe direcțiile necunoscutelor $x_1, \ldots, x_n$, în structura static nedeterminată încărcată cu sarcina-unitate corespunzătoare deplasării Δ_i (fig. 138, *c*). Dacă în aceste integrale se

înlocuiește m_{xi} prin expresia (b), se regăsesc chiar ecuațiile de condiție care au servit la determinarea necunoscutelor $x_1, \ldots x_n$. Expresia deplasării devine

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int M_{xs} m_{xi} \frac{ds}{EI}. \tag{9.20}$$

și deci deplasarea poate fi calculată folosind *diagrama M_{xs} dată de sarcini pe sistemul static determinat de bază*, cu condiția ca diagrama m_{xi} din situația auxiliară să corespundă structurii statice nedeterminate.

Comparînd relațiile (9.19) și (9.20), se ajunge la concluzia generală că expresia deplasărilor elastice la structuri statice nedeterminate poate fi aplicată sub formele

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + \int N_x n_{xi}^0 \frac{ds}{EA} + \ldots = \int M_{xs} m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int N_{xs} n_{xi} \frac{ds}{EA} + \ldots \tag{9.21}$$

Deci *este suficient să se traseze pe structura static nedeterminată numai o singură serie de diagrame, fie M_x, N_x, ... sau m_{xi}, n_{xi}, ..., urmînd ca cealaltă serie să se traseze pentru sistemul static determinat de bază*[1]. Deoarece alegerea sistemului de bază poate fi făcută arbitrar, înseamnă că cealaltă serie de diagrame se poate trasa *pe orice sistem static determinat* obținut din structura dată prin suprimarea numărului corespunzător de legături. Se va da desigur preferință acelui sistem care conduce la diagrame cît mai simple, de exemplu sistemul de bază din figura 138, f pentru deplasarea Δ_i. Cînd sînt de calculat mai multe deplasări elastice la aceeași structură, se poate alege pentru fiecare sistemul static determinat cel mai avantajos în cazul respectiv.

Dintre cele două forme ale expresiei (9.21), prima este cea care are largă aplicare practică, deoarece corespunde situației uzuale, cînd calculul deplasărilor se face după rezolvarea structurii static nedeterminate. Forma a doua poate fi avantajoasă cînd la aplicarea metodei eforturilor se utilizează sisteme de bază static nedeterminate, cum se arată mai departe.

b. **Cazul încărcării cu variații de temperatură sau cu cedări de reazeme.** Calculul deplasărilor se face asemănător, dar aici intervine o deosebire care trebuie reținută. Se va ține seama că, la o structură static nedeterminată, mărimea totală a unei deplasări poate fi privită ca alcătuită din *două* părți. Pentru claritate, să revenim la încărcarea cu sarcini și să scriem expresia (a) sub forma (9.2), anume

$$M_x = M_{xs} + M_x^{(n)},$$

unde $M_x^{(n)} = m_{x1} X_1 + \ldots + m_{xn} X_n$ reprezintă partea de moment încovoietor dată de necunoscutele suplimentare, iar M_{xs} este partea dată de sarcini, ambele pe sistemul de bază. Expresia deplasării devine

$$\Delta_i = \int M_x m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} = \int M_{xs} m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + \int M_x^{(n)} m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} = \Delta_{is} + \Delta_i^{(n)},$$

[1] Cînd la calculul deplasării Δ_i se reține și alte integrale decît cea corespunzătoare solicitării dominante, expresia simplificată (9.21) este valabilă numai dacă aceleași integrale au fost reținute și la calculul coeficienților și termenilor liberi din ecuațiile de condiție ce au servit la determinarea diagramelor pe structura static nedeterminată.

unde apar cele două componente ale deplasării totale Δ_i: Δ_{is} este deplasarea în sistemul de bază dată de acțiunea sarcinilor, iar $\Delta_i^{(n)}$ — deplasarea dată în același sistem de acțiunea necunoscutelor suplimentare X_1, ..., X_n.

Trecînd la celelalte moduri de încărcare, este cunoscut că variațiile de temperatură și cedările de reazeme *nu produc eforturi* în sistemul static determinat de bază, dar produc deplasările Δ_{it} sau Δ_{ic} care se calculează cu expresiile (9.7) și respectiv (9.8). Necunoscutele suplimentare corespunzătoare vor da diagramele de eforturi $M_x^{(n)}$, $N_x^{(n)}$, ..., care sînt chiar diagramele finale în acest caz și acestora le vor corespunde deplasările $\Delta_i^{(n)}$. Deplasarea totală Δ_i va fi deci compusă tot din două părți, prima datorită cauzei care acționează structura, iar a doua datorită necunoscutelor suplimentare, ambele aplicate pe sistemul de bază. Astfel, pentru variații de temperatură rezultă

$$\Delta_i = \Delta_{it} + \Delta_i^{(n)} =$$

$$= \sum \alpha \Delta t \int m_{xi}^0 \frac{ds}{d} + \sum \alpha t \int n_{xi}^0 \, ds + \int M_x^{(n)} m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + \int N_x^{(n)} n_{xi}^0 \frac{ds}{EA} + \ldots, \quad (9.22)$$

iar pentru cedări de reazeme

$$\Delta_i = \Delta_{ic} + \Delta_i^{(n)} = -\sum r_i \cdot \Delta_i + \int M_x^{(n)} m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + \int N_x^{(n)} n_{xi}^0 \frac{ds}{EA} + \ldots, \quad (9.23)$$

unde se vor reține numai integralele necesare, în funcție de tipul structurii.

Și în aceste cazuri, diagramele m_{xi}^0, n_{xi}^0, ... din situația auxiliară de încărcare pot fi trasate pe *orice* sistem static determinat care se poate obține din structura dată. Cînd se trece de la un sistem de bază la altul, mărimile celor două părți ale deplasării se modifică, dar suma lor rămîne aceeași.

4. Utilizarea sistemelor de baza static nedeterminate

În cele ce precedă s-au folosit totdeauna sisteme de bază static determinate. Aceasta este desigur cazul uzual, deoarece sistemul de bază trebuie să aibă rezolvare cunoscută. În specificul metodei eforturilor, unde trecerea la sistemul de bază se face prin suprimare de legături, nu este însă necesar ca numărul legăturilor suprimate să fie egal cu gradul de nedeterminare statică. Se poate lua ca sistem de bază și un sistem static nedeterminat, sau un sistem în a cărui alcătuire rămîn părți static nedeterminate, în cazul în care rezolvarea acestora este cunoscută.

Se folosesc în acest scop rezultate obținute anterior la rezolvarea unor structuri mai simple, sau se utilizează memoratoare în care se găsesc formule gata calculate pentru unele structuri static nedeterminate uzuale, supuse la diferite încărcări. În acest mod se suprimă mai puține legături în structura dată, și deci rezolvarea devine mai avantajoasă prin reducerea numărului de necunoscute, respectiv a numărului ecuațiilor de condiție. Astfel, la cadrul de cinci ori static nedeterminat din figura 139, *a*, se constată că în alcătuirea sa există conturul *1-2-3-4* care — privit separat — este un cadru dublu încastrat curent

întîlnit și a cărui rezolvare, pentru diferite încărcări, se găsește în orice memorator de specialitate. Dacă acest cadru, care este de trei ori static nedeterminat, se păstrează intact în sistemul de bază, înseamnă că rămîn de suprimat numai două legături și se introduc numai două necunoscute. În figurile 139,*b* și *c* sînt arătate două sisteme de bază obținute în acest fel. Trasarea diagramei M_{xs} și a diagramelor unitare se face direct pentru porțiunea static determi-

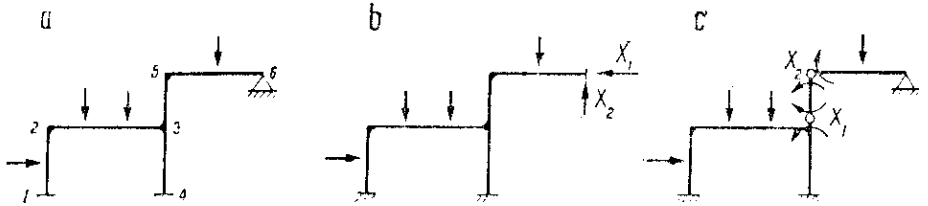


Fig. 139

nată și cu ajutorul rezultatelor gata calculate pentru porțiunea static nedeterminată.

Modul de aplicare a metodei eforturilor rămîne același. Astfel, ecuația corespunzătoare necunoscutei X_i are forma

$$\delta_{i1}X_1 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{ip}X_p + \Delta_{is} = 0,$$

unde coeficienții necunoscutelor și termenii liberi reprezintă deplasări elastice în sistemul de bază static nedeterminat. La calculul acestora trebuie ținut seama de cele discutate în legătură cu figura 138, folosind expresia generală (9.21). Astfel, expresiile coeficienților au forma

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \int m_{xi} m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + \cdots \\ \delta_{ij} &= \delta_{ji} = \int m_{xi} m_{xj}^0 \frac{ds}{EI} + \cdots = \int m_{xi}^0 m_{xj} \frac{ds}{EI} + \cdots \end{aligned} \tag{9.24}$$

iar pentru termenii liberi se pot folosi expresiile

$$\Delta_{is} = \int M_{xs} m_{xi}^0 \frac{ds}{EI} + \cdots = \int M_{xs}^0 m_{xi} \frac{ds}{EI} + \cdots \tag{9.25}$$

unde M_{xs} reprezintă diagrama dată de sarcini pe sistemul de bază static nedeterminat, iar M_{xs}^0 reprezintă diagrama dată de sarcini pe un sistem static determinat oarecare, obținut din structura dată prin suprimarea a n legături. Semnificații similare au diagramele m_{xi} și m_{xi}^0. În fiecare integrală, *numai una dintre diagrame se trasează pe sistemul de bază static nedeterminat.*

Diagramele m_{xi}^0, m_{xj}^0, ..., precum și M_{xs}^0, pot fi construite pe același sistem static determinat, sau pe sisteme static determinate diferite, după cum este mai avantajos pentru obținerea de diagrame simple. Tocmai simplicitatea acestor diagrame justifică aici aplicarea relațiilor (9.24), unde m_{xi}^0, m_{xj}^0, ...

înlocuiesc pe m_{xi}, m_{xj}, ... în expresiile deplasărilor elastice, ca diagrame corespunzătoare situațiilor auxiliare de încărcare. Diagramele m_{xi}, m_{xj} sînt totdeauna mai complicate, deoarece sînt trasate pe sistemul de bază static nedeterminat.

C. MODALITĂȚI DE APLICARE SISTEMATIZATĂ

1. Structuri cu grad redus de nedeterminare statică

La structurile cu puține legături suplimentare, sînt de calculat un număr redus de coeficienți și termeni liberi, astfel că rezolvarea ecuațiilor se poate face cu ușurință pe cale manuală.

Astfel, cînd structura are un singur grad de nedeterminare statică, ecuația de condiție are forma

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1s}+\Delta_{1t}+\Delta_{1c}=0, \text{ deci } X_1=-(\Delta_{1s}+\Delta_{1t}+\Delta_{1c})/\delta_{11}, \tag{9.26}$$

unde se vor considera unul sau mai mulți termeni liberi, după caz. Este necesară o singură situație auxiliară de încărcare, aplicînd pe sistemul de bază sarcina-unitate corespunzătoare necunoscutei X_1.

La structuri cu două grade de nedeterminare statică, ecuațiile de condiție pentru încărcarea cu sarcini au forma

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1s}=0 \quad \text{și} \quad \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2s}=0,$$

din care se determină mărimile necunoscutelor

$$X_1=-(\Delta_{1s}\delta_{22}-\Delta_{2s}\delta_{12})/D \text{ și } X_2=-(\Delta_{2s}\delta_{11}-\Delta_{1s}\delta_{21})/D, \tag{9.27}$$

unde s-a notat cu $D=\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2$ determinantul matricei coeficienților. În acest caz intervin două situații auxiliare de încărcare, aplicînd succesiv pe sistemul de bază sarcini-unitate pe direcțiile necunoscutelor X_1 și X_2.

La structuri cu mai mult de două grade de nedeterminare, rezolvarea ecuațiilor de condiție se face de obicei folosind algoritmul lui Gauss, în forma sa sistematizată.

Pentru calculul coeficienților și termenilor liberi la structuri alcătuite din bare drepte și solicitate dominant la încovoiere, se vor utiliza sistematizările date de relațiile (8.29)—(8.32) în care intervin lungimile transformate și caracteristicile de încărcare ale barelor.

Domeniul de aplicare avantajos al metodei eforturilor poate fi considerabil extins dacă se dă atenție posibilităților de simplificare a sistemului ecuațiilor de condiție, pornind încă de la alegerea judicioasă a sistemului de bază. Scopul urmărit este de a reduce în cît mai mare măsură, în ecuațiile de condiție, numărul coeficienților secundari de forma $\delta_{ij}(i\neq j)$. O situație deosebit de favorabilă pentru obținerea de simplificări se întîlnește în cazul structurilor simetrice, utilizînd în rezolvare particularitățile de simetrie atît pentru trecerea la sistemul de bază, cît și pentru alegerea necunoscutelor. Aceste aspecte vor fi examinate mai departe.

Totodată, metoda eforturilor găsește condiții favorabile de aplicare la anumite categorii de structuri cu largă utilizare, cum sînt grinzile continue, arcele, grinzile cu zăbrele static nedeterminate etc., ale căror particularități permit stabilirea unor forme de sistematizare a rezolvării specifice acestor structuri, care vor fi examinate în capitolele următoare.

Pentru exemplificarea modului de aplicare a metodei eforturilor, precum și a sistematizărilor stabilite, se determină diagramele M, T, N pentru cadrul din figura 140, *a*; se verifică ecuațiile de condiție și diagrama totală de momente încovoietoare.

Cadrul dat este de $2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3$ ori static nedeterminat. Trecerea la sistemul de bază se poate obține prin introducerea a trei articulații, de exemplu în nodul *2*, în extremitatea inferioară a barei *3-5* și în nodul *5*; momentele încovoietoare din aceste secțiuni devin necunoscutele X_1, X_2, X_3. Diagramele unitare m_{x1}, m_{x2} și m_{x3} sînt trasate în figurile 140, *c—e*, iar diagrama M_{xs} dată de sarcini este în figura 140, *f*.

Pentru calculul coeficienților și al termenilor liberi se folosesc lungimile transformate ale barelor și caracteristicile de încărcare. Admițînd $I_c = I/8$, se obține

$$\lambda_{12} = \lambda_{34} = \lambda_{35} = 4 \cdot \frac{I}{8} \cdot \frac{2}{I} = 1 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 6 \cdot \frac{I}{8} \cdot \frac{1}{I} = 0{,}75 \text{ m}, \quad \lambda_{56} = 4 \cdot \frac{I}{8} \cdot \frac{3}{2I} = 0{,}75 \text{ m}.$$

Caracteristicile de încărcare se calculează folosind cazurile *4* și *3* din tabela 3 (cu $a = c$ în primul caz și $a = b$ în al doilea); rezultă

$$(2-3)\ m_2 = m_3 = 2 \cdot 50 \cdot 6/3 = 200 \text{ kNm}, \quad (5-6)\ m_5 = 3 \cdot 50 \cdot 4/8 = 75 \text{ kNm}.$$

Cu aceste date se găsesc următoarele valori pentru coeficienții necunoscutelor (multiplicate cu constanta $6\,EI_c$)

$$\delta_{11} = 2\,(\lambda_{12} + 3\,\lambda_{23} + \lambda_{34}) = 8{,}5, \qquad \delta_{22} = 2\,(2 \cdot 2\lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{35}) = 10,$$
$$\delta_{33} = 2\,(\lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{35} + \lambda_{56}) = 7, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = 2 \cdot 3\,\lambda_{23} + 2\,\lambda_{34} = 6{,}5,$$
$$\delta_{13} = \delta_{31} = -(3\lambda_{23} + 2\lambda_{34}) = -4{,}25, \qquad \delta_{23} = \delta_{32} = -2\,(2\lambda_{23} + \lambda_{34}) + \lambda_{35} = -4,$$

iar termenii liberi (de asemenea multiplicați cu $6\,EI_c$) sînt

$$\Delta_{1s} = \lambda_{23}(m_2 + m_3) = 300, \quad \Delta_{2s} = 2\lambda_{23} m_3 = 300, \quad \Delta_{3s} = -\lambda_{23} m_3 + \lambda_{56} m_5 = -93{,}75.$$

Toți coeficienții și termenii liberi reprezintă rotiri relative în articulațiile introduse. Ecuațiile de condiție au forma

$$\begin{bmatrix} 8{,}5 & 6{,}5 & -4{,}25 \\ 6{,}5 & 10 & -4 \\ -4{,}25 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ -93{,}75 \end{bmatrix} = 0.$$

Pentru verificarea ecuațiilor se fac mai întîi sumele coeficienților și a termenilor liberi:

$$\sum \delta_{1j} = 10{,}75, \quad \sum \delta_{2j} = 12{,}5, \quad \sum \delta_{3j} = -1{,}25,$$
$$\sum\sum \delta_{ij} = 22, \quad \sum \Delta_{is} = 506{,}25.$$

Se trasează apoi în mod independent diagrama m_{xt} (fig. 140, *g*) și se calculează valorile

$$\delta_{tt} = 2\,(\lambda_{12} + \lambda_{23} + 2\,\lambda_{23} + 2 \cdot 2\,\lambda_{23} + \lambda_{34}) + 6\,\lambda_{35} + 2\,\lambda_{56} = 22,$$
$$\delta_{1t} = 2\,\lambda_{12} + (3\,\lambda_{23} + 2 \cdot 3\,\lambda_{23}) + 2\,\lambda_{34} = 10{,}75,$$
$$\delta_{2t} = (2\,\lambda_{23} + 2 \cdot 2 \cdot 2\,\lambda_{23}) + 2\,\lambda_{34} + 3\,\lambda_{35} = 12{,}5,$$
$$\delta_{3t} = -(\lambda_{23} + 2 \cdot 2\,\lambda_{23}) - 2\,\lambda_{34} + 3\,\lambda_{35} + 2\,\lambda_{56} = -1{,}25,$$
$$\Delta_{ts} = \lambda_{23}\,m_2 + 2\,\lambda_{23}\,m_3 + \lambda_{56}\,m_5 = 506{,}25.$$

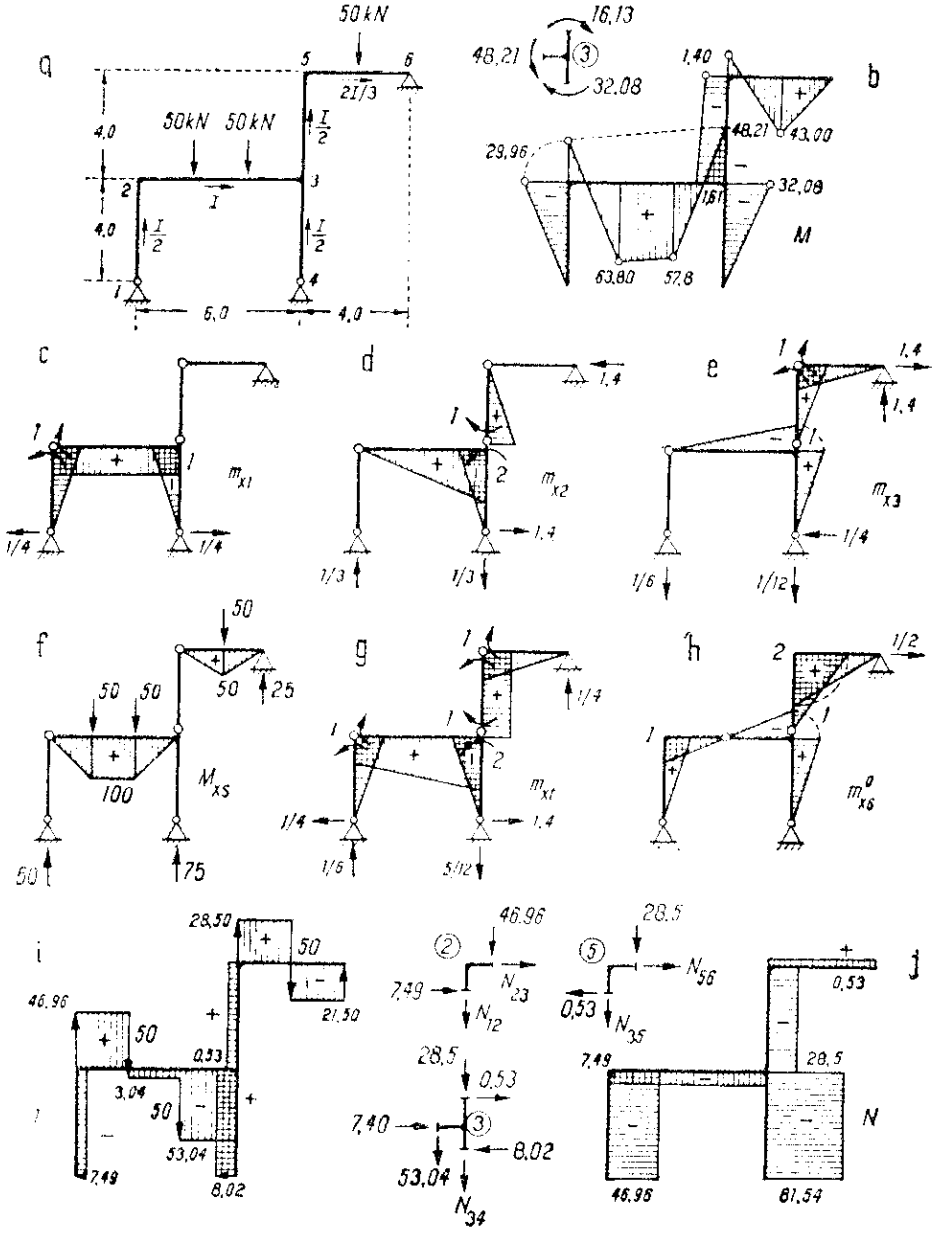

a
50 kN
5
6
21/3
4,0
50kN 50kN
I/2
2
3
I
4,0
I/2
I/2
1
4
6,0
4,0
b
16,13
48,21
3
32,08
1,40
48,21
43,00
29,96
32,08
1,61
M
63,80
57,8
c
1
1
m_{x1}
1/4
1/4
d
1,4
1
2
m_{x2}
1,4
1/3
1/3
e
1
1,4
1,4
1
m_{x3}
1/4
1/6
1/12
f
50
50 50
50
25
M_{xs}
100
50
75
g
1
1
1/4
1
2
m_{xt}
1/4
1,4
1/6
5/12
h
2
1/2
1
1
m^0_{x6}
i
28,50
50
21,50
46,96
50
0,53
3,04
50
53,04
7,49
8,02
j
46,96
②
N_{23}
7,49
N_{12}
28,5
⑤
N_{56}
0,53
N_{35}
28,5
0,53
7,40
③
8,02
53,04
N_{34}
0,53
7,49
28,5
N
46,96
61,54

Fig. 140

Comparînd aceste valori cu sumele coeficienților și termenilor liberi, rezultă că ecuațiile de condiție sînt scrise corect.

Din rezolvarea ecuațiilor se obțin pentru necunoscute valorile

$$X_1 = -29{,}96 \text{ kNm}, \quad X_2 = -16{,}13 \text{ kNm}, \quad X_3 = -14{,}01 \text{ kNm}.$$

Cu aceste valori se multiplică ordonatele diagramelor unitare m_{x1}, m_{x2}, m_{x3} și se efectuează suprapunerea de efecte, care conduce la diagrama totală de momente încovoietoare din figura 140, *b*. Condiția de echilibru a nodului *3* rezultă verificată, deoarece $16{,}13+32{,}08-48{,}21=0$. Diagrama de forțe tăietoare, arătată în figura 140, *i*, rezultă prin aplicarea relației (9.18)

$$T_{12}=T_{21}=-29{,}96/4=-7{,}49 \text{ kN}, \quad T_{23}=50+(-48{,}21+29{,}96)/6=46{,}96 \text{ kN},$$

$$T_{32}=-50-3{,}04=-53{,}04 \text{ kN}, \quad T_{35}=T_{53}=-(14{,}01-16{,}13)/4=0{,}53 \text{ kN}.$$

$$T_{34}=T_{43}=32{,}08/4=8{,}02 \text{ kN}, \qquad T_{56}=25+14{,}01/4=28{,}50 \text{ kN},$$

$$T_{66}=-25+3{,}50=-21{,}5 \text{ kN}.$$

Pentru diagrama N (fig. 140, *j*) se folosesc condițiile de echilibru ale nodurilor *2*, *5* și *3*; în figură s-au izolat aceste noduri și s-au indicat forțele care acționează asupra lor. Din echilibrul nodului *2* rezultă: $N_{23}=-7{,}49$ kN și $N_{12}=-46{,}96$ kN; din echilibrul nodului *5*: $N_{56}=0{,}53$ kN și $N_{35}=-28{,}5$ kN; din echilibrul nodului *3*: $N_{34}=-53{,}04-28{,}5=-81{,}54$ kN.

Verificarea diagramei totale de momente încovoietoare se obține calculînd cu ajutorul acesteia anumite deplasări care în structura reală sînt nule. Fie, de exemplu, deplasarea pe orizontală din articulația *6*. Pentru diagrama auxiliară m^0_{x6} se poate folosi orice sistem static determinat obținut din structura dată, cum este cel din figura 140, *h*. Efectuarea calculului cu relația

$$u_6=\int M_x\, m^0_{x6}\, \mathrm{d}s/EI$$

se simplifică observînd că pe porțiunea *1-2-3-4* diagrama m^0_{x6} este antisimetrică, deci se poate lăsa la o parte componenta simetrică a diagramei M_x (fig. 140, *b*) de pe această porțiune. În consecință, se va considera numai o diagramă triunghiulară negativă pe bara *2-3*, cu ordonata 18,21 în extremitatea *3*, de asemenea o diagramă triunghiulară pozitivă pe stîlpul *3-4*, cu ordonata 2,12 în extremitatea *3*. Se obține

$$3\,EI_c\,u_6=\lambda_{23}\cdot 18{,}21\,(2-1)+2\,\lambda_{34}\cdot 2{,}12-\lambda_{35}\cdot 2\,(2\cdot 14{,}01+16{,}13)+$$

$$+\lambda_{35}\cdot 2\,(-2\cdot 14{,}01+m_5)=0{,}75\cdot 18{,}21+4{,}24-2\cdot 44{,}15+0{,}75\cdot 2\cdot 46{,}98=$$

$$=88{,}32-88{,}30=0{,}02\cong 0,$$

care reprezintă o verificare a diagramei totale M_x. Similar se pot face și alte verificări.

2. Structuri cu bare drepte de secțiune variabilă

La proiectarea construcțiilor se folosesc frecvent structuri avînd bare cu secțiune variabilă. Astfel, în figura 141, *a* se vede o deschidere de grindă continuă, unde secțiunile de pe reazemele intermediare au fost mărite prin prevederea unor vute; în figura 141, *b* este reprezentat un cadru de hală industri-

ală, la care s-a urmărit reducerea greutății proprii în zona centrală. Se adaptează astfel distribuția materialului la configurația diagramei de momente încovoietoare, evitînd risipa ce ar rezulta menținînd peste tot secțiunea cerută de momentul încovoietor maxim.

La structuri static nedeterminate, utilizarea variațiilor de secțiune influențează substanțial diagramele de momente încovoietoare: porțiunile structurii

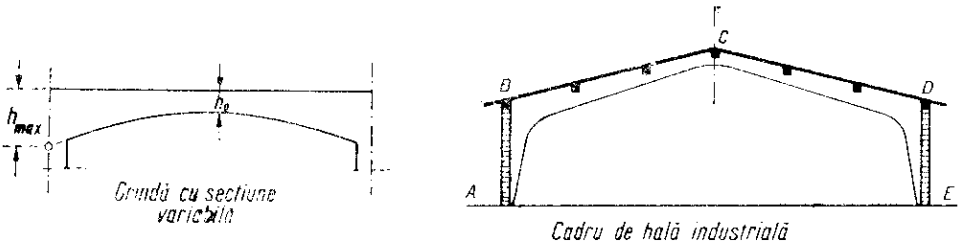


Fig. 141

mai puternic dimensionate atrag spre ele eforturi mai mari, descărcînd astfel celelalte porțiuni. Utilizarea judicioasă a acestei proprietăți poate conduce la importante economii de material.

Introducerea în calcul a secțiunilor variabile se poate face destul de simplu, stabilind expresii asemănătoare cu (8.29)—(8.32). Se vor relua cazurile din figura 125, refăcînd integrările și ținînd seama că de data aceasta momentul de inerție I_x variază în lungul barei. Pentru sistematizare, se va introduce și momentul de inerție I_0, corespunzător secțiunii *minime* a barei (fig. 141, *a*); de asemenea, se vor considera ecuațiile multiplicate cu $6\,EI_c$, ca în cazul secțiunii constante.

Considerînd două cîte două diagramele din figura 125, se obține:

(1) Integrarea produsului diagramelor *a* cu *b*

$$6\,EI_c \cdot \int M_x^0 \frac{x'}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{EI_x} = l\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{6}{l^2}\int M_x^0 \frac{I_0}{I_x} \cdot x'\mathrm{d}x = l\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{6\,S'_{kj}}{l^2} = \lambda_{jk}\, m'_j. \quad (9.28)$$

(2) Integrarea produsului diagramelor *a* cu *c*

$$6\,EI_c \cdot \int M_x^0 \frac{x'}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{EI_x} = l\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{6}{l^2}\int M_x^0 \frac{I_0}{I_x} \cdot x\mathrm{d}x = l\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{6\,S'_{jk}}{l^2} = \lambda_{jk}\, m'_k \quad (9.29)$$

În expresiile de mai sus s-a folosit notația

$$\lambda_{jk} = l_{jk} \cdot I_c/I_0. \quad (9.30)$$

care reprezintă* *lungimea transformată* a barei *j-k*; ea este analoagă cu relația (8.33), în cazul barei cu secțiune variabilă trebuind introdus momentul de inerție I_0 al secțiunii minime. S-a mai notat cu S'_{jk} și S'_{kj} momentele statice ale suprafeței de momente $M_x^0 \cdot I_0/I_x$, în raport cu extremitățile *j* și *k*; intervine aici diagrama de momente încovoietoare M_x^0 avînd ordonatele *corectate*

prin multiplicare cu raportul I_0/I_x, variabil în cursul barei. Se obțin astfel *caracteristicile de încărcare*

$$m'_j = 6\,S'_{kj}/l^2 \quad \text{și} \quad m'_k = 6\,S'_{jk}/l^2,$$

care corespund diagramei corectate.

Determinarea directă a cantităților m'_j și m'_k este dificilă, deoarece aceste cantități depind atît de sarcinile aplicate pe bară, cît și de variația de secțiune a barei. Pentru ușurință, caracteristicile de încărcare ale barei cu secțiune variabilă se pun sub forma

$$m'_j = s'_{jk}\,m_j \quad \text{și} \quad m'_k = s''_{jk}\,m_k,$$

în funcție de caracteristicile de încărcare ale barei cu secțiune constantă, date de expresiile (8.34). Coeficienții s'_{jk} și s''_{jk} au forma

$$s'_{jk} = \frac{\int M_x^0 \frac{I_0}{I_x}\,x'\,\mathrm{d}x}{\int M_x^0\,x'\,\mathrm{d}x} \cdot \frac{S'_{kj}}{S_{kj}}, \qquad s''_{jk} = \frac{\int M_x^0 \frac{I_0}{I_x}\,x\,\mathrm{d}x}{\int M_x^0\,x\,\mathrm{d}x} \cdot \frac{S'_{jk}}{S_{jk}}, \tag{9.31}$$

deci sînt rapoarte de momente statice corespunzătoare diagramei M_x^0, corectată la numărător și necorectată la numitor. Expresiile (9.28) și (9.29) se pot deci scrie

$$\lambda_{jk}\,m'_j = \lambda_{jk}\,s'_{jk}\,m_j \quad \text{și} \quad \lambda_{jk}\,m_k = \lambda_{jk}\,s''_{jk}\,m_k. \tag{9.32}$$

Coeficienții s' și s'' se găsesc întabulați pentru cazuri uzuale de încărcări și de variații de secțiune.

(3) Integrarea produsului diagramelor b cu b, deci două diagrame triunghiulare orientate în același sens, cu ordonata-unitate în extremitatea j

$$6\,EI_c \cdot \int \frac{x'^2}{l^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{EI_x} = 2\,l\,\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{3}{l^3} \int \frac{I_0}{I_x}\,x'^2\,\mathrm{d}x = 2c'_{jk}\lambda_{jk}. \tag{9.33}$$

(4) Integrarea produsului diagramelor b cu c, deci două diagrame triunghiulare orientate în sensuri contrare

$$6\,EI_c \cdot \int \frac{xx'}{l^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{EI_x} = l\,\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{6}{l^3} \int \frac{I_0}{I_x}\,xx'\,\mathrm{d}x = c_{jk}\lambda_{jk}. \tag{9.34}$$

(5) Integrarea produsului diagramelor c cu c, deci două diagrame triunghiulare orientate în același sens, cu ordonata-unitate în extremitatea k

$$6\,EI_c \cdot \int \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{EI_x} = 2\,l\,\frac{I_c}{I_0} \cdot \frac{3}{l^3} \int \frac{I_0}{I_x}\,x^2\,\mathrm{d}x = 2c''_{jk}\lambda_{jk}. \tag{9.35}$$

Sistematizarea integrării în expresiile (9.33)—(9.35) a introdus coeficienții

$$c'_{jk} = \frac{3}{l^3} \int \frac{I_0}{I_x}\,x'^2\,\mathrm{d}x, \qquad c_{jk} = \frac{6}{l^3} \int \frac{I_0}{I_x}\,xx'\,\mathrm{d}x, \qquad c''_{jk} = \frac{3}{l^3} \int \frac{I_0}{I_x}\,x^2\,\mathrm{d}x, \tag{9.36}$$

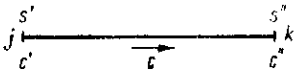
care depind numai de variația de secțiune a barei și care de asemenea se găsesc întabulați pentru cazuri uzuale.

Rezultatele de integrare sistematizate pentru cele cinci combinări de cîte două diagrame sînt centralizate în tabela 5 (pentru simplitate, coeficienții au fost scriși fără indici), comparativ cu rezultatele pentru bara cu secțiune constantă. Singura deosebire este că — la bare cu secțiune variabilă — se introduce cîte un coeficient specific fiecărui caz, care poate fi cu ușurință reținut. Înseamnă că și în acest caz *se pot citi direct pe diagrame* rezultatele integrării. Astfel, pentru cazul din figura 124, se obține considerînd diagrame pozitive

$$6\,EI_c\int_j^k M_x m_x \frac{ds}{EI} = \lambda_{jk}[h_j s' m_j + h_k s'' m_k + (2\,h_j c' + h_k c) M_j + (h_j c + 2\,h_k c'') M_k]$$

unde sarcinile de pe bară intervin prin caracteristicile de încărcare m_j și m_k, aceleași ca în cazul secțiunii constante, iar diagramele triunghiulare apar definite prin ordonatele h_j și h_k.

Tabela 5



Rezultatele integrării pentru diagrame simple

Combinația	a cu b	a cu c	b cu b	b cu c	c cu c
I constant	$\lambda_{jk}\, m_j$	$\lambda_{jk} m_k$	$2\,\lambda_{jk}$	λ_{jk}	$2\,\lambda_{jk}$
I variabil	$\lambda_{jk}\, s' m_j$	$\lambda_{jk}\, s'' m_k$	$2\,c'\lambda_{jk}$	$c\lambda_{jk}$	$2\,c''\lambda_{jk}$

În tabela 5 se arată că sînt în total cinci coeficienți de secțiune variabilă, definiți în raport cu sensul de parcurgere stabilit pentru intervalul j-k (c' și s' corespund capătului din stînga, iar c'' și s'' — capătului din dreapta). Dintre aceștia, trei coeficienți și anume c', c și c'' depind numai de variația de secțiune a barei, în timp ce ceilalți doi (s' și s'') mai depind și de sarcinile aplicate. În cazuri particulare, numărul coeficienților diferiți se reduce:

— cînd variația de secțiune a barei este *simetrică*, dar sarcinile aplicate sînt *oarecare*, rămîn *patru* coeficienți diferiți

$$s' \neq s'', \quad c' = c'', \quad c;$$

— cînd variația de secțiune a barei este *simetrică* și sarcinile aplicate sînt de asemenea *simetrice*, rămîn numai *trei* coeficienți diferiți

$$s' = s'', \qquad c' = c'', \qquad c;$$

— cînd variația de secțiune a barei este *simetrică* și bara este încărcată cu o sarcină *uniform distribuită*, $M_x^0 = px\,x'/2$, astfel că folosind simetria ce există se obține:

$$S'_{jk} = S'_{kj} = \int M_x^0 \frac{I_0}{I_x} x\,dx = \int M_x^0 \frac{I_0}{I_x} x'\,dx = \frac{1}{2}\int M_x^0 \frac{I_0}{I_x}(x + x')\,dx$$

$$= \frac{l}{2}\int M_x^0 \frac{I_0}{I_x}\,dx = \frac{pl^4}{24}\cdot\frac{6}{l^3}\int \frac{I_0}{I_x} x x'\,dx = c\cdot\frac{pl^4}{24}.$$

unde ținînd seama că $S_{jk}=S_{kj}=pl^4_j/24$ și $S'_{jk}=s'S_{jk}$, respectiv $S'_{kj}=s''S_{kj}$, rezultă

$$s'=s''=c \quad \text{și} \quad c'=c'',$$

astfel că rămîn numai *doi* coeficienți diferiți.

Toți coeficienții de secțiune variabilă sînt *subunitari*, deoarece peste tot $I_0/I_x<1$; cînd bara are secțiune *constantă*, $I=I_x=\text{const.}$, și deci $s'=s''=c'=c''=1$.

Coeficienții de secțiune variabilă se folosesc curent la proiectarea structurilor de beton armat. Pentru cazuri uzuale de încărcări și de variații de secțiune, în cărțile de specialitate sînt date tabele cu acești coeficienți[1]. Prin aceasta, introducerea în calcul a efectului variațiilor de secțiune devine simplă și trebuie totdeauna făcută, deoarece la piese de beton armat variația momentului de inerție poate fi foarte mare în lungul piesei; valorile uzuale ale raportului I_0/I_{max} sînt de ordinul 0,05—0,20, astfel că influențează substanțial distribuția eforturilor.

Pentru exemplificare, se determină diagrama de momente încovoietoare la cadrul din figura 142, *b*, considerînd comparativ cazul cînd barele ar avea secțiune constantă și cazul cînd barele ar avea secțiune variabilă ($n=I_0/I_{max}=0{,}07$).

Pe baza dimensiunilor geometrice date, rezultă $l_{23}=l_{34}=7.76$ m. Pentru calculul lungimilor transformate ale barelor, fie $I_c=I/6$ în cazul secțiunilor constante, respectiv $I_c=I_0/6$ în cazul secțiunilor variabile; se obține

$$\lambda_{12}=\lambda_{45}=6\,I_c/I=6\,I_c/I_0=1 \text{ m}, \quad \lambda_{23}=\lambda_{34}=7.76\,I_c/I=7{,}76\,I_c/I_0=1{,}30 \text{ m}.$$

Caracteristicile de încărcare pentru barele 2-3 și 3-4 se obțin folosind proprietatea stabilită în legătură cu figura 126, anume calculîndu-le pentru proiecția orizontală a barei; rezultă

$$m_2=m_2^{st}=m_3^{dr}=m_4=20\cdot 7{,}5^2/4=281.25 \text{ kNm}.$$

Cadrul este o singură dată static nedeterminat. Se alege ca necunoscută suplimentară împingerea orizontală $H=X_1$; ecuația de condiție are forma

$$\delta_{11}H+\Delta_{1s}=0, \text{ deci } H=-\Delta_{1s}/\delta_{11}.$$

Diagramele M_{xs} și m_{x1} sînt arătate în figura 142, *b* și *c*. Datorită simetriei, integrările se pot efectua numai pe jumătate de structură.

(1) *Bare cu secțiune constantă.* Calculul deplasărilor se face cu ajutorul expresiilor sistematizate din tabela 5; se obține

$$3\,EI_c\delta_{11}=2\,\lambda_{12}\cdot 6^2+2\,\lambda_{23}(6^2+8^2+6\cdot 8)=457,$$

$$3\,EI_c\Delta_{1s}=-\lambda_{23}[562.5(6+2\cdot 8)+6\,m_2+8\,m_3^{st}]=-21206,$$

astfel că împingerea orizontală este

$$H=-\Delta_{1s}/\delta_{11}=21206/457=46.4 \text{ kN}.$$

Prin operarea suprapunerii $M_x=M_{xs}+m_{x1}H$ rezultă diagrama de momente încovoietoare din figura 142, *d*.

---

[1] Colectiv Caracostea, N., *Manual pentru calculul construcțiilor*, București, Editura tehnică, 1959; Agent, R., *Sisteme reticulare nedeterminate*, București, Editura tehnică, 1970; Avram, C., *Grinzi continue*, București, Editura tehnică, 1965. Se recomandă ca, înainte de utilizarea tabelelor, să se controleze care sînt expresiile coeficienților întabulați, deoarece pot apărea unele deosebiri față de expresiile adoptate aici.

(2) *Bare cu secțiune variabilă.* Coeficienții de secțiune variabilă se iau din tabele; pentru cazul considerat se găsește prin interpolare liniară

bara 1-2: $c'_{12}=0{,}487$, $c_{12}=0{,}246$, $c''_{12}=0{,}129$,
bara 2-3: $c'_{23}=0{,}129$, $c_{23}=0{,}246$, $c''_{23}=0{,}487$, $s'_{23}=0{,}182$, $s''_{23}=0{,}310$.

Folosind și în acest caz expresiile sistematizate din tabela 5, rezultă

$$3\,EI_c\,\delta_{11}=2c''_{12}\lambda_{12}\cdot 6^2+2\lambda_{23}(c'_{23}\cdot 6^2+c''_{23}\cdot 8^2+c_{23}\cdot 6\cdot 8)=133,$$

$$3\,EI_c\cdot\Delta_{1s}=\lambda_{23}\,[562{,}5\,(c_{23}\cdot 6+2\,c''_{23}\cdot 8)+s'_{23}\cdot m_2\cdot 6+s''_{23}\cdot m_3^s\cdot 8]=-8083,$$

astfel că împingerea orizontală este

$$H=-\Delta_{1s}/\delta_{11}=8083/133=60{,}75\ \text{kN}.$$

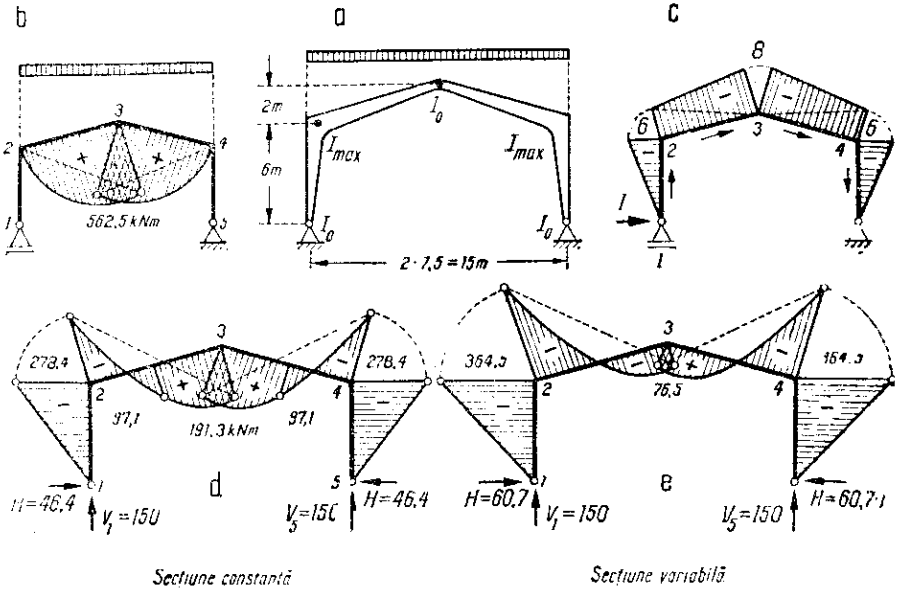


Fig. 142

valoare cu 31% mai mare decît cea găsită pentru cazul barelor cu secțiune constantă. Operînd și aici suprapunerea de efecte, se obține diagrama de momente încovoietoare din figura 142, *e*.

Comparînd cele două diagrame, apare efectul concentrării materialului spre colțurile cadrului: eforturile sînt atrase spre acestea, descărcînd porțiunea centrală.

3. Formularea matriceală a metodei eforturilor

În metoda eforturilor, alcătuirea sistemului ecuațiilor de condiție (9.4) necesită calculul coeficienților δ_{ij} și a termenilor liberi Δ_{is}, care compun matricele $\boldsymbol{\delta}$ și $\boldsymbol{\Delta}_s$. La structuri cu bare drepte solicitate dominant la încovoiere, expresiile acestora sînt

$$\delta_{ij}=\int m_{xi}\,m_{xj}\,\mathrm{d}s/EI \quad \text{și} \quad \Delta_{is}=\int M_{xs}\,m_{xi}\,\mathrm{d}s/EI,$$

unde intervin diagramele unitare $m_{xi}, \ldots m_{xn}$ și diagrama M_{xs}, construite pe sistemul de bază.

Se admite că alegerea sistemului de bază, construcția diagramelor unitare și a diagramei M_{xs} au fost făcute de proiectant, urmînd să se stabilească un algoritm pentru formarea și rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție, precum și determinarea ordonatelor diagramei totale M_x.

Coeficienții și termenii liberi sînt deplasări elastice; calculul lor se poate face folosind expresiile (8.42) și (8.41), anume

$$6EI_c\delta_{ij}=\mathbf{m}_i^T\,\mathbf{F}\,\mathbf{m}_j \quad \text{și} \quad 6EI_c\Delta_{is}=\mathbf{m}_i^T(\mathbf{F}\mathbf{M}_s+\boldsymbol{\theta}_s), \tag{9.37}$$

unde intervin matricele definite prin relațiile (8.40). Matricele-coloană $\mathbf{m}_i$ și $\mathbf{m}_j$ conțin ordonatele din capetele de bară ale diagramelor unitare, iar matricea $\mathbf{M}_s$ conține aceleași ordonate din diagrama M_{xs}. Matricea de flexibilitate a structurii $\mathbf{F}$ este o matrice cvasi-diagonală, care are drept elemente matricele de flexibilitate $\mathbf{f}_h$ ale barelor, iar matricea-coloană $\boldsymbol{\theta}_s$ are drept elemente matricele $\boldsymbol{\theta}_{hs}$, în care bara intervine prin lungimea sa transformată și caracteristicele de încărcare. Matricele componente $\mathbf{f}_h$ și $\boldsymbol{\theta}_{hs}$ sînt date de relațiile (8.38).

Reluînd calculul elementelor ce compun aceste ultime două matrice, în cazul barelor cu secțiune variabilă și utilizînd rezultatele din tabela 5, se obține

$$6EI_c\mathbf{f}_h=\lambda_h\begin{bmatrix}2c'_h & c_h\\ c_h & 2c''_h\end{bmatrix} \text{ și } 6EI_c\,\boldsymbol{\theta}_{hs}=\lambda_h\begin{bmatrix}s'm_{st}^{(h)}\\ s''m_{dr}^{(h)}\end{bmatrix}, \tag{9.38}$$

din care se regăsesc expresiile (8.38) trecînd la bara cu secțiune constantă ($c'=c=c''=s'=s''=1$).

Fiecare dintre expresiile (9.37) dă cîte un singur element (coeficient sau termen liber) din matricele $\boldsymbol{\delta}$ și $\boldsymbol{\Delta}_s$ care alcătuiesc sistemul ecuațiilor de condiție (9.4). Urmează să se formeze acum aceste matrice.

Termenii de pe un singur rînd ai matricei $\boldsymbol{\delta}$, anume coeficienții $\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}$ (unde i este același și $j=1, 2, \ldots, n$), se obțin dacă în prima expresie (9.37) matricea-coloană $\mathbf{m}_j$ se înlocuiește cu o matrice $\mathbf{m}$ avînd n coloane, în fiecare coloană fiind înscrise ordonatele de la extremitățile barelor pentru cîte una dintre diagramele unitare, anume

$$[\delta_{i1}\ \ldots\ \delta_{ij}\ \ldots\ \delta_{in}]=\mathbf{m}_i^T\mathbf{F}\mathbf{m} \quad \text{și} \quad \mathbf{m}=\begin{matrix}(m_{x1})\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\quad(m_{xj})\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}\quad(m_{xn})\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{b_1 1} & \cdots & m_{b_1 j} & \cdots & m_{b_1 n}\end{bmatrix}. \tag{9.39}$$

unde structura produsului matricelor este $(1\cdot 2b)\,(2b\cdot 2b)\,(2b\cdot n)=(1\cdot n)$.

Ansamblul matricei $\boldsymbol{\delta}$, care are n rînduri, se obține pornind de la prima relație (9.39) și înlocuind matricea-linie $\mathbf{m}_i^T$ — care dă un singur rînd — cu matricea $\mathbf{m}^T$ care conține n linii (fiecare linie provine de la cîte o diagramă unitară). Rezultă

$$\boldsymbol{\delta}\begin{bmatrix}\delta_{11} & \cdots & \delta_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix}=\mathbf{m}^T\mathbf{F}\,\mathbf{m}. \tag{9.40}$$

obținînd o matrice pătrată deoarece $(n\cdot 2b)\,(2b\cdot 2b)\,(2b\cdot n)=(n\cdot n)$.

În mod asemănător se formează matricea $\mathbf{\Lambda}_s$, pornind de la a doua relație (9.37) și înlocuind matricea $\mathbf{m}_i^T$ — care conduce la obținerea unui singur element — cu matricea $\mathbf{m}^T$, anume

$$\mathbf{\Lambda}_s = \mathbf{m}^T(\mathbf{F}\mathbf{M}_s + \mathbf{\theta}_s), \tag{9.41}$$

unde structura produsului este $(n \cdot 2b)\,(2b \cdot 2b)\,(2b \cdot 1) = (n \cdot 1)$, obținînd matricea-coloană a termenilor liberi $\mathbf{\Delta}_{is}$.

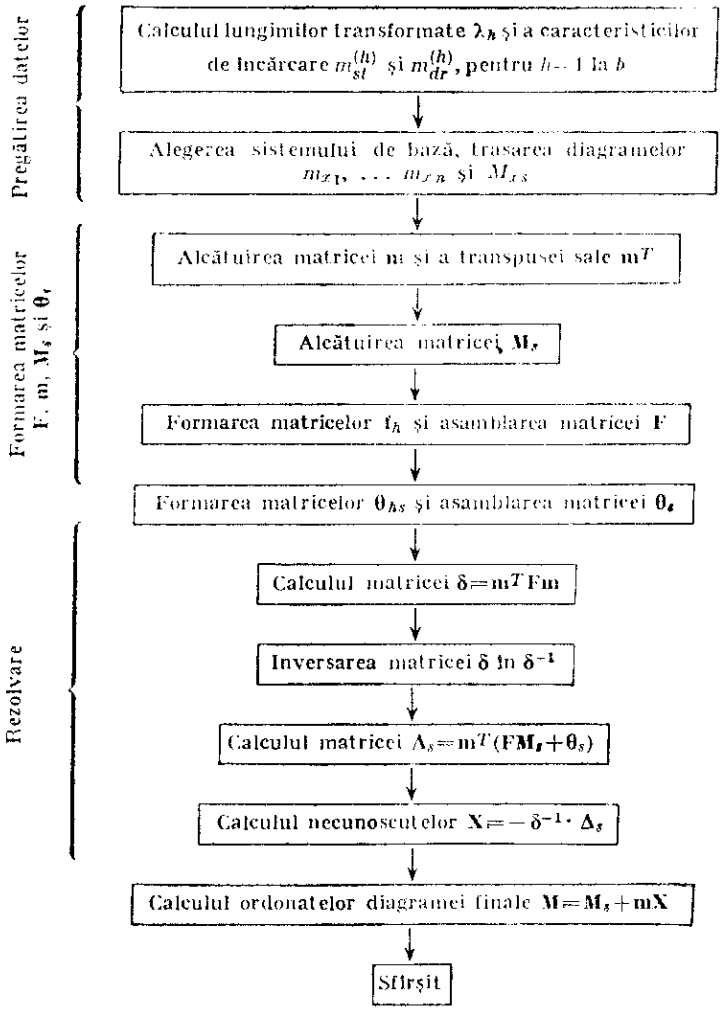


Fig. 143. Schemă logică de aplicare a metodei eforturilor.

Expresiile (9.40) și (9.41) permit alcătuirea sistemului ecuațiilor de condiție (9.4), sub forma

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{X} + \boldsymbol{\Delta}_s = 0, \quad \text{sau} \quad (\mathbf{m}^T\mathbf{F}\mathbf{m})\mathbf{X} + \mathbf{m}^T(\mathbf{F}\mathbf{M}_s + \boldsymbol{\theta}_s) = 0,$$

de unde

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{m}^T\mathbf{F}\mathbf{m})^{-1} \cdot \mathbf{m}^T(\mathbf{F}\mathbf{M}_s + \boldsymbol{\theta}_s), \tag{9.42}$$

care reprezintă matricea-coloană a necunoscutelor.

Se poate acum trece la diagrama totală de momente încovoietoare M_x a structurii static nedeterminate, pe baza relației de suprapunere

$$M_x = M_{xs} + m_{x1}X_1 + \ldots + m_{xn}X_n.$$

Suprapunerea se efectuează pentru *ordonatele de la extremitățile barelor*, ajungînd la relația

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \mathbf{m}\mathbf{X} = \mathbf{M}_s - \mathbf{m}(\mathbf{m}^T\mathbf{F}\mathbf{m})^{-1} \cdot \mathbf{m}^T(\mathbf{F}\mathbf{M}_s + \boldsymbol{\theta}_s), \tag{9.43}$$

unde $\mathbf{M}$ este matricea-coloană ce conține ordonatele diagramei finale M_x. Construind această diagramă, rămîne ca pentru barele încărcate să se suprapună — de la linia de referință dată de ordonatele din extremitățile barei — și diagrama dată de sarcini pe bara simplu rezemată.

Din relațiile (9.40)—(9.43) se constată că întreaga rezolvare se conduce utilizînd patru matrice, anume $\mathbf{F}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{M}_s$ și $\boldsymbol{\theta}_s$, care se alcătuiesc pe baza datelor structurii și a diagramelor m_{x1}, ..., m_{xn} și M_{xs}. Schema logică a procedeului se vede în figura 143.

Pentru exemplificare, se reia cadrul din figura 140, *a*. Extremitățile *a* și *b* ale fiecărei bare se admit în concordanță cu sensurile de parcurgere indicate pe figură; ordinea barelor se consideră *1-2*, *2-3*, *4-3*, *3-5* și *5-6*. Lungimile transformate sînt

$$\lambda_{12} = \lambda_{34} = \lambda_{35} = 1 \text{ m} \quad \text{și} \quad \lambda_{23} = \lambda_{56} = 0{,}75 \text{ m},$$

iar caracteristicile de încărcare au valorile

$$(2-3) \quad m_2 = m_3 = 200 \text{ kNm}, \quad (5-6) \quad m_5 = m_6 = 75 \text{ kNm}.$$

Diagramele m_{x1}, m_{x2}, m_{x3} și M_{xs} se văd în figura 140, *e f*.

Cu aceste date, se formează următoarele matrice:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5{,}63 \\ 5{,}63 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & & \\ & \mathbf{B} & & & \\ & & \mathbf{A} & & \\ & & & \mathbf{A} & \\ & & & & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Matricea $\mathbf{M}_s$ este nulă deoarece în diagrama M_{xs} nu există ordonată diferită de zero în nici o extremitate de bară.

Efectuînd operațiile matriceale indicate în schema logică, se obține:

$$\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{m}^T \mathbf{F} \mathbf{m}) = \begin{bmatrix} 8{,}50 & 6{,}50 & -4{,}25 \\ 6{,}50 & 10{,}00 & -4{,}00 \\ -4{,}25 & -4{,}00 & +7{,}00 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\delta}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}2655 & -0{,}1400 & 0{,}081 \\ -0{,}140 & 0{,}2035 & 0{,}031 \\ 0{,}081 & 0{,}0313 & 0{,}210 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -29{,}96 \\ -29{,}96 \\ -48{,}21 \\ 0 \\ +32{,}08 \\ -16{,}13 \\ -14{,}01 \\ -14{,}01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_s = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\theta}_s = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ -93{,}75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = -\boldsymbol{\delta}^{-1} \boldsymbol{\Delta}_s = \begin{bmatrix} -29{,}96 \\ -16{,}13 \\ -14{,}01 \end{bmatrix},$$

Se regăsesc astfel aceleași rezultate.

D. POSIBILITĂȚI DE SIMPLIFICARE A ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE

1. Caracteristici

În metoda generală a eforturilor, numărul ecuațiilor de condiție este de obicei egal cu gradul de nedeterminare statică al structurii. Cînd gradul de nedeterminare crește, rezolvarea ecuațiilor devine dificilă. Este deci firesc să se dea atenție posibilităților de simplificare, spre a se extinde domeniul de aplicare practică al metodei la structuri cu mai multe nedeterminări.

Căile de simplificare trebuie căutate în legătură cu *coeficienții secundari* ai ecuațiilor

$$\delta_{ij} = \int m_{xi} m_{xj} \, ds/EI = \int n_{xi} n_{xj} \, ds/EA + \ldots,$$

ale căror valori depind de perechile de diagrame unitare ce se consideră. Obiectivul: anularea a cît mai mulți coeficienți secundari, cazul limită — cînd toți acești coeficienți ar fi nuli — conducînd la ecuații independente cu cîte o singură necunoscută. Trebuie urmărit deci ca un număr cît mai mare de *perechi* de diagrame unitare să fie *ortogonale*. Pentru două diagrame unitare m_{xi} și m_{xj}, această situație este caracterizată prin condiția

$$\int m_{xi} m_{xj} ds/EI = 0,$$

care este îndeplinită cînd cele două diagrame se întind pe bare diferite (nu au nici o bară comună), sau cînd configurațiile lor prezintă anumite particularități care conduc la anularea integralei.

Ortogonalizarea diagramelor unitare se poate obține prin: (1) alegerea judicioasă a sistemului de bază și (2) utilizarea unor necunoscute complexe, rezultate din grupări adecvate ale necunoscutelor inițiale. Se începe cu prima cale.

Alegerea sistemului de bază trebuie făcută cu discernămînt, examinînd comparativ cîteva sisteme posibile. Nu este de obicei necesar să se traseze com-

plet diagramele unitare, ci numai să se identifice barele pe care se întinde fiecare. Astfel, la cadrul din figura 144, *a*, care este de șase ori static nedeterminat, se poate alege sistemul de bază din figura 144, *b* unde s-a menținut o singură încastrare. Este ușor de controlat că toate diagramele unitare se întind și pe stîlpul central, deci nu se anulează nici un coeficient secundar. Dacă se alege însă sistemul de bază din figura 144, *c*, la care toate barele rezultă articulate la ambele capete, diagramele unitare apar localizate numai pe una sau două bare (acelea pe care acționează direct necunoscuta respectivă) astfel că se anulează numeroși coeficienți secundari. Matricea coeficienților este dată în figură; din 30 de coeficienți secundari, 18 sînt nuli (60%).

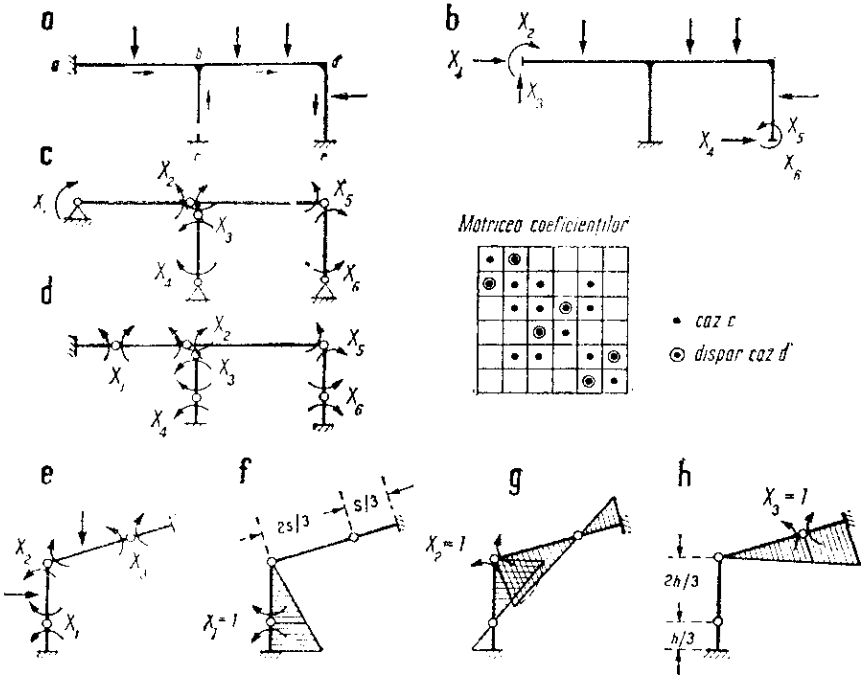


Fig. 144

O observație utilă la alegerea sistemului de bază se referă la obligarea diagramelor unitare *să se anuleze în anumite puncte convenabil alese*. Astfel, considerînd o grindă cotită dublu încastrată, se poate alege sistemul de bază din figura 144, *e*, unde articulațiile s-au introdus la *treimile* barelor, în loc de a fi introduse în încastrări. Diagramele unitare corespunzătoare se văd în figura 144, *f-h*. Aceste diagrame sînt ortogonale două cîte două, deoarece punctele de anulare din diagrama m_{x2} corespund poziției centrelor de greutate ale diagramelor unitare m_{x1} și m_{x3}. Rezultă că toți coeficienții secundari sînt nuli, și deci ecuațiile de condiție se reduc la trei ecuații independente cu cîte o singură necunoscută.

Aplicînd acest procedeu la cadrul din figura 144, *a*, se obține sistemul de bază din figura 144, *d*. Se constată că în acest caz se mai anulează șase coeficienți secundari, și anume $\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{34}=\delta_{43}=\delta_{56}=\delta_{65}=0$ (încercuiți în matrice), astfel că rămîn numai șase coeficienți secundari diferiți de zero (20%), conducînd la trei ecuații independente cu cîte o singură necunoscută și la un grup de trei ecuații cu trei necunoscute.

2. Utilizarea necunoscutelor grupate

Fie o structură static nedeterminată și un anumit sistem de bază, pentru care rezultă necunoscutele suplimentare X_1, ..., X_n și diagramele unitare m_{x1}, ..., m_{xn}, de asemenea diagrama M_{xs} (pentru simplificarea scrierii, se ține seama numai de efectul momentelor încovoietoare). Aflarea necunoscutelor se face scriind sistemul ecuațiilor de condiție sub forma

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}_s=0, \qquad \text{sau} \qquad (\mathbf{m}^T\mathbf{F}\mathbf{m})\mathbf{X}+\mathbf{m}^T(\mathbf{F}\mathbf{M}_s+\boldsymbol{\theta}_s)=0. \tag{9.44}$$

unde s-au utilizat notările matriceale definite în legătură cu relațiile (9.42). Mărimile necunoscutelor X_1, ..., X_n au rolul de multiplicatori ai diagramelor unitare în compunerea diagramei totale de momente încovoietoare, sub forma

$$M_x=m_{x1}X_1+\ldots+m_{xn}X_n+M_{xs}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{M}=\mathbf{m}\mathbf{X}+\mathbf{M}_s, \tag{9.45}$$

cum s-a arătat prin relația (9.43).

În loc de a folosi direct diagramele unitare m_{x1}, ..., m_{xn}, se pot alcătui — prin gruparea acestora — un număr egal de noi diagrame m'_{xi}, care să reprezinte combinări liniare de forma

$$m'_{xi}=\alpha_{i1}m_{x1}+\ldots+\alpha_{ij}m_{xj}+\ldots+\alpha_{in}m_{xn},$$

sau în notare matriceală

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m'_{x1} \\ \vdots \\ m'_{xi} \\ \vdots \\ m'_{xn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}'_x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1j} \cdots \alpha_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{i1} \cdots \alpha_{ij} \cdots \alpha_{in} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{n1} \cdots \alpha_{nj} \cdots \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m_{x1} \\ \vdots \\ m_{xi} \\ \vdots \\ m_{xn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}_x}, \tag{9.46}$$

unde coeficienții α_{ij} din matricea $\boldsymbol{\alpha}$ sînt aleși în mod arbitrar (unii din ei pot fi și nuli). Gruparea trebuie făcută astfel ca noile diagrame m'_{x1}, ..., m'_{xn} să fie *liniar independente* (nici una dintre ele să nu poată fi obținută din celelalte printr-o combinare liniară). Teoretic, controlul îndeplinirii acestei condiții are forma $D[\boldsymbol{\alpha}]\neq 0$ și deci matricea coeficienților $\boldsymbol{\alpha}$ trebuie să fie nesingulară.

Datorită suprapunerii liniare, înseamnă că fiecare dintre diagramele grupate m'_{xi} poate fi obținută direct pe sistemul de bază, dacă acesta se consideră încărcat cu o grupare corespunzătoare a necunoscutelor inițiale. Astfel, diagra-

Se ajunge la concluzia că utilizarea diagramelor grupate m'_{xi} și a necunoscutelor grupate X'_i corespunzătoare nu modifică cu nimic modul de aplicare a metodei generale a eforturilor. Forma nouă a ecuațiilor de condiție este

$$\boldsymbol{\delta}' \mathbf{X}' + \boldsymbol{\Delta}'_s = 0, \tag{9.50}$$

similară formei generale (9.4), dar unde coeficienții și termenii liberi se calculează cu expresiile (9.49). Din rezolvarea sistemului se obțin valorile necunoscutelor $X'_1, \ldots, X'_n$ și cu ajutorul lor se trasează diagrama finală de momente încovoietoare, aplicînd relația (9.47).

Gruparea de necunoscute trebuie utilizată în vederea anulării unui număr cît mai mare de coeficienți secundari în ecuațiile de condiție (9.50). Teoretic, se poate totdeauna ajunge la un număr de n ecuații independente cu cîte o singură necunoscută. Pentru aceasta, se consideră diagramele grupate m'_{xi} definite de relațiile (9.46) și li se impune condiția de ortogonalitate, luîndu-le două cîte două; se determină astfel mărimile coeficienților α_{ij}.

Este ușor de controlat că impunerea acestor condiții poate fi făcută folosind un număr mai mic de coeficienți α_{ij}; aceasta revine la a considera nuli o parte din coeficienții matricei $\boldsymbol{\alpha}$. O formă simplificată poate fi

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{21} & 1 & & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{deci} \quad \begin{aligned} m'_{x1} &= m_{x1} \\ m'_{x2} &= \alpha_{21} m_{x1} + m_{x2} \\ m'_{x3} &= \alpha_{31} m_{x1} + \alpha_{32} m_{x2} + m_{x3} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{9.51}$$

unde sînt diferiți de zero numai coeficienții de pe diagonala principală (egali cu unitatea) și cei de sub această diagonală.

Aflarea coeficienților α_{ij} se face succesiv. Prima diagramă din noua serie este chiar m_{x1}. Pentru a doua diagramă se pune condiția $\int m'_{x1} m'_{x2}\, ds/EI = 0$, din care rezultă coeficientul α_{21}. Pentru a treia diagramă sînt două condiții, și anume

$$\int m'_{x1} m'_{x3}\, ds/EI = 0 \quad \text{și} \quad \int m'_{x2} m'_{x3}\, ds/EI = 0,$$

care conduc la două ecuații cu două necunoscute, din care se obțin coeficienții α_{31} și α_{32}. Se continuă în același mod și se determină succesiv configurațiile diagramelor m'_{xi}. Cu ajutorul acestora se calculează coeficienții principali și termenii liberi din ecuațiile (9.50), care acum conțin numai cîte o singură necunoscută; se găsesc astfel valorile $X'_1, \ldots, X'_n$.

Sub formă generală, procedeul expus aici nu aduce de obicei avantaje la rezolvarea structurilor de formă oarecare, deoarece simplificarea rezultată în sistemul de ecuații este compensată de operațiile — deseori laborioase — impuse de stabilirea diagramelor m'_{xi}. Ceea ce trebuie reținut, este *posibilitatea utilizării necunoscutelor grupate și aplicarea în anumite situații favorabile, sub forme particulare care se dovedesc avantajoase*. În continuare, se examinează asemenea forme particulare de aplicare, atît pentru structuri oarecare, cît și pentru structuri simetrice, unde se pot obține simplificări deosebite.

3. Transferarea necunoscutelor

Un procedeu simplu de grupare constă în transferarea anumitor necunoscute, prin introducerea unor *braţe fictive perfect rigide*, care se consideră încastrate de capetele unei bare secţionate, ca în figurile 145, *e* sau *i*. Prezenţa barelor fictive nu aduce modificări în comportarea elastică a sistemului de bază (pe aceste bare $EI=\infty$), dar permite să se intervină asupra modului de acţiune a necunoscutelor, impunînd anumite condiţii.

Fie de exemplu cadrul din figura 145, *a* pentru care s-a ales sistemul de bază din figura 145, *b*. Diagramele unitare m_{x1} şi m_{x2}, corespunzătoare necunoscutelor X_1 şi X_2, sînt arătate în figurile 145, *c* şi *d*; rezultă că $\delta_{12}=\delta_{21}\neq 0$. Se înlocuieşte acum necunoscuta-unitate $X_2=1$ prin necunoscuta-unitate $X'_2=1$, aplicată prin intermediul unei perechi de braţe perfect rigide, ca în figura 145, *e*; diagrama unitară corespunzătoare este m'_{x2}. Dacă se alege $a=2h/3$, diagramele m_{x1} şi m_{x2} devin ortogonale între ele pentru bare de secţiune constantă, şi deci $\delta'_{12}=\delta'_{21}=0$. Înseamnă că utilizarea necunoscutelor X_1 şi X'_2, în loc de necunoscutele X_1 şi X_2, asigură independenţa acestor necunoscute.

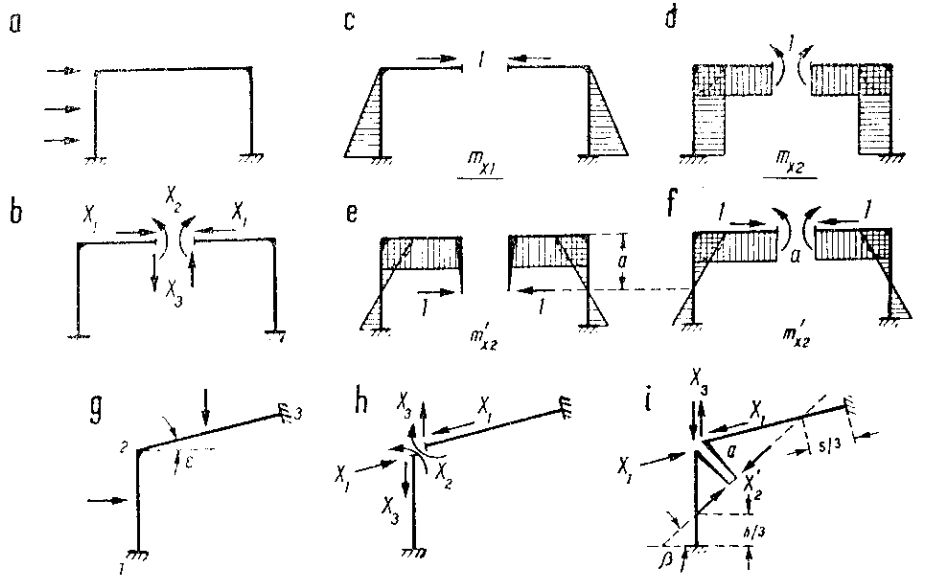


Fig. 145

Semnificaţia necunoscutei X'_2 apare admiţînd suprimate braţele fictive şi aplicînd efectul lor asupra capetelor barei secţionate, ca în figura 145, *f*. Se vede imediat că prin transferarea efectuată s-a realizat de fapt o grupare a necunoscutelor X_1 şi X_2, în sensul că diagrama m'_{x2} poate fi obţinută din m_{x1} şi m_{x2} prin combinarea $m'_{x2}=m_{x1}+a.m_{x2}$. Înseamnă că diagrama m'_{x2} poate înlocui una sau alta dintre diagramele iniţiale m_{x1} şi m_{x2}, dar nu poate fi considerată împreună cu amîndouă, deoarece nu este *diferită* de ele.

Un alt exemplu se referă la grinda cotită dublu încastrată din figura 145, *g*; sistemul de bază este arătat în figura 145, *h*, unde s-a efectuat o secționare completă în nod. Necunoscuta X_1 dă o diagramă triunghiulară numai pe stîlp, iar X_3 dă o diagramă triunghiulară numai pe bara înclinată, asemănător ca în figurile 144, *f* și *h*; în schimb, X_2 dă diagramă pe ambele bare, astfel că $\delta_{12}=-\delta_{21}\neq 0$ și $\delta_{23}=-\delta_{32}\neq 0$. În figura 145, *i* se arată o nouă alegere a necunoscutelor, unde X_2 a fost înlocuit — prin transferare — cu X_2'; perechea de forțe care reprezintă această necunoscută este dirijată după linia care unește punctele situate la treimile extreme ale celor două bare. Diagrama m_{x_2}' este aceeași ca în figura 144, *g*, și deci diagramele m_{x1}, m_{x2}' și m_{x3} sînt ortogonale două cîte două, astfel că toți coeficienții secundari se anulează.

Dacă se elimină și în acest caz brațele fictive, reducînd pe X_2' în raport cu centrul de greutate al nodului, se constată că de fapt X_2' reprezintă o necunoscută care rezultă prin gruparea celor trei necunoscute inițiale. Într-adevăr, componentele lui $X_2'=1$ pe direcțiile acestora sînt

$$\alpha_{21}=\cos\beta/\cos\varepsilon,\quad \alpha_{22}=a,\quad \alpha_{23}=-\sin(\beta-\varepsilon)/\cos\varepsilon,$$

astfel că se poate scrie

$$m_{x2}'=\alpha_{21}m_{x1}+\alpha_{22}m_{x2}+\alpha_{23}m_{x3},$$

care reprezintă o grupare liniară a diagramelor inițiale și care poate înlocui pe oricare dintre ele, de exemplu pe m_{x_2} în cazul de față.

Transferarea necunoscutelor se dovedește utilă în multe cazuri. Una dintre cele mai importante aplicații se va întîlni în capitolul *XI*, la studiul arcelor dublu încastrate, sub forma *metodei centrului elastic*.

4. Simplificări la structuri simetrice

a. **Caracterul simplificărilor.** Situația de simetrie a structurii poate fi utilizată pentru obținerea de simplificări în ecuațiile de condiție, dacă trecerea la sistemul de bază se face astfel ca acest sistem să rezulte de asemenea simetric. Mai departe, este necesar ca necunoscutele să fie alese în așa fel, încît să apară numai necunoscute simetrice și antisimetrice. Realizarea acestor două cerințe revine de fapt la aplicarea căilor de simplificare examinate mai înainte, pentru specificul structurilor simetrice.

Necunoscute simetrice și antisimetrice pot rezulta direct cînd trecerea la sistemul de bază se face suprimînd legături în axa de simetrie. Astfel, la cadrul din figura 146, *a*, care are un număr impar de deschideri și este de trei ori static nedeterminat, secționarea la mijlocul barei centrale introduce necunoscutele X_1, X_2, X_3 (fig. 146, *b*). Perechea de forțe X_1 (forță axială) și perechea de momente X_3 (moment încovoietor) reprezintă încărcări simetrice pentru sistemul de bază, în timp ce perechea de forțe X_2 (forță tăietoare) reprezintă o încărcare antisimetrică. Au rezultat astfel două necunoscute simetrice și o necunoscută antisimetrică.

Secționările în axa de simetrie nu sînt totdeauna aplicabile, iar alteori nu sînt suficiente pentru a se ajunge la sistemul de bază static determinat; mai trebuie

suprimate și alte legături. În asemenea cazuri, menținerea situației de simetrie cere să se suprime *perechi* de legături dispuse simetric, ceea ce pune în evidență perechi de necunoscute cu *poziție* simetrică, dar în general inegale ca mărime. Astfel, pentru grinda dublu încastrată din figura 146, *f*, sistemul de bază este arătat în figura 146, *g*; necunoscutele M_a și M_b sînt dispuse simetric, dar $M_a \neq M_b$ pentru sarcini oarecare. Asemănător, la cadrul din figura 146, *k* trecerea

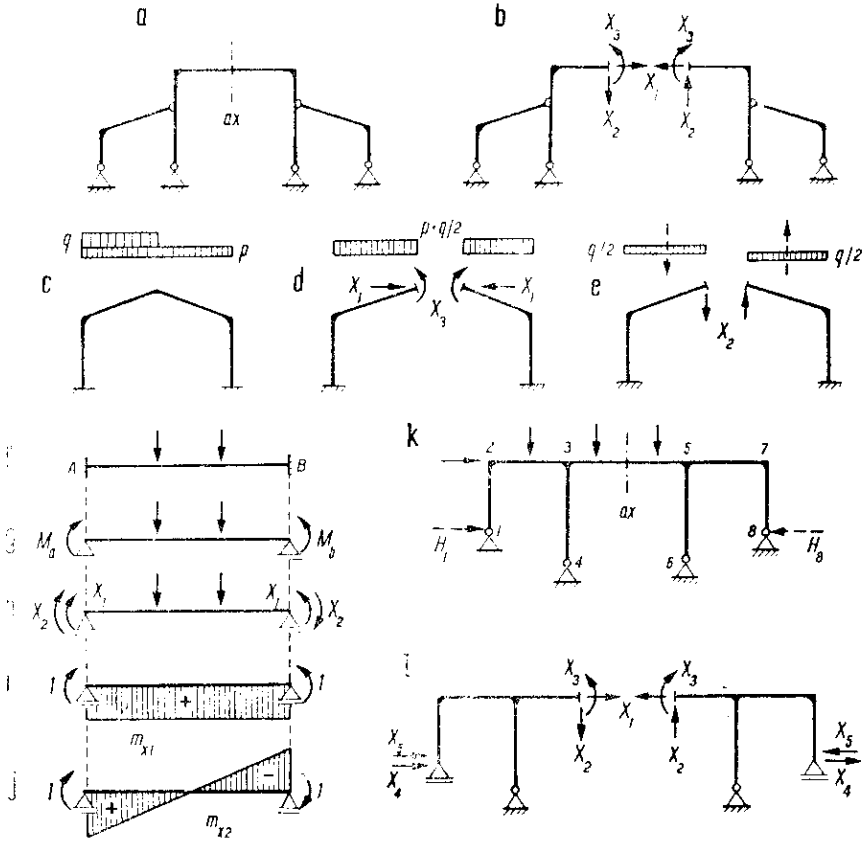


Fig. 146

la sistemul de bază s-a făcut prin secționare în axa de simetrie și prin transformarea articulațiilor din *1* și *8* în reazeme simple; necunoscutele H_1 și H_8 au poziție simetrică, dar $H_1 \neq H_8$.

Necunoscutele cu poziție simetrică pot fi grupate, înlocuind pe fiecare dintre ele cu două componente; astfel, pentru cazul din figura 146, *f*, $M_a = X_1 + X_2$ și $M_b = X_1 - X_2$, de unde rezultă (fig. 146, *h*)

$$X_1 = (M_a + M_b)/2 \text{ și } X_2 = (M_a - M_b)/2$$

Prin aceasta, necunoscutele inițiale M_a și M_b cu poziție simetrică sînt înlocuite cu două necunoscute grupate X_1 și X_2, fiecare dintre acestea fiind reprezentată prin cîte o pereche de momente și anume prima pereche (X_1) fiind o necunoscută simetrică, iar a doua pereche (X_2) — o necunoscută antisimetrică.

Asemănător, la cadrul din figura 146, *k*, necunoscutele H_1 și H_8 se înlocuiesc prin perechile de forțe X_4 și X_5 (fig. 146, *l*), care sînt necunoscute grupate pe baza unor relații similare celor de mai sus; prima pereche (X_4) este o necunoscută antisimetrică, iar a doua pereche (X_5) o necunoscută simetrică. Din totalul de cinci necunoscute, X_1, X_3 și X_5 sînt simetrice, iar X_2 și X_4 sînt antisimetrice.

Din cele ce preced rezultă că totdeauna este posibil ca, menținînd situația de simetrie la alegerea sistemului de bază, *să se ajungă numai la necunoscute simetrice și antisimetrice*, creînd posibilitatea unor simplificări substanțiale în sistemul ecuațiilor de condiție (9.4).

(1) O primă simplificare se referă la matricea coeficienților. Datorită necunoscutelor alese, toate diagramele unitare vor fi simetrice și antisimetrice. La calculul unui coeficient secundar δ_{ij}, avînd forma

$$\delta_{ij} = \int m_{xi} m_{xj} ds/EI,$$

ori de cîte ori intervine o diagramă simetrică și una antisimetrică, rezultatul integrării este nul și deci coeficientul respectiv dispare. Înseamnă că toți coeficienții secundari, la care cei doi indici nu provin de la aceeași categorie de diagrame (simetrice sau antisimetrice), sînt nuli.

Fie o structură simetrică oarecare de *n* ori static nedeterminată, la care numărătoarea necunoscutelor s-a făcut astfel încît X_1, ..., X_p sînt necunoscute simetrice, iar X_q, ..., X_n — sînt necunoscute antisimetrice. Pe baza observației de mai sus, rezultă că sistemul ecuațiilor de condiție are forma următoare:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\delta}^{(s)} & & \mathbf{X}^{(s)} & & \boldsymbol{\Delta}_s^{(1)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} \cdots \delta_{1p} & & & \\ \vdots & & & \\ \delta_{p1} \cdots \delta_{pp} & & & \\ & \delta_{qq} \cdots \delta_{qn} & & \\ & \vdots & & \\ & \delta_{nq} \cdots \delta_{nn} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \\ X_q \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1s} \\ \vdots \\ \Delta_{ps} \\ \Delta_{qs} \\ \vdots \\ \Delta_{ns} \end{bmatrix} = 0, \tag{9.52}$$

$$\begin{matrix} & \boldsymbol{\delta}^{(a)} & \mathbf{X}^{(a)} & \boldsymbol{\Delta}_s^{(2)} \end{matrix}$$

unde în primele *p* ecuații ($i = 1, \ldots p$) dispar coeficienții secundari la care $j > p$, iar în restul ecuațiilor ($i = q, \ldots n$) — toți coeficienții la care $j < q$. Utilizînd partiționarea în submatrice, cum se arată prin linii punctate, se poate scrie

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(s)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\delta}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(s)} \\ \mathbf{X}^{(a)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_s^{(1)} \\ \boldsymbol{\Delta}_s^{(2)} \end{bmatrix} = [0], \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\delta}^{(s)} \mathbf{X}^{(s)} + \boldsymbol{\Delta}_s^{(1)} = 0 \\ \boldsymbol{\delta}^{(a)} \mathbf{X}^{(a)} + \boldsymbol{\Delta}_s^{(2)} = 0, \end{matrix}$$

și deci *sistemul ecuațiilor de condiție se desface în două grupe independente de ecuații*

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} \cdots \delta_{1p} \\ \vdots \\ \delta_{p1} \cdots \delta_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1s} \\ \vdots \\ \Delta_{ps} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \begin{bmatrix} \delta_{qq} \cdots \delta_{qn} \\ \vdots \\ \delta_{nq} \cdots \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_q \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{qs} \\ \vdots \\ \Delta_{ns} \end{bmatrix} = 0, \tag{9.53}$$

unde primul grup cuprinde p ecuații care conțin numai necunoscutele simetrice $X_1, \ldots, X_p$, iar al doilea grup cuprinde $(n-p)$ ecuații în care apar numai necunoscutele antisimetrice $X_q, \ldots, X_n$.

Astfel, pentru cadrul din figura 146, *b* se obțin grupele de ecuații

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1s} \\ \Delta_{3s} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \delta_{22} X_2 + \Delta_{2s} = 0,$$

iar pentru cadrul din figura 146, *l* rezultă următoarele sisteme

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} & \delta_{15} \\ \delta_{31} & \delta_{33} & \delta_{35} \\ \delta_{51} & \delta_{53} & \delta_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1s} \\ \Delta_{3s} \\ \Delta_{5s} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{24} \\ \delta_{42} & \delta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{2s} \\ \Delta_{4s} \end{bmatrix} = 0.$$

(2) O a doua simplificare se referă la termenii liberi. Desigur, cît timp sarcinile aplicate pe structură sînt oarecare și diagrama M_{xs} se trasează pentru aceste sarcini, simplificări nu pot apare. Se știe însă că orice încărcare poate fi descompusă în două componente, dintre care una simetrică și alta antisimetrică, cărora le corespund diagramele M^s_{xs} (simetrică) și M^a_{xs} (antisimetrică). Un termen liber oarecare Δ_{is} se poate deci scrie

$$\Delta_{is} = \int (M^s_{xs} + M^a_{xs})\, m_{xi} \frac{ds}{EI} = \int M^s_{xs}\, m_{xi} \frac{ds}{EI} + \int M^a_{xs}\, m_{xi} \frac{ds}{EI}.$$

Din cei doi termeni ai expresiei, numai unul poate fi diferit de zero: primul, dacă m_{xi} provine de la o necunoscută simetrică, respectiv al doilea dacă m_{xi} provine de la o necunoscută antisimetrică. Înseamnă că, pentru grupul de ecuații care cuprinde necunoscutele simetrice, termenii liberi sînt dați numai de componenta simetrică a încărcării; pentru grupul de ecuații care cuprinde necunoscutele antisimetrice, termenii liberi sînt dați numai de componenta antisimetrică a încărcării.

Rezultă că separarea ecuațiilor în două grupe se poate obține și din punctul de vedere al sarcinilor. Aflarea necunoscutelor simetrice și a celor antisimetrice se face prin *rezolvări complet distincte*, utilizînd două situații de încărcare a sistemului de bază:

(*a*) în prima situație se consideră necunoscutele simetrice și componenta simetrică a încărcării (fig. 146, *d*), calculînd coeficienții și termenii liberi din grupul de ecuații cu necunoscute simetrice;

(*b*) în a doua situație se consideră necunoscutele antisimetrice și componenta antisimetrică a încărcării (fig. 146, *e*), calculînd coeficienții și termenii liberi din grupul de ecuații cu necunoscute antisimetrice.

Acest mod de a proceda se poate sistematiza în continuare, reducînd operarea numai la jumătate din structură, prin introducerea în axa de simetrie a unor legături convenționale, cum se arată mai departe.

Cînd sarcinile date reprezintă o încărcare simetrică, termenii liberi din grupul de ecuații al necunoscutelor antisimetrice sînt nuli; deoarece $D \neq 0$, înseamnă că în acest caz necunoscutele antisimetrice nu pot fi decît nule. O situație similară apare pentru necunoscutele simetrice la o încărcare antisimetrică.

Se ajunge astfel la concluzia că *pentru sarcini simetrice necunoscutele antisimetrice sînt nule, iar pentru sarcini antisimetrice — necunoscutele simetrice sînt nule.* Se pot astfel elimina de la început din rezolvare necunoscutele care nu intervin.

b. **Utilizarea semistructurilor.** Reducerea calculului la o jumătate de structură capătă o semnificație concretă prin utilizarea „semistructurilor". Acestea sînt structuri *convenționale*, obținute din structura dată prin secționare în axa de simetrie. În secțiunile respective se introduc legături corespunzătoare situației create acolo de componenta încărcării care se consideră. Aceste legături înlocuiesc efectul părții îndepărtate din structură și ele trebuie să asigure semistructurii o deformare identică cu cea din structura reală. În consecință, semistructura poate fi rezolvată ca o structură independentă pentru sarcinile care-i revin, urmînd ca la sfîrșit să se transpună diagramele sale de eforturi pe cealaltă jumătate, simetric sau antisimetric (după caz).

Identificarea legăturilor semistructurii în axa de simetrie se face pe baza eforturilor din secțiune care sînt nule și a deplasărilor care nu se pot produce acolo pentru încărcarea considerată: pe direcția fiecărui efort nul trebuie eli-

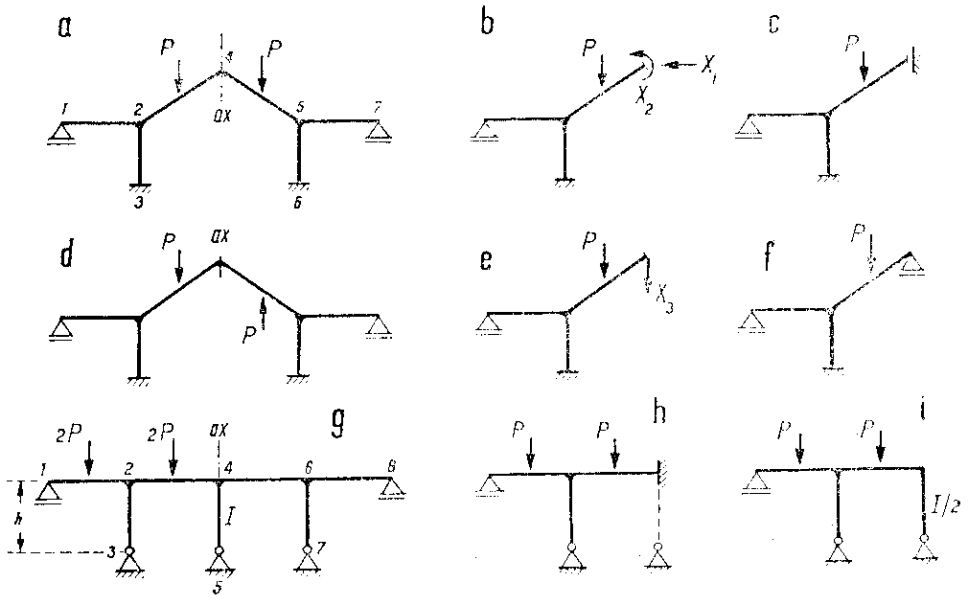


Fig. 147

minată legătura, iar pe direcția fiecărei deplasări nule trebuie introdusă legătura respectivă. Pentru claritate, în figura 147 sînt arătate cazuri uzuale care se întîlnesc la structuri cu o axă de simetrie.

La cadrul din figura 147, *a*, axa de simetrie trece prin mijlocul deschiderii centrale și încărcarea este *simetrică*. Înseamnă că în secțiunea din axa de simetrie $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ și $X_3 = 0$ (acțiunea reciprocă verticală); deplasarea sec-

tiunii este posibilă numai pe verticală, iar rotirea sa este nulă. Secționînd acolo structura, se obține situația din figura 147, *b*, care este echivalentă cu semistructura convențională din figura 147, *c*, unde s-a introdus în axă o încastrare care permite deplasări pe verticală (încastrare cu numai două legături). Dacă același cadru este încărcat *antisimetric*, ca în figura 147, *d*, în secțiunea din axa de simetrie $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ și $X_3 \neq 0$; de data aceasta deplasarea secțiunii pe verticală este nulă, ca incompatibilă cu antisimetria, deci se poate produce numai deplasare pe orizontală și rotire. Prin secționare se ajunge la situația din figura 147, *e*, care este echivalentă cu semistructura din figura 147, *f*, unde s-a introdus în axă un reazem simplu de reacțiune verticală. De menționat că legăturile convenționale pentru semistructuri rămîn aceleași, dacă în locul barei frînte *2-4-5* cadrul ar fi avut o bară dreaptă *2-5*, tăiată la mijloc de axa de simetrie.

La cadrul din figura 147, *g*, axa de simetrie trece printr-un stîlp. Pentru componenta *simetrică* a încărcării, deformata rezultă simetrică, și deci nodul central nu se poate deplasa pe orizontală și nici roti, astfel că cele două jumătăți ale cadrului pot fi considerate ca încastrate în acel punct. Se ajunge la semistructura din figura 147, *h*. Pentru componenta *antisimetrică* a încărcării, stîlpul central se deformează și deci acesta trebuie să figureze în semistructură, ca în figura 147, *i*. Rămîn de stabilit numai condițiile particulare ce i se impun, anume *lungimea transformată convențională care trebuie adoptată pentru stîlpul central în semistructură*, spre a ajunge la aceleași rezultate. Se ține seama că mărimile coeficienților și ale termenilor liberi din ecuațiile de condiție pentru semistructură trebuie să fie jumătate din cele corespunzătoare întregii structuri.

Încărcînd sistemul de bază cu o necunoscută-unitate antisimetrică, diagrama de momente încovoietoare de pe stîlpul central al întregii structuri se împarte în părți egale pe cele două semistructuri. În consecință, dacă lungimea transformată λ_{45} ar fi luată aceeași, la efectuarea integralei produsului ordonatelor a două diagrame s-ar obține pentru stîlpul central al semistructurii un rezultat de $2 \cdot 2 = 4$ ori mai mic. Ca acest rezultat să fie numai de două ori mai mic, stîlpul central al semistructurii trebuie considerat cu o lungime transformată $\lambda'_{45} = 2\lambda_{45}$, deci cu un moment de inerție convențional $I' = I/2$

Din examinarea semistructurilor obținute pentru cele două componente ale încărcării rezultă că numărul gradelor de nedeterminare statică ale structurii date se regăsește în cele două semistructuri. Astfel, cadrul din figura 147, *a* este pe ansamblu de $3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$ ori static nedeterminat, în timp ce semistructura din figura 147, *c* este de trei ori static nedeterminată, iar semistructura din figura 147, *f* de două ori.

5. Utilizarea concomitentă a mai multor sisteme de bază

S-a arătat că pentru aplicarea avantajoasă a metodei eforturilor este necesară construirea a *n* diagrame unitare, urmărind în cît mai mare măsură ortogonalizarea lor două cîte două. În acest scop se pornește de la ideea generală a meto-

dei, alegînd necunoscutele suplimentare prin trecerea la un sistem de bază static determinat și construind apoi diagramele unitare pe acest sistem, încărcîndu-l succesiv cu fiecare necunoscută-unitate.

De fapt, ceea ce interesează sînt diagramele; esența problemei este de a alege n diagrame *distincte*, care să corespundă cît mai bine scopului urmărit. Utilizarea sistemului de bază se justifică prin necesitatea de a asigura că diagramele folosite satisfac, fiecare în parte, condiția de echilibru static. Cînd se lucrează cu necunoscutele inițiale, diagramele unitare rezultă automat distincte; dacă se folosesc grupări de necunoscute, această condiție trebuie asigurată în mod special.

Se poate arăta că obținerea unor diagrame unitare avantajoase nu este de fapt legată de un anumit sistem de bază și de anumite grupări de necunoscute specifice acestuia. Fie un sistem de bază, încărcat cu o grupare de necunoscute, căreia îi corespunde diagrama unitară m'_{xi}. Nimic nu se opune ca în acest sistem să se considere restabilite anumite legături și suprimate altele, numărul lor rămînînd același. Prin această operație se trece de fapt de la un sistem de bază la altul. Pentru legăturile restabilite, forțele exterioare care acționau acolo în sistemul de bază inițial devin eforturi, iar eforturile existente în legăturile care se suprimă devin forțe exterioare. Situația de echilibru nu se modifică și diagrama m'_{xi} rămîne aceeași; ea apare acum ca produsă de noile forțe exterioare, pe noul sistem de bază care a rezultat, deci ca diagramă unitară a unei grupări de necunoscute specifică acestui nou sistem de bază.

Pentru lămurirea acestei idei, fie un cadru etajat cu o singură deschidere, la care sistemul de bază s-a obținut prin secționarea riglelor. Urmărind folosirea unor diagrame unitare cît mai restrînse, limitate de exemplu la barele unui singur etaj, să admitem că s-a ajuns la diagrama din figura 148, *a* pentru gruparea de necunoscute indicată. Dacă se restabilește acum continuitatea riglei intermediare, refăcînd cele trei legături care fuseseră inițial suprimate acolo prin secționare, și dacă se suprimă alte trei legături, secționînd de exem-

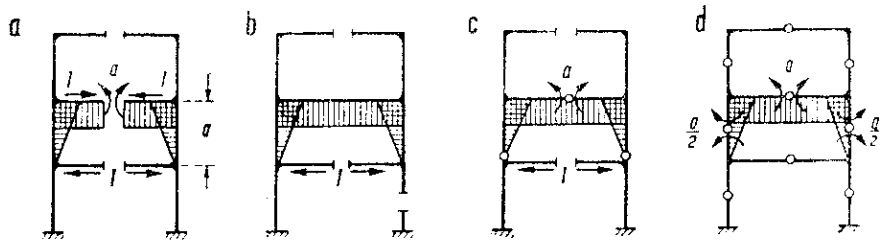


Fig. 148

plu unul din stîlpii etajului inferior, se ajunge la situația din figura 148, *b*. Aceasta reprezintă un alt sistem de bază al cadrului dat, pe care acționează sarcina-unitate a uneia dintre necunoscutele sale, diagrama unitară rămînînd aceeași. Alte variante ale acestui procedeu se văd în figurile 148, *c* și *d*; se poate astfel obține orice alt sistem de bază static determinat.

Se ajunge la concluzia: *o diagramă care a fost trasată pe un anumit sistem de bază poate fi obținută pe oricare alt sistem de bază al aceleiași structuri*. De fiecare dată ea va corespunde unei necunoscute, sau unei grupări de necunoscute specifice sistemului de bază considerat. Înseamnă că o diagramă unitară trasată pe un sistem de bază pentru o grupare de necunoscute mai complicată poate fi obținută pe un alt sistem de bază pentru o grupare mai simplă. Aceasta permite ca justificarea diagramelor unitare alese să se facă pe un același sistem de bază, sau pe sisteme de bază diferite, după cum este mai simplu. *Se pierde astfel legătura diagramei cu un anumit sistem de bază.*

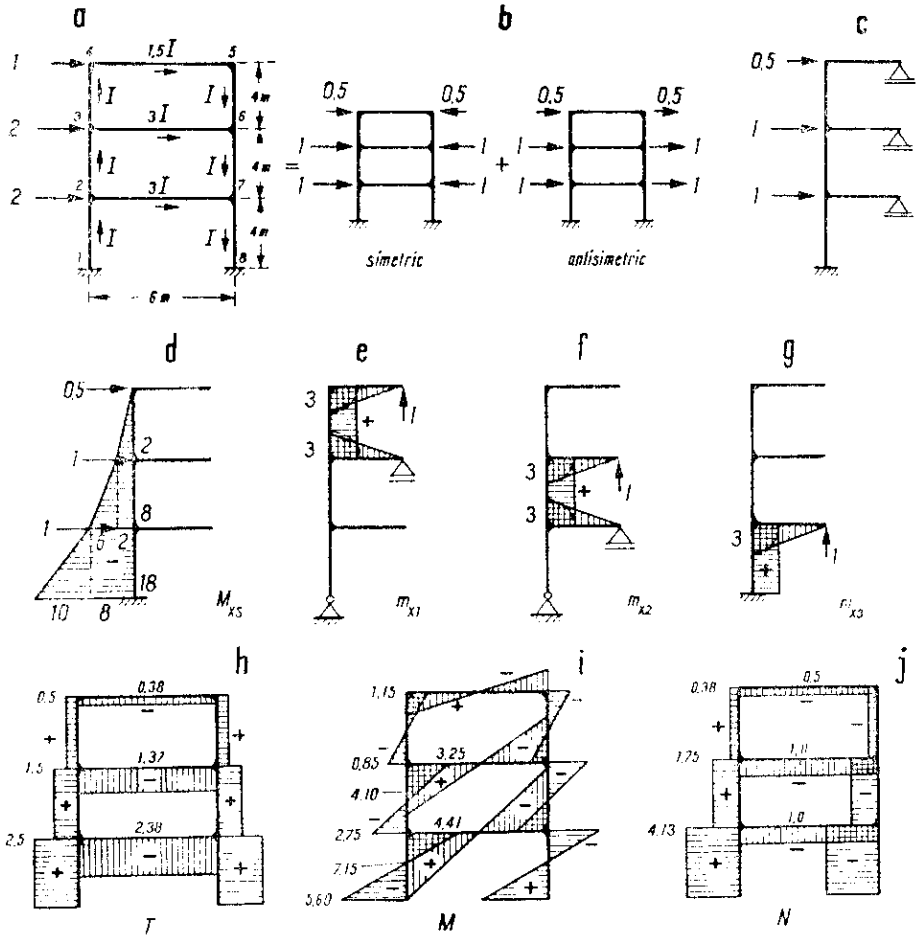


Fig. 149

Modul de aplicare a metodei eforturilor rămîne același. Dacă se utilizează concomitent mai multe sisteme de bază pentru trasarea diagramelor de forma

m_{xi} și M_{xs}, concluziile de mai sus permit să se poată totuși considera că *toate diagramele au fost obținute pe un sistem de bază unic*, pentru diferite grupări de necunoscute specifice acestuia. Trebuie desigur controlat ca diagramele unitare respective să fie liniar independente, deoarece această condiție nu se mai realizează automat.

Practic, posibilitatea utilizării mai multor sisteme de bază la trasarea diagramelor m_{xi} devine eficientă numai la anumite structuri. Principalul avantaj al acestei posibilități constă în faptul că *se poate separa alegerea sistemului de bază pentru diagrama M_{xs}, de sistemul sau sistemele de bază pentru diagramele unitare*. Diagramele unitare depind numai de alcătuirea structurii și la trasarea lor trebuie să se urmărească anularea unui număr cît mai mare de coeficienți secundari. Diagramele M_{xs} depind în primul rînd de sarcinile date, astfel că pentru fiecare situație de încărcare trebuie ales sistemul de bază potrivit, care să conducă la diagrame cît mai simple.

Pentru exemplificare, fie cadrul etajat din figura 149, *a*, încărcat cu sarcini orizontale aplicate la nivelul riglelor, provenind din acțiunea vîntului. Descompunînd încărcarea dată într-o componentă simetrică și una antisimetrică, cum se vede în figura 149, *b*, se constată că prima componentă dă numai forțe axiale de mărime cunoscută în barele orizontale. Rezultă că rezolvarea cadrului trebuie făcută numai pentru componenta antisimetrică. Se folosește în acest scop semistructura din figura 149, *c*, care este de trei ori static nedeterminată și se alege pentru fiecare caz de încărcare sistemul de bază cel mai potrivit. Astfel, pentru diagrama M_{xs} s-a considerat sistemul de bază din figura 149, *d*, iar pentru diagramele unitare m_{x1}, m_{x2} și m_{x3} s-au folosit sistemele de bază din figurile 149, *e-g*: la acestea din urmă, fiecare dintre diagrame se întinde numai pe barele unui singur etaj.

Lungimile transformate ale barelor sînt ($I_c=I$)

$$\lambda_{12}=\lambda_{23}=\lambda_{34}=\lambda_{56}=\lambda_{67}=\lambda_{78}=4 \text{ m}, \quad \lambda_{45}=4 \text{ m}, \quad \lambda_{36}=\lambda_{27}=2 \text{ m}.$$

Calculul coeficienților și al termenilor liberi se face pe semistructură. Considerîndu-i multiplicați cu $6\,EI_c/3^2$, rezultă numere întregi. Se ajunge la următoarele ecuații de condiție

$$15\,X_1 - X_2 - 1 = 0, \quad -X_1 + 13\,X_2 - 52 = 0, \quad -X_1 + 14\,X_2 - X_3 - 20 = 0,$$

din care se găsesc mărimile necunoscutelor $X_1=0{,}38$, $X_2=1{,}75$ și $X_3=4{,}13$. Aplicînd suprapunerea, se obține diagrama de momente încovoietoare din figura 149, *i*, care este antisimetrică. De asemenea, s-au trasat diagramele T și N (fig. 149, *h* și *j*). La ultima ținîndu-se seamă și de componenta simetrică a încărcării.

CAPITOLUL X

APLICAREA METODEI EFORTURILOR LA GRINZI STATIC NEDETERMINATE

A. GRINZI CONTINUE

1. Generalități

Grinzile continue sînt grinzi drepte așezate pe mai multe reazeme, dintre care unul este fix (articulație) și celelalte sînt mobile; prin aceasta, variația de lungime a barei rămîne liberă. Sub acțiunea sarcinilor, grinda se deformează, respectînd continuitatea pe reazemele intermediare (fig. 150, *a*), astfel că cele două ramuri ale deformatei au în dreptul reazemului tangentă comună; aceasta reprezintă *condiția de continuitate* pe reazemul respectiv.

Gradul de nedeterminare statică al grinzii continue este egal cu numărul reazemelor simple intermediare, deoarece reazemele de la extremități sînt suficiente pentru a fixa grinda în planul sarcinilor. Cînd o extremitate este încastrată, se adaugă o nedeterminare în plus.

La aplicarea metodei eforturilor este indicat ca alegerea sistemului de bază să fie astfel încît diagrama M_{xs} să nu se îndepărteze prea mult de diagrama totală $M_{xs}=M_{xs}+\Sigma m_{xi}X_i$. În acest caz, corecția $\Sigma m_{xi}X_i$ are mărime redusă în raport cu M_{xs}, ceea ce avantajează aproximația calculului numeric; dacă cei doi termeni (care au semne contrare) ar fi de mărimi apropiate, o mică eroare la unul dintre ei conduce la efecte considerabil mai mari asupra diferenței. Din acest punct de vedere, nu este indicat să se treacă la sistemul de bază prin suprimarea reazemelor intermediare; s-ar ajunge la o grindă pe două reazeme, avînd ca deschidere întreaga lungime a grinzii.

Este mai avantajos să se introducă articulații în secțiunile de pe reazemele intermediare și în încastrările de la extremități. Se ajunge astfel la un sistem de bază static determinat, alcătuit dintr-o *succesiune de grinzi simplu rezemate* (fig. 150, *b*); necunoscute suplimentare sînt momentele încovoietoare din secțiunile unde s-a întrerupt continuitatea grinzii. Fiecare dintre grinzile simplu rezemate este încărcată cu sarcinile care-i revin și cu momente de continuitate — admise inițial pozitive — aplicate la extremități (fig. 150, *c*).

În figura 150, *c* s-a reprezentat una dintre grinzile pe două reazeme care alcătuiesc sistemul de bază. Diagramele sale de eforturi sînt stabilite în funcție de sarcini și de necunoscutele suplimentare M_i și M_j. Pentru diferențiere, se notează cu V^0, T^0 și M^0 reacțiunile și eforturile datorite numai acțiunii sarcinilor pe grinda simplu rezemată. Reacțiunile sînt

$$V_i=V_i^0+(M_j-M_i)/l \quad \text{și} \quad V_j=V_j^0-(M_j-M_i)/l.$$

care arată că reacțiunile grinzii simplu rezemate se corectează cu cantitatea $\Delta V = (M_j - M_i)/l$. Expresiile stabilite se referă la o singură deschidere. Dacă se ține seama că reacțiunea totală dintr-un reazem intermediar al grinzii continue provine de la cele două deschideri alăturate (fig. 150, *d*), se obține

$$V_j = V_{ji} + V_{jk} = V_{ji}^0 + V_{jk}^0 + (M_i - M_j)/l_{ij} + (M_k - M_j)/l_{jk}, \qquad (10.1)$$

expresie în care se vede efectul continuității asupra mărimii reacțiunilor.

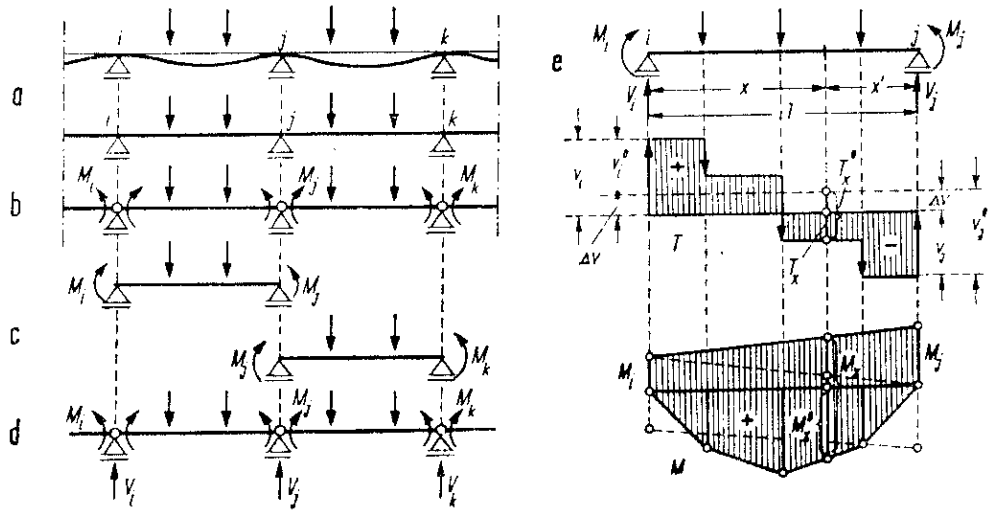


Fig. 150

Pentru forța tăietoare din secțiunea curentă rezultă

$$T_x = T_x^0 + (M_j - M_i)/l, \qquad (10.2)$$

care arată că diagrama T se obține din diagrama T^0 prin deplasarea axei de referință, paralel cu ea însăși, cu cantitatea ΔV. Pentru momentul încovoietor, la diagrama M^0 se adaugă — cu semnele lor — diagramele triunghiulare date de momentele exterioare M_i și M_j aplicate la extremități. În secțiunea curentă rezultă

$$M_x = M_x^0 + M_i \cdot (l - x)/l + M_j \cdot x/l = M_x^0 + M_i \xi' + M_j \xi, \qquad (10.3)$$

unde s-a notat $\xi = x/l$ și $\xi' = (l - x)/l$.

Expresiile (10.1)—(10.3) permit să se determine reacțiunile și să se traseze diagramele de eforturi ale grinzii continue, dacă se cunosc mărimile necunoscutelor suplimentare. Toată problema se reduce deci la aflarea acestor necunoscute.

2. Ecuația celor trei momente

Fie o porțiune dintr-o grindă continuă (fig. 151, *a*), pentru care s-a efectuat trecerea la sistemul de bază (fig. 151, *b*). Ecuațiile de condiție trebuie să exprime continuitatea pe reazemele intermediare; astfel, pentru un reazem intermediar oarecare j, condiția de continuitate cere ca rotirea relativă θ_j să fie nulă. Rezultă ecuația

$$\theta_{j1}M_1 + \cdots + \theta_{ji}M_i + \theta_{jj}M_j + \theta_{jk}M_k + \cdots + \theta_{jn}M_n + \theta_{js} = 0,$$

unde

$$\theta_{ji} = \int m_{xi}m_{xj}\frac{ds}{EI} \quad \text{și} \quad \theta_{js} = \int M_{xs}m_{xj}\frac{ds}{EI}.$$

Diagrama M_{xs} este arătată în figura 151, *c* și este alcătuită din diagramele M_x^0 ale deschiderilor considerate ca grinzi simplu rezemate. Diagramele unitare m_{xi}, m_{xj}, ... sînt trasate în figura 151, *d*; fiecare dintre acestea are formă triunghiulară și se întinde numai pe cele două deschideri alăturate reazemului unde s-a aplicat perechea de momente-unitate.

Pentru ecuația de continuitate pe reazemul j, diagrama unitară care intervine în expresiile tuturor coeficienților este m_{xj} (hașurată). Se vede imediat

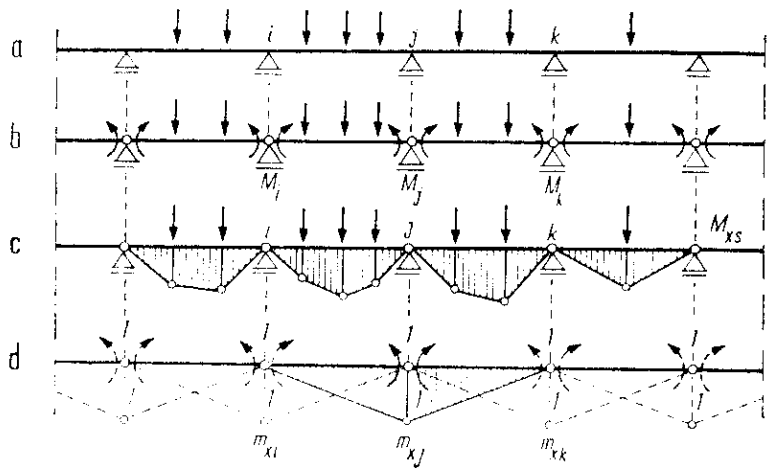


Fig. 151

că un coeficient oarecare θ_{ji} poate fi diferit de zero numai dacă reazemul i este vecin cu reazemul j. Înseamnă că ecuația de continuitate se reduce la

$$\theta_{ji}M_i + \theta_{jj}M_j + \theta_{jk}M_k + \theta_{js} = 0,$$

care cuprinde numai necunoscutele suplimentare *de pe trei reazeme succesive*. Calculînd coeficienții și termenii liberi în forma dată de tabela 5, se obține:

— grindă continuă cu secțiune *constantă* în deschideri

$$\lambda_{ij}M_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})M_j + \lambda_{jk}M_k + \lambda_{ij} \cdot m_j^{st} + \lambda_{jk} \cdot m_j^{dr} = 0; \qquad (10.4)$$

— grindă continuă cu secțiune *variabilă* în deschideri

$$c_{ij}\lambda_{ij}M_i + 2(c'_{ij}\lambda_{ij} + c'_{jk}\lambda_{jk})M_j + c_{jk}\lambda_{jk}M_k + s'_{ij}\lambda_{ij}\cdot m_j^{st} + s'_{jk}\lambda_{jk}\cdot m_j^{dr} = 0. \qquad (10.5)$$

Aceasta este *ecuația celor trei momente*, cunoscută și sub numele de *ecuația lui Clapeyron*.

Se va scrie cîte o ecuație de trei momente pentru fiecare reazem *intermediar* exprimînd continuitatea grinzii în dreptul reazemului respectiv. Se obține ast-

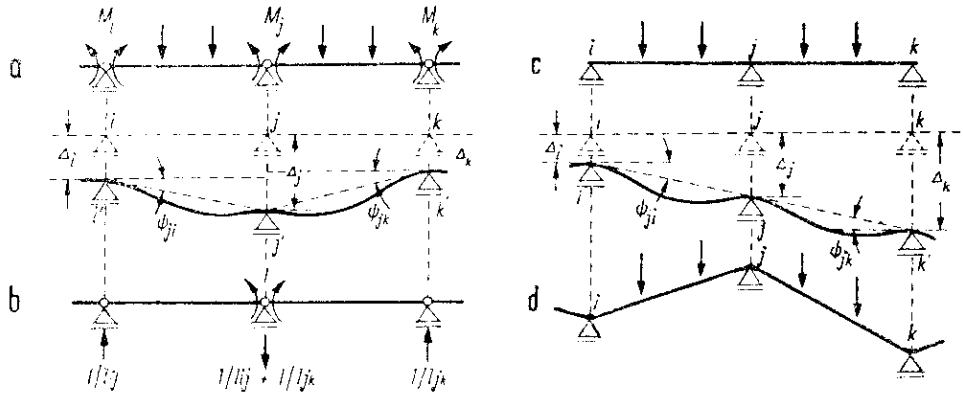


Fig. 152

fel un sistem de ecuații, în număr egal cu al necunoscutelor suplimentare; fiecare conține numai cîte trei necunoscute, ceea ce ușurează substanțial rezolvarea.

Cînd reazemele grinzii continue pot suferi *denivelări*, ecuațiile (10.4) și (10.5) trebuie completate cu termenul liber θ_{jc}. Admițînd că reazemele i, j și k se denivelează cu cantitățile Δ_i, Δ_j și Δ_k, poziția deformată are aspectul din figura 152, *a*. Situația auxiliară de încărcare este arătată în figura 152, *b*, unde pe sistemul de bază s-a aplicat sarcina-unitate $M_j = 1$ și s-au determinat reacțiunile corespunzătoare. Utilizînd expresia (9.8), se obține

$$\theta_{jc} = -\sum \bar{r}_j \Delta_r = \frac{\Delta_i}{l_{ij}} - \Delta_j\left(\frac{1}{l_{ij}} + \frac{1}{l_{jk}}\right) + \frac{\Delta_k}{l_{jk}}$$

sau, ținînd seama că ecuațiile de forma (10.4) și (10.5) sînt multiplicate cu constanta $6EI_c$, se poate scrie

$$6EI_c\theta_{jc} = -6EI_c\left[\frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}} + \frac{\Delta_j - \Delta_k}{l_{jk}}\right] = -6EI_c(\psi_{ji} + \psi_{jk}), \qquad (10.6)$$

unde ψ_{ji} și ψ_{jk} sînt unghiurile cu care s-au rotit barele j-i și j-k datorită cedării reazemelor.

Introducînd termenul $-6EI\,\theta_{jc}$ în membrul doi al ecuației (10.5), se obține

$$c_{ij}\lambda_{ij}M_i + 2(c'_{ij}\lambda_{ij} + c'_{jk}\lambda_{jk})M_j + c_{jk}\lambda_{jk}M_k + s'_{ij}\lambda_{ij}m_j^{st} + s'_{jk}\lambda_{jk}m_j^{dr} = 6EI_c\left[\frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}} + \frac{\Delta_j - \Delta_k}{l_{jk}}\right]. \qquad (10.7)$$

care reprezintă forma generală a ecuației celor trei momente. Cînd pe deschiderile grinzii continue secțiunea este constantă, $c' = c = c'' = s' = s'' = 1$.

În legătură cu ecuația celor trei momente sînt de făcut unele observații:

(1) Ecuația se poate aplica și unor grinzi continue cu axă poligonală (fig. 152, *d*), deoarece modul de stabilire nu a impus nici o restricție în această privință.

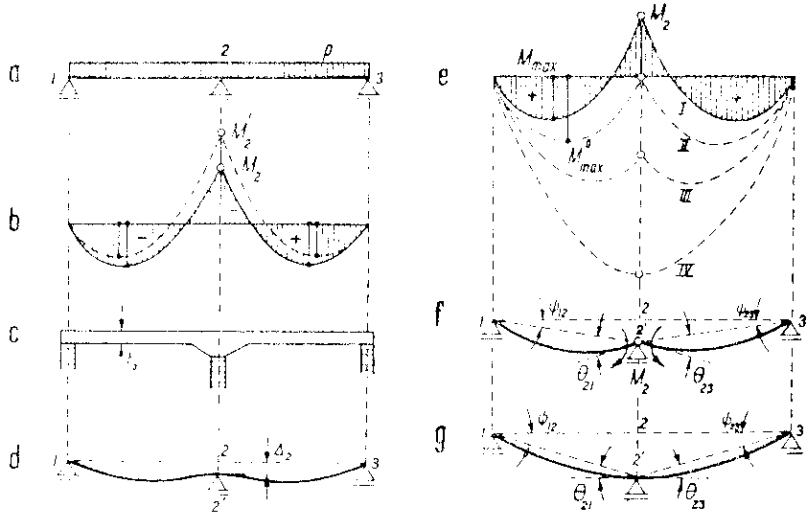


Fig. 153

(2) Cînd grinda continuă ar avea *console* la extremități, efectul acestora se poate introduce direct în ecuație. Astfel, să considerăm o porțiune de grindă *i-j-k* (informativ fig. 152, *c*), admițînd că după reazemul *k* ar urma consola. În acest caz, *ultimul reazem intermediar* este *j* și condiția de continuitate pe acest reazem are forma (10.7), unde momentul încovoietor M_k din secțiunea de pe reazemul *k* nu mai este o cantitate static nedeterminată, ci are *mărimea cunoscută* $M_k = M_{cons}$, care se introduce cu semnul său.

(3) La grinzi continue cu secțiune variabilă, diagrama de momente încovoietoare se corectează față de cazul grinzii cu secțiune constantă. Calitativ, fenomenul este arătat în figura 153, *b* pentru o grindă continuă pe două deschideri. Diagrama trasată plin corespunde cazului $I = const.$, iar diagrama trasată punctat corespunde grinzii din figura 153, *c*, unde în zona reazemului central secțiunile au fost întărite prin introducerea unor vute.

(4) Denivelarea reazemelor are efecte importante asupra diagramei de momente încovoietoare. Calitativ, fenomenul este arătat în figura 153, *e* tot pentru o grindă continuă cu două deschideri. Diagrama trasată plin (caz *I*) corespunde cazului cînd reazemul central *2* nu este denivelat. De îndată ce apare o denivelare a acestui reazem, momentul încovoietor M_2 începe să scadă, astfel că zonele pozitive ale diagramei cresc. Pentru o anumită valoare a denivelării, $M_2 = 0$, deși grinda este continuă pe reazemul *2* (caz *II*), astfel că cele două deschideri

se comportă ca grinzi simplu rezemate. Dacă denivelarea se accentuează, diagrama arată ca în cazul *III*, grinda continuă lucrînd mai defavorabil decît dacă deschiderile *1-2* și *2-3* ar fi simplu rezemate. Cazul limită corespunde ieșirii din funcțiune a reazemului intermediar (caz *IV*), grinda lucrînd ca simplu rezemată pe deschiderea *1-3*.

Explicația rezultă cercetînd fenomenul fizic în sistemul de bază (fig. 153, *f*). Cît timp $\theta_{2l} > \psi_{12}$, între tangentele duse în reazemul *2* la ramurile deformatei există un unghi, astfel că pentru restabilirea continuității este necesară aplicarea unui moment încovoietor M_2 avînd sensul din figură (negativ). Cînd denivelarea ajunge astfel încît $\theta_{2l} = \psi_{12}$, cele două tangente se suprapun (fig. 153, *g*), și deci continuitatea se realizează fără să mai fie necesară aplicarea momentului M_2. Pentru denivelări mai mari, $\theta_{2l} < \psi_{12}$, și deci pentru restabilirea continuității sensul de acțiune al momentului M_2 trebuie inversat.

(5) Pot fi situații particulare cînd denivelările să nu influențeze. Un caz evident este acela cînd $\Delta_i = \Delta_j = \Delta_k$, deci o tasare *uniformă* de reazeme, deoarece rezultă $\psi_{ji} = \psi_{jk} = 0$. Un alt caz este definit de condiția $\psi_{ji} + \psi_{jk} = 0$, unde aceste unghiuri sînt admise pozitive cînd $\Delta_j > \Delta_i$, respectiv $\Delta_j > \Delta_k$; condiția se realizează dacă — după denivelare — *cele trei reazeme consecutive se găsesc în linie dreaptă*, ca în figura 152, *c*.

3. Grinzi continue cu extremități încastrate

a. **Extremitate încastrată perfect.** Prezența încastrării mărește cu o unitate gradul de nedeterminare statică; ecuația de condiție corespunzătoare exprimă că înclinarea tangentei la deformată în această secțiune trebuie să fie *nulă*. Pentru sistemul de bază din figura 154, *a*, ecuația are forma

$$\theta_1 = \theta_{11} M_1 + \theta_{12} M_2 + \theta_{1s} = 0.$$

Utilizînd diagramele unitare din figura 154, *c* și diagrama M_{1s} din figura 154, *b*, se obține pentru cazul deschiderilor cu secțiune constantă

$$2\lambda_{12} M_1 + \lambda_{12} M_2 + \lambda_{12} m_1 = 0, \quad \text{sau} \quad 2M_1 + M_2 + m_1 = 0, \tag{10.8}$$

iar în cazul deschiderilor cu secțiune variabilă

$$2c'_{12}\lambda_{12} M_1 + c_{12}\lambda_{12} M_2 + s'_{12}\lambda_{12} m_1 = 0$$

sau

$$2c'_{12} M_1 + c_{12} M_2 + s'_{12} m_1 = 0 \tag{10.9}$$

Din ecuațiile (10.8) și (10.9) rezultă pentru momentul încovoietor din încastrare următoarele expresii

$$M_1 = -(M_2 + m_1)/2 \quad \text{și} \quad M_1 = -(c_{12} M_2 + s'_{12} m_1)/2c_{12},$$

care, în cazul cînd deschiderea *1-2* ar fi *neîncărcată*, conduc la rapoartele

$$M_2/M_1 = -2 \quad \text{și} \quad M_2/M_1 = -2c'_{12}/c_{12}. \tag{10.10}$$

Deoarece diagrama de momente încovoietoare variază liniar cînd deschiderea *1-2* este neîncărcată, rapoartele (10.10) definesc poziția secțiunii de moment

încovoietor nul, care corespunde punctului de inflexiune al deformatei. Aceste rapoarte vor fi utilizate mai departe, la *metoda punctelor fixe*.

Ecuațiile de continuitate (10.8) și (10.9) pot fi obținute și prin aplicarea directă a ecuației celor trei momente. Pentru aceasta, se consideră că — în locul încastrării — grinda continuă ar mai avea o deschidere fictivă *0-1* la stînga reazemului simplu *1* (fig. 154, *d*). Ca această deschidere fictivă să aibă asupra grinzii același efect ca și încastrarea, este necesar și suficient ca tangenta la deformată în reazemul *1* să rămînă orizontală, oricare ar fi alcătuirea grinzii continue și sarcinile aplicate. Aceasta se realizează cînd porțiunea *0-1* nu se poate deforma, deci cînd $l_{01}=0$ sau $I_{01}=\infty$; în ambele cazuri rezultă $\lambda_{01}=l_{01}\cdot I_c/I_{01}=0$; condiția este deci ca *lungimea transformată a deschiderii fictive să fie nulă*. Scriind ecuația celor trei momente pe intervalul *0-1-2*, se obține în cazul secțiunilor constante

$$2(\lambda_{01}+\lambda_{12})M_1+\lambda_{12}M_2+\lambda_{12}m_1=0,$$

iar în cazul secțiunilor variabile

$$2(c''_{01}\lambda_{01}+c'_{12}\lambda_{12})M_1+c_{12}\lambda_{12}M_2+s'_{12}\lambda_{12}m_1=0$$

unde, ținînd seama că $\lambda_{01}=0$, se regăsesc ecuațiile (10.8) și (10.9).

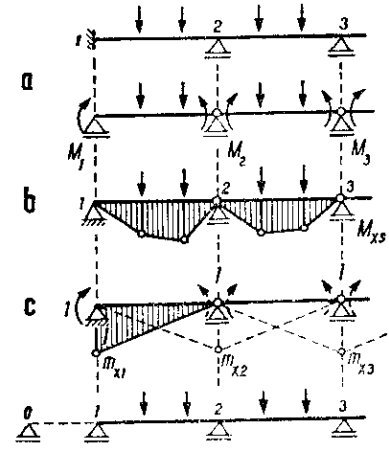


Fig. 154

b. **Extremitate încastrată elastic.** Încastrarea perfectă se realizează rareori în practică. Materialele sînt deformabile, astfel că încastrarea cedează într-o anumită măsură și tangenta la deformată se înclină cu un unghi $\theta\neq 0$. Cînd asemenea cedări sînt mici, ele pot fi neglijate și — prin schematizare — se admite încastrarea perfectă. În celelalte cazuri trebuie ținut seama că încastrarea se realizează numai parțial.

În genere, efectul încastrărilor parțiale se cuprinde în categoria cedărilor de rezemări și mărimile probabile ale cedărilor se apreciază pe baza unor elemente în majoritate exterioare structurii considerate. Aici se va examina numai cazul cînd se poate admite *o comportare perfect elastică* a încastrării (de exemplu, încastrare într-un zid) și i se aplică *legea proporționalității* în domeniul micilor deplasări. Pentru o asemenea situație se poate defini în mod convențional un grad de *încastrare*.

Fie o grindă continuă (fig. 155), pentru care se consideră în extremitatea *1* trei situații diferite: (*a*) încastrare perfectă; (*b*) încastrare elastică; (*c*) articulație. În ultimul caz, înclinarea tangentei la deformată este θ_1^0. Pornind de la acest caz și urmărind să realizăm pe celelalte două, înseamnă că în extremitate trebuie aplicat un moment care să anuleze rotirea θ_1^0 (pentru cazul *a*), sau numai o parte din această rotire, anume $\theta_1^0-\theta_1$ (pentru cazul *b*). Aceste momente reprezintă efectul încastrării: $\mathfrak{M}_1$ pentru încastrarea perfectă și M_1

pentru încastrarea parțială. Aplicînd legea proporționalității și notînd cu K momentul care — pentru grinda continuă dată — produce rotirea extremității *1* cu un unghi egal cu unitatea, se poate scrie

$$\mathfrak{M}_1 = K\theta_1^0 \quad \text{și} \quad M_1 = K(\theta_1^0 - \theta_1).$$

Se definește în mod convențional *gradul de încastrare în extremitatea 1* (pentru cazul *b*), prin raportul acestor două expresii, anume

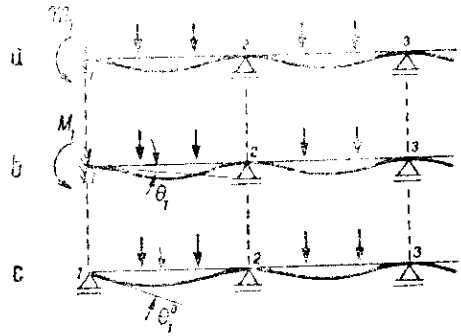


Fig. 155

$$\eta_1 = (\theta_1^0 - \theta_1)/\theta_1^0, \text{ sau } \eta_1 = M_1/\mathfrak{M}_1. \quad (10.11)$$

Pentru încastrare perfectă $\theta_1 = 0$, respectiv $M_1 = \mathfrak{M}_1$, și deci $\eta_1 = 1$; cînd extremitatea este articulată $\theta_1 = \theta_1^0$, respectiv $M_1 = 0$, și deci $\eta_1 = 0$. Pentru situații intermediare rezultă $0 < \eta_1 < 1$. Mărimea gradului de încastrare *se apreciază* în raport cu alcătuirea încastrării, natura materialului etc., și deci apare ca o dată a problemei de Statica construcțiilor.

Pentru introducerea gradului de încastrare în ecuațiile de forma (10.8) și (10.9), se pornește de la condiția de continuitate în cazul încastrării perfecte

$$\theta_1 = \theta_{11}\mathfrak{M}_1 + \theta_{12}M_2 + \theta_{1s} = 0,$$

unde s-a introdus pentru M_1 valoarea particulară $\mathfrak{M}_1$ care anulează rotirea θ_1. În cazul încastrării elastice

$$\theta_1 = \theta_{11}M_1 + \theta_{12}M_2 + \theta_{1s} \neq 0,$$

deoarece în acest caz $M_1 < \mathfrak{M}_1$. Înseamnă că pentru a anula rotirea θ_1 trebuie să se aplice în extremitatea *1* un moment mai mare, anume $M_1/\eta_1 = \mathfrak{M}_1$, conform celei de-a doua relații (10.11). Deci

$$\theta_{11}\frac{M_1}{\eta_1} + \theta_{12}M_2 + \theta_{1s} = 0,$$

unde, introducînd mărimile coeficienților și ale termenului liber, se obțin ecuațiile

$$2\frac{M_1}{\eta_1} + M_2 + m_1 = 0, \quad \text{sau} \quad 2c'_{12}\frac{M_1}{\eta_1} + c_{12}M_2 + s'_{12}m_1 = 0. \quad (10.12)$$

Rezultă că, în cazul unei încastrări elastice în extremitatea *1*, necunoscuta M_1 se introduce în ecuația de continuitate împărțită la gradul de încastrare η_1.

Trebuie arătat că forma simplă a ecuațiilor (10.12) se datorește admiterii unei aproximații (anume că valoarea M_2 din secțiunea de pe reazemul *2* rămîne neschimbată cînd se trece în extremitatea *1* de la încastrarea perfectă la încastrarea parțială), acceptabilă dacă se ține seama că mărimea gradului de încastrare se stabilește prin apreciere.

4. Grinzi static nedeterminate cu o singură deschidere

a. **Grinda cu o încastrare și un reazem simplu** (fig. 156, *a*). Această grindă este o singură dată static nedeterminată. Înlocuind încastrarea cu o deschidere fictivă *2-3*, caracterizată prin $\lambda_{23}=0$ (fig. 156, *b*) și exprimînd continuitatea pe reazemul intermediar *2*, se obține:

$$2M_2+m_2=0, \quad \text{deci} \quad M_2=-m_2/2, \tag{10.13}$$

care reprezintă expresia generală a momentului încovoietor din încastrare; sarcinile aplicate pe grindă sînt reprezentate prin caracteristica de încărcare m_2. Diagrama de momente încovoietoare are forma din figura 156, *c*, unde diagrama M_x^0 a fost corectată cu efectul încastrării.

În cazul particular al unei sarcini uniform distribuite (fig. 156, *d*), se obține

$$m_2=pl^2/4, \quad \text{și deci} \quad M_2=-pl^2/8,$$

valoare egală cu momentul încovoietor maxim pozitiv pentru grinda simplu rezemată. Ordonata maximă în deschidere rezultă $M_{max}=9pl^2/128\simeq pl^2/14{,}2$ și este situată în secțiunea definită de $\xi_m=3l/8$.

Dacă încastrarea suferă o denivelare Δ (fig. 156, *e*), continuitatea pe reazemul *2* — pentru cazul din figura 156, *b* — se scrie introducînd și termenul liber (10.6); se găsește

$$2\lambda_{12}M_2+\lambda_{12}m_2=6EI\cdot\Delta/l, \quad \text{deci} \quad M_2=-m_2/2+3EI\,\Delta/l^2. \tag{10.14}$$

Cei doi termeni ai expresiei au semne contrare, deci creșterea denivelării micșorează momentul M_2 și mărește ordonatele pozitive ale diagramei de momente încovoietoare; linia de referință *1-2* trece succesiv în pozițiile *1-2'*, *1-2''*, *1-2'''* (fig. 156, *f*). Situația este asemănătoare celei discutate în legătură cu figura 153. Astfel, mărimea denivelării pentru care grinda se comportă ca simplu rezemată, caracterizată prin condiția $M_2=0$, este $\Delta=m_2l^2/6EI$; pentru o încărcare uniform distribuită se obține $\Delta=pl^4/24EI$.

Cînd grinda ar avea *secțiune variabilă*, ecuația de continuitate are forma

$$2c''\lambda_{12}M_2+s''\lambda_{12}m_2=6EI_c\cdot\Delta/l,$$

din care se obține ($I_c=I_0$, $\lambda_{12}=l$)

$$M_2=-\frac{s''}{c''}\cdot\frac{m_2}{2}+\frac{3\,EI_0}{c''}\cdot\frac{\Delta}{l^2}, \tag{10.15}$$

analoagă cu expresia (10.14) și care conduce la concluzii similare. Pentru $\Delta=0$ se găsește

$$M_2=-\frac{s''}{c''}\cdot\frac{m_2}{2}, \tag{10.16}$$

formă mai generală a expresiei (10.13).

b. **Grinda dublu încastrată** (fig. 157, *a*). Acest tip de grindă este de două ori static nedeterminată. Se consideră înlocuite încastrările prin deschideri fictive *0-1* și *2-3*, avînd lungimile transformate $\lambda_{01}=0$ și $\lambda_{23}=0$, cum s-a dis-

cutat în legătură cu figura 154, *d*; condițiile de continuitate în rezemările *1* și *2* sînt

$$2M_1 + M_2 + m_1 = 0 \quad \text{și} \quad M_1 + 2M_2 + m_2 = 0,$$

din rezolvarea cărora rezultă

$$M_1 = -(2m_1 - m_2)/3 \quad \text{și} \quad M_2 = -(2m_2 - m_1)/3. \tag{10.17}$$

care sînt expresiile generale ale momentelor încovoietoare din cele două încastrări; sarcinile aplicate pe grindă sînt reprezentate prin caracteristicile de

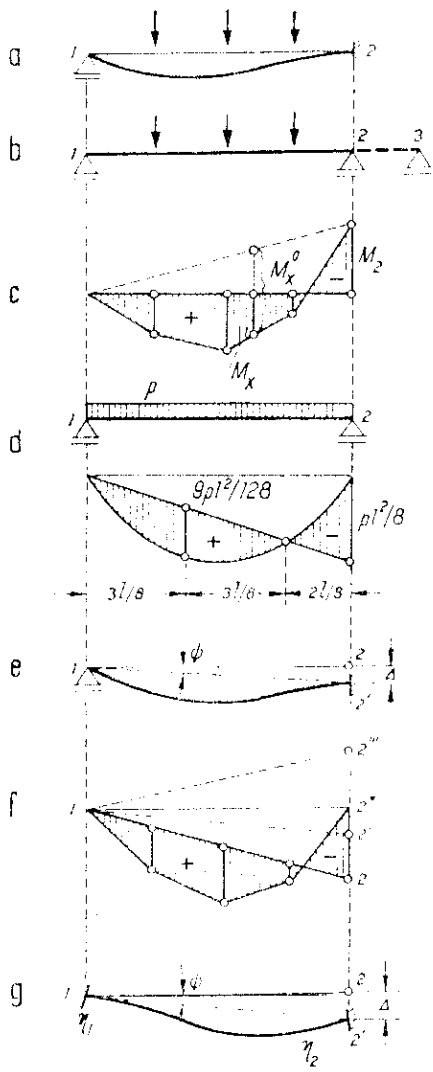


Fig. 156

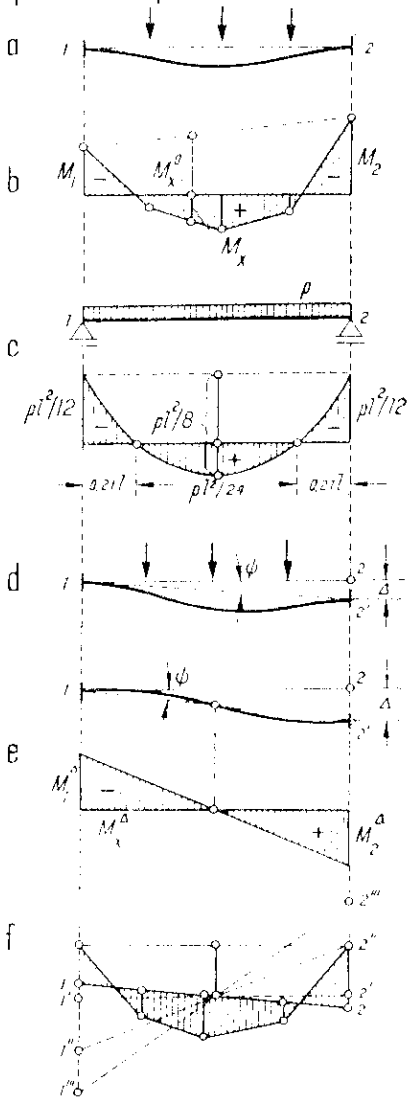


Fig. 157

încărcare m_1 și m_2. Diagrama de momente încovoietoare are forma din figura 157, *b*, unde diagrama M_x^0 a fost corectată cu efectul încastrărilor.

În cazul particular al sarcinii uniform distribuite (fig. 157, *c*), se obține

$$m_1 = m_2 = -pl^2/4, \text{ și deci } M_1 = M_2 = -pl^2/12,$$

valoare care reprezintă 2/3 din momentul încovoietor maxim pozitiv pentru grinda simplu rezemată. Ordonata maximă în deschidere rezultă $M_{max} = pl^2/8 - pl^2/12 = pl^2/24$; anularea momentului încovoietor se produce în secțiunile definite de $\xi_0 = \xi_0' = 0{,}21$.

Cînd între încastrări apare o denivelare relativă Δ (fig. 157, *d*), considerată pozitivă dacă rotirea axei barei se face în sens orar, condițiile de continuitate din extremitățile *1* și *2* trebuie completate cu termenul liber de forma (10.6); se obțin ecuațiile

$$2M_1 + M_2 + m_1 = -6EI\Delta/l^2 \text{ și } M_1 + 2M_2 + m_2 = +6EI\Delta/l^2,$$

din care rezultă expresiile momentelor încovoietoare din încastrări

$$M_1 = -(2m_1 - m_2)/3 - 6EI\Delta/l^2 \text{ și } M_2 = -(2m_2 - m_1)/3 + 6EI\Delta/l^2. \quad (10.18)$$

Aceste expresii arată că denivelarea Δ produce în încastrări momente egale și de semn contrar, anume $M_1^\Delta = -M_2^\Delta = -6EI\Delta/l^2$. Considerînd numai denivelarea, aspectul deformatei este ca în figura 157, *e*, cu punct de inflexiune la mijlocul deschiderii; diagrama de momente încovoietoare M_x este antisimetrică, mărginită de o variație liniară.

Cînd se produce denivelarea, diagrama M_x dată de sarcini se corectează cu diagrama M_x^Δ, cum se arată în figura 157, *f*. În secțiunea de mijloc a grinzii momentul încovoietor rămîne neschimbat; corectarea diagramei poate fi reprezentată prin rotirea liniei de referință *1-2*, aceasta trecînd succesiv în pozițiile *1'-2'*, *1''-2''*, *1'''-2'''*, pe măsură ce denivelarea crește. Poziția *1'-2'* corespunde situației cînd momentele încovoietoare din cele două încastrări devin egale. Egalînd expresiile acestora, se obține $\Delta = l^2(m_2 - m_1)/12EI$ și $M_1 = M_2 = -(m_1 + m_2)/6$; denivelarea este pozitivă sau negativă, după cum $m_2 \gtrless m_1$. Poziția *1''-2''* corespunde situației cînd momentul încovoietor din încastrarea *2* se anulează; pentru acest caz se găsește $\Delta_0 = l^2(2m_2 - m_1)/18EI$ și $M_1 = -(m_1 + m_2)/3$. Dacă denivelarea este mai mare decît Δ_0, M_2 devine pozitiv și grinda lucrează tot mai defavorabil. Apare clar că o grindă dublu încastrată poate fi distrusă, chiar dacă nu este încărcată cu sarcini, prin producerea unei denivelări suficient de mari.

Cînd grinda ar avea *secțiune variabilă*, ecuațiile de continuitate au forma

$$2c'M_1 + cM_2 + s'm_1 = -6EI_0\Delta/l^2 \text{ și } cM_1 + 2c''M_2 + s''m_2 = +6EI_0\Delta/l^2,$$

unde s-a ținut seama că $I_e = I_0$ și $\lambda_{12} = 1$. Rezolvînd ecuațiile și introducînd notația $z = 4c'c'' - c^2$, se obține

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{z}[2c''s'm_1 - cs''m_2 + (2c'' + c)6EI_0\Delta/l^2], \\ M_2 &= -\frac{1}{z}[2c's''m_2 - cs'm_1 + (2c' + c)6EI_0\Delta/l_2]. \end{aligned} \quad (10.19)$$

care sînt analoge cu expresiile (10.18) și conduc la concluzii asemănătoare. Pentru $\Delta = 0$ se găsește

$$M_1 = -\frac{1}{z}(2c''s'm_1 - cs''m_2) \quad \text{și} \quad M_2 = -\frac{1}{z}(2c's''m_2 - cs'm_1). \tag{10.20}$$

forme mai generale ale expresiilor (10.17).

c. **Grinda cu încastrări elastice la extremități.** Reprezintă o altă grupă din care prin particularizare se pot deduce cazurile examinate mai sus. Fie o grindă cu încastrări elastice la extremități, caracterizate prin coeficienții de flexie ε_1 și ε_2, la care se produce și o denivelare relativă Δ (fig. 158, *c*). Ecuațiile de continuitate au forma (10.12), la care trebuie introdus și termenul $-\Delta_i/l$ (10.6); se obțin ecuațiile

$$2c'M_1/\varepsilon_1 + cM_2 + s'm_1 = -6EI_0\Delta_i/l^2 \text{ și } cM_1 + 2c''M_2/\varepsilon_2 + s''m_2 = +6EI_0\Delta/l^2,$$

unde denivelarea este considerată pozitivă cînd rotirea axei barei se produce în sens orar. Rezolvînd ecuațiile și introducînd notația $z = 4c'c'' - c^2\varepsilon_1\varepsilon_2$, rezultă expresiile momentelor încovoietoare din încastrări

$$M_1 = -\frac{\varepsilon_1}{z}[2c''s'm_1 - c\varepsilon_2 s''m_2 + (2c'' + c\varepsilon_2)6EI_0\Delta/l^2]$$
$$M_2 = -\frac{\varepsilon_2}{z}[2c's''m_2 - c\varepsilon_1 s'm_1 + (2c' + c\varepsilon_1)6EI_0\Delta/l^2]. \tag{10.21}$$

Se pot face acum particularizări: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ — grinda dublu încastrată; $\varepsilon_1 = 0$ și $\varepsilon_2 = 1$ — grinda cu un reazem simplu și o încastrare; $c' = c'' = s'' = 1$ — grindă cu secțiune constantă.

5. Metoda [illegible]

Rezolvarea grinzilor continue poate fi sistematizată avantajos, cu ajutorul suprapunerii de efecte, considerînd succesiv că este încărcată numai cîte o singură deschidere. Se pot astfel trasa diagrame de eforturi pentru diferite situații de încărcare a grinzii continue, rezultînd din distribuții variate ale încărcărilor utile. La baza acestei metode stă studiul grinzii continue *cu o singură deschidere încărcată*.

a. **Semnificația și poziția punctelor fixe.** Fie grinda continuă din figura 158, *a*, încărcată numai pe o anumită deschidere, de exemplu deschiderea 3 *d*. Pe figură s-a schițat și poziția deformată corespunzătoare, care dă indicații asupra configurației diagramei de momente încovoietoare (fig. 158, *b*, curba
— În deschiderea încărcată apar două puncte de inflexiune ale axei deformate; în secțiunile de pe reazemele deschiderii se dezvoltă momente încovoietoare negative M_3 și M_6.
— În celelalte deschideri, axa deformată are numai cîte un singur punct de inflexiune, care definește poziția punctului de anulare pentru diagrama M; deoarece nu sînt încărcări, diagrama variază liniar și are ordonate de semn contrar pe cele două reazeme consecutive.

Se consideră mai întîi porțiunea de diagramă de la *stînga* deschiderii încărcate și se formează rapoartele ordonatelor ce mărginesc fiecare variație liniară, înscriind la numărător ordonata dinspre deschiderea încărcată. Rezultă

$$-\frac{M_5}{M_4}=k_4, \qquad -\frac{M_4}{M_3}=k_3, \qquad -\frac{M_3}{M_2}=k_2, \qquad -\frac{M_2}{M_1}=k_1, \tag{10.22}$$

unde semnul „minus" s-a introdus pentru a obține rapoarte pozitive. Rapoartele k_1, k_2, ... definesc poziția pe grindă a punctelor de anulare F_4, F_3, ... din

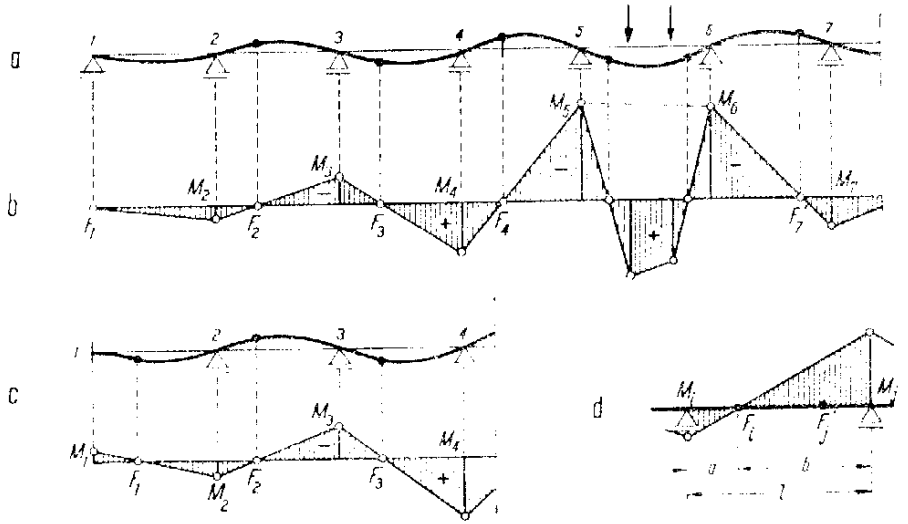


Fig. 158

diagrama de momente încovoietoare, respectiv a punctelor de inflexiune ale axei deformate. Situația particulară de încărcare admisă permite să se stabilească o relație de recurență pentru calculul succesiv al rapoartelor k_i, și deci a pozițiilor punctelor F_i.

Condiția de continuitate între două deschideri *neîncărcate* (caracteristici de încărcare nule), de exemplu *3-4* și *4-5*, este

$$\lambda_{34}M_3+2(\lambda_{34}+\lambda_{45})M_4+\lambda_{45}M_5=0 \text{ sau } \frac{\lambda_{34}}{\lambda_{45}}\cdot\frac{M_3}{M_4}+2\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{45}}+2+\frac{M_5}{M_4}=0,$$

unde, introducînd rapoartele (10.22), se ajunge la expresia

$$k_4=2+\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{45}}\left(2-\frac{1}{k_3}\right),$$

care reprezintă o corelație între rapoartele k_3 și k_4 ce definesc poziția punctelor F_3 și F_4; se poate deci calcula k_4 dacă se cunoaște k_3. Procedînd asemănător cu condițiile de continuitate pe reazemele intermediare *3* și *2*, se găsește

$$k_3=2+\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}}\left(2-\frac{1}{k_2}\right), \qquad k_2=2+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}\left(2-\frac{1}{k_1}\right).$$

În general, dacă se exprimă continuitatea între două deschideri neîncărcate *i-j* și *j-k* de la *stînga* deschiderii pe care sînt aplicate sarcinile, se obține

$$k_j = 2 + \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{jk}}\left(2 - \frac{1}{k_j}\right), \tag{10.23}$$

care reprezintă o *relație de recurență* între rapoartele k_i și k_j, deci între poziția a două puncte succesive de anulare F_i și F_j.

Dacă extremitatea *1* este *simplu rezemată*, $M_1 = 0$ și deci primul punct de anulare F_1 este chiar în reazemul *1*. Rezultă totodată $k_1 = -M_2/M_1 = -\infty$, astfel că poziția punctului F_2 este definită de raportul $k_2 = 2(1 + \lambda_{12}/\lambda_{23})$. Acest raport depinde numai de lungimile transformate ale primelor două deschideri. Aplicînd în continuare relația de recurență (10.23), se constată că rapoartele k_1, k_2, k_3, ... depind numai de lungimile transformate ale deschiderilor și de natura rezemării din extremitatea *1*. Rezultă că, oricare ar fi sarcinile aplicate pe deschiderea încărcată și oricare ar fi poziția acestei deschideri la dreapta porțiunii de grindă considerate, *pozițiile punctelor de anulare în diagrama M sînt aceleași*. Pentru aceasta, ele poartă numele de *puncte fixe* și trebuie privite drept caracteristici ale grinzii continue date, independente de încărcări.

Cînd extremitatea *1* a grinzii ar fi încastrată, poziția punctului fix F_1 se obține din condiția de continuitate în încastrare (fig. 158, *c*), scrisă folosind prima relație (10.12)

$$2M_1/\eta_1 + M_2 = 0, \text{ deci } k_1 = -M_2/M_1 = 2/\eta_1, \tag{10.24}$$

de unde se vede că pentru încastrarea perfectă $k_1 = 2$, și deci punctul fix F_1 se găsește la treimea deschiderii *1-2*. Cînd gradul de încastrare scade, punctul fix se deplasează spre stînga și ajunge în extremitatea *1* pentru $\eta_1 = 0$.

Se consideră acum porțiunea din diagrama *M* de la *dreapta* deschiderii încărcate. Ea este de asemenea formată din variații liniare și are puncte de anulare ale căror poziții pot fi definite prin rapoartele

$$-\frac{M_6}{M_7} = k'_7, \qquad -\frac{M_7}{M_8} = k'_8, \qquad -\frac{M_8}{M_9} = k'_9, \quad \ldots \tag{10.25}$$

unde la numărător s-a luat, pentru fiecare deschidere, ordonata dinspre deschiderea încărcată. Înseamnă că, pornind de la extremitatea din dreapta a grinzii continue și venind spre deschiderea încărcată, se poate determina în același mod o nouă serie de puncte fixe. Astfel, exprimînd continuitatea pe reazemul 7, respectiv continuitatea dintre două deschideri consecutive neîncărcate *m-n* și *n-p* din această porțiune a grinzii continue, se obține

$$k'_7 = 2 + \frac{\lambda_{78}}{\lambda_{67}}\left(2 - \frac{1}{k'_8}\right) \quad \text{și} \quad k'_n = 2 + \frac{\lambda_{np}}{\lambda_{mn}}\left(2 - \frac{1}{k'_p}\right), \tag{10.26}$$

care reprezintă relația de recurență pentru această serie de puncte fixe. Poziția primului punct fix, corespunzător extremității din dreapta a grinzii continue, se stabilește folosind o relație similară cu (10.24).

Cînd grinda continuă ar avea *secțiune variabilă* în cuprinsul deschiderilor, se procedează asemănător folosind relațiile (10.5) și (10.12); se găsesc expresiile

$$k_j = \frac{1}{c_{jk}}\left[2\,c'_{jk} + \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{jk}}\left(2\,c''_{ij} - \frac{c_{ij}}{k_i}\right)\right], \qquad k'_n = \frac{1}{c_{mn}}\left[2\,c''_{mn} + \frac{\lambda_{np}}{\lambda_{mn}}\left(2\,c'_{np} - \frac{c_{np}}{k_p}\right)\right], \quad (10.27)$$

care sînt analoage cu relațiile (10.23) și (10.26), reprezentînd relațiile de recurență pentru cele două serii de puncte fixe. De asemenea, se obține expresia

$$k_1 = \frac{c'_{12}}{c_{12}} \cdot \frac{2}{2c'_1}, \quad (10.28)$$

care determină poziția primului punct fix.

Din cele de mai sus rezultă că pentru o grindă continuă se pot determina *două serii* de puncte fixe, pornind de la cele două extremități ale grinzii. În legătură cu aceasta trebuie făcute unele observații:

(1) Din punct de vedere *geometric*, aplicarea relației de recurență poate duce — pentru fiecare serie — la aflarea poziției punctelor fixe din toate deschiderile grinzii continue. În fiecare deschidere apar astfel *două* puncte fixe (fig. 158, *d*), de exemplu pentru deschiderea *i-j* punctul fix F_i din seria de la stînga și punctul fix F'_j din seria de la dreapta. Aceste două puncte fixe nu au legătură directă între ele, deoarece fiecare serie presupune mereu că deschiderea încărcată se află în față, astfel că nu poate exista o condiție de închidere a seriei de puncte fixe la extremitatea opusă a grinzii. Pentru o anumită deschidere neîncărcată a grinzii continue, semnificație *statică* poate avea numai un singur punct fix, anume acel din seria care merge spre deschiderea încărcată.

(2) Stabilirea succesiunii punctelor fixe a fost făcută considerînd exclusiv perechi de deschideri *neîncărcate*. În consecință, poziția punctelor de inflexiune din deschiderea încărcată (fig. 158, *a*) nu are nici o legătură cu poziția punctelor fixe care corespund pentru această deschidere.

(3) Pentru fiecare serie, succesiunea de rapoarte depinde de caracteristicile porțiunii de grindă lăsată în urmă (mărimi de deschideri și momente de inerție). Un anumit raport k_i cuprinde în el pe toate cele precedente și prin aceasta sintetizează caracteristicile elastice ale grinzii continue pînă la deschiderea în care se află punctul fix F_i. Utilizarea rapoartelor k_i permite astfel să se obțină exprimări analitice concentrate.

(4) Dacă pentru un anumit punct fix se cunoaște raportul k_i (fig. 158, *d*), distanțele la cele două reazeme ce mărginesc deschiderea *i-j* rezultă

$$a = l/(1+k_i) \text{ și } b = lk_i/(1+k_i), \quad (10.29)$$

în funcție de mărimea l a deschiderii.

(5) Pentru aprecierea poziției punctelor fixe, în raport cu natura rezemărilor de la extremități și cu variațiile de secțiune, se dau în tabela 6 valorile rapoartelor k_i pentru o grindă continuă cu deschideri *egale*. S-a considerat cazul secțiunii constante pe toată lungimea, cît și cazul deschiderilor cu secțiune variabilă (admițînd ca exemplu o grindă cu vute pe reazeme, caracterizate de coeficienții $c' = c'' = 0{,}678$ și $c = 0{,}893$).

Tabela 6

Poziția punctelor fixe (caz particular)

Extremitate	Secțiune	k_1	k_2	k_3	$k_4=k_5=\ldots$
Reazem simplu	constantă		4	3,75	3,73
	variabilă		3,04	2,70	2,66
Încastrare perfectă	constantă	2	3,50	3,71	3,73
	variabilă	1,52	2,38	2,61	2,66

Cifrele din tabelă scot în evidență următoarele constatări esențiale:

— Pentru o grindă continuă cu o singură deschidere încărcată, momentele încovoietoare de pe reazemele intermediare *scad repede* pe măsură ce ne îndepărtăm de această deschidere; practic, după două-trei deschideri de fiecare parte a deschiderii încărcate, efectul devine neglijabil.

— Natura rezemării de la extremitate se resimte numai la poziția punctelor fixe din primele două deschideri, apoi se pierde.

Întărirea grinzii continue în zona reazemelor, prin variația secțiunii, conduce la deplasarea poziției punctelor fixe în direcția mijlocului deschiderii; în consecință, scăderea efectului sarcinilor din deschiderea încărcată — pe măsura îndepărtării de această deschidere — este mai puțin accentuată decît în cazul grinzii cu secțiune constantă.

b. **Rezolvarea sistematizată a grinzilor continue prin puncte fixe.** O dată cunoscută poziția punctelor fixe, mai rămîn numai *două necunoscute*: momentele încovoietoare din secțiunile de pe reazemele alăturate deschiderii (fig. 158, *b*); restul diagramei se construiește ducînd drepte care trec prin punctele fixe.

Ecuațiile necesare pentru aflarea celor două necunoscute (M_5 și M_6) se obțin prin condițiile de continuitate ale deschiderii încărcate cu deschiderile vecine. Aceste ecuații sînt

$$\lambda_{45}M_4+2(\lambda_{45}+\lambda_{56})M_5+\lambda_{56}M_6+\lambda_{56}m_5=0,$$

$$\lambda_{56}M_5+2(\lambda_{56}+\lambda_{67})M_6+\lambda_{67}M_7+\lambda_{56}m_6=0,$$

unde apar caracteristicile de încărcare m_5 și m_6 ale deschiderii *5-6*. Împărțind cu λ_{56} și grupînd termenii astfel ca să rămînă în ecuații numai necunoscutele M_5 și M_6, se obține

$$M_5\left[2+\frac{\lambda_{45}}{\lambda_{56}}\left(2-\frac{1}{k_4}\right)\right]+M_6+m_5=0 \text{ și } M_5+M_6\left[2+\frac{\lambda_{67}}{\lambda_{56}}\left(2-\frac{1}{k_7'}\right)\right]+m_6=0,$$

unde s-au introdus rapoartele $1/k_4=-M_4/M_5$ și $1/k_7'=-M_7/M_6$. Parantezele din cele două ecuații reprezintă expresii cunoscute, de forma relațiilor de recurență care dau poziția punctelor fixe. Ținînd seama de relațiile (10.23) și (10.26), rezultă

$$2+\frac{\lambda_{45}}{\lambda_{56}}\left(2-\frac{1}{k_4}\right)=k_5 \quad \text{și} \quad 2+\frac{\lambda_{67}}{\lambda_{56}}\left(2-\frac{1}{k_7'}\right)=k_6',$$

astfel că ecuațiile de continuitate capătă forma simplă

$$k_5 M_5 + M_6 + m_5 = 0 \text{ și } M_5 + k_6' M_6 + m_6 = 0,$$

iar rezolvarea lor conduce la soluțiile

$$M_5 = -\frac{k_6' m_5 - m_6}{k_5 k_6' - 1} \text{ și } M_6 = -\frac{k_5 m_6 - m_5}{k_5 k_6' - 1}.$$

Cunoscînd valorile M_5 și M_6, momentele încovoietoare de pe celelalte reazeme intermediare se calculează cu ajutorul rapoartelor k; astfel, pentru ramura din stînga a diagramei M din figura 158, *b*

$$M_4 = -M_5/k_4, \quad M_3 = +M_5/k_3 k_4, \quad M_2 = -M_5/k_2 k_3 k_4.$$

În general, cînd deschiderea încărcată ar fi mărginită de reazemele i și j, expresiile momentelor încovoietoare din secțiunile de pe aceste reazeme sînt

$$M_i = -\frac{k_j' m_i - m_j}{k_i k_j' - 1} \text{ și } M_j = -\frac{k_i m_j - m_i}{k_i k_j' - 1}. \tag{10.30}$$

În aceste expresii intervin numai elemente din *deschiderea încărcată*.

La grinzi continue cu *secțiune variabilă*, condițiile de continuitate pe reazemele alăturate deschiderii încărcate se scriu asemănător; se ajunge la următoarele expresii (unde $m_i' = s_{ij}' m_i$ și $m_j' = s_{ij}'' m_j$)

$$M_i = -\frac{1}{c_{ij}} \cdot \frac{k_j' m_i' - m_j'}{k_i k_j' - 1} \text{ și } M_j = -\frac{1}{c_{ij}} \cdot \frac{k_i m_j' - m_i'}{k_i k_j' - 1} \tag{10.31}$$

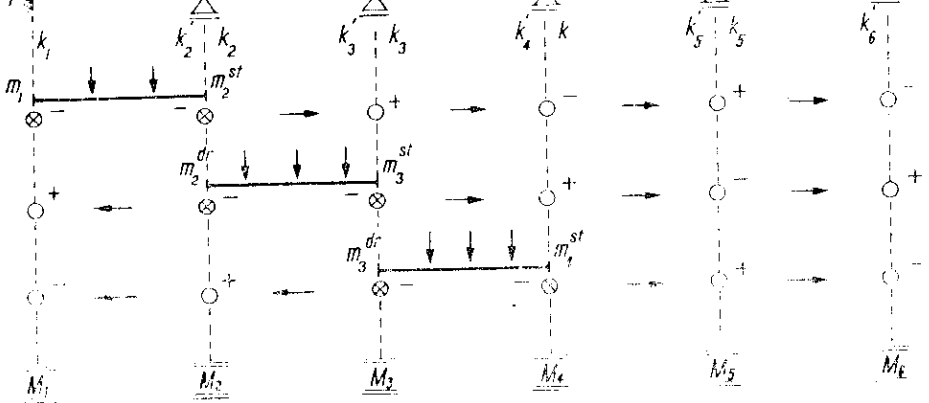


Fig. 159

Rezolvarea sistematizată a grinzilor continue prin metoda punctelor fixe se poate organiza chiar pe schema grinzii, cum se arată în figura 159; se efectuează următoarele operații:

— Se calculează în toate deschiderile rapoartele k pentru ambele serii de puncte fixe, precum și caracteristicile de încărcare; se înscriu în dreptul extremităților deschiderilor.

— Se încarcă numai cîte o singură deschidere și se calculează cu expresiile (10.30) sau (10.31) momentele încovoietoare din secțiunile de pe reazemele deschiderii, care se înscriu în coloanele de calcul ale secțiunilor respective, rezervîndu-se cîte un rînd pentru fiecare deschidere.

— Momentele astfel obținute se transmit prin punctele fixe, de o parte și de alta a deschiderii încărcate, pînă cînd valoarea transmisă devine neglijabilă; momentul pe un reazem se obține din momentul pe reazemul precedent, prin împărțirea cu raportul k din seria respectivă și cu schimbare de semn.

— La sfîrșit se face suma algebrică a tuturor valorilor înscrise în fiecare coloană, obținînd valorile totale ale momentelor încovoietoare din secțiunile respective, cu ajutorul cărora se trasează diagramele de eforturi ale grinzii continue.

Acest mod de calcul devine deosebit de avantajos la rezolvarea grinzii continue pentru mai multe situații de încărcare, cînd se urmărește determinarea valorilor *celor mai defavorabile* ale momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazeme. Avantajul derivă din faptul că în coloanele de calcul sînt înscrise *separat* efectele încărcărilor de pe fiecare deschidere; este suficient deci să se rețină — pentru sarcinile utile — numai valorile de același semn.

6. Formulare matriceală a rezolvării grinzilor continue

Se urmează o cale asemănătoare celei utilizate pentru grinzi drepte static determinate, bazată pe relații de recurență, care a fost sintetizată în schema logică din figura 26, extinzînd-o la condițiile specifice grinzilor static nedeterminate. S-a arătat anterior că la grinzi static determinate este posibil să se efectueze separat, mai întîi calculul eforturilor pe baza condiției de echilibru static și apoi determinarea poziției deformate utilizînd condiția de compatibilitate; s-a ajuns astfel la procedeul discutat în legătură cu schema logică din figura 132.

La grinzi static nedeterminate, cele două condiții trebuie aplicate împreună chiar de la calculul eforturilor; înseamnă că vor trebui considerate concomitent[1] atît relațiile de recurență pentru eforturi (momente încovoietoare M și forțe tăietoare T), cît și cele pentru deplasări (săgeți v și rotiri θ).

Grinda se împarte într-un număr de porțiuni, delimitate de secțiunile în care urmează a se calcula eforturile și deplasările. Pe fiecare porțiune, v, θ, M și T nu trebuie să aibă discontinuități; salturi Δv, $\Delta\theta$, ΔM sau ΔT pot interveni numai în punctele de diviziune. Înseamnă că se introduc obligatoriu diviziuni în dreptul sarcinilor concentrate, a unor articulații pe parcurs, a reazemelor intermediare etc.

---

[1] Procedeul prezentat aici permite determinarea concomitentă a eforturilor și a pozițiilor deformate la grinzi drepte oarecare, indiferent dacă sînt static determinate sau static nedeterminate. Prin specificul său, procedeul nu se încadrează de fapt în metoda generală a eforturilor. Pentru grinzi static determinate, reprezintă o altă variantă de abordare a rezolvării sintetizate în schema logică din figura 132.

Deoarece calculul se face numai în punctele de diviziune, sarcinile distribuite pot fi înlocuite prin componentele lor la extremităţile porţiunilor; se lucrează astfel numai cu forţe concentrate oricare ar fi încărcarea aplicată pe grindă, simplificînd trecerea de la o secţiune la alta.

a. **Grinzi cu o singură deschidere.** Se consideră izolată din grindă porţiunea delimitată de diviziunile i şi j, de lungime a (fig. 160, *a*). Relaţiile de recurenţă între eforturi sînt

$$T_j = T_i \quad \text{şi} \quad M_j = M_i + T_i a,$$

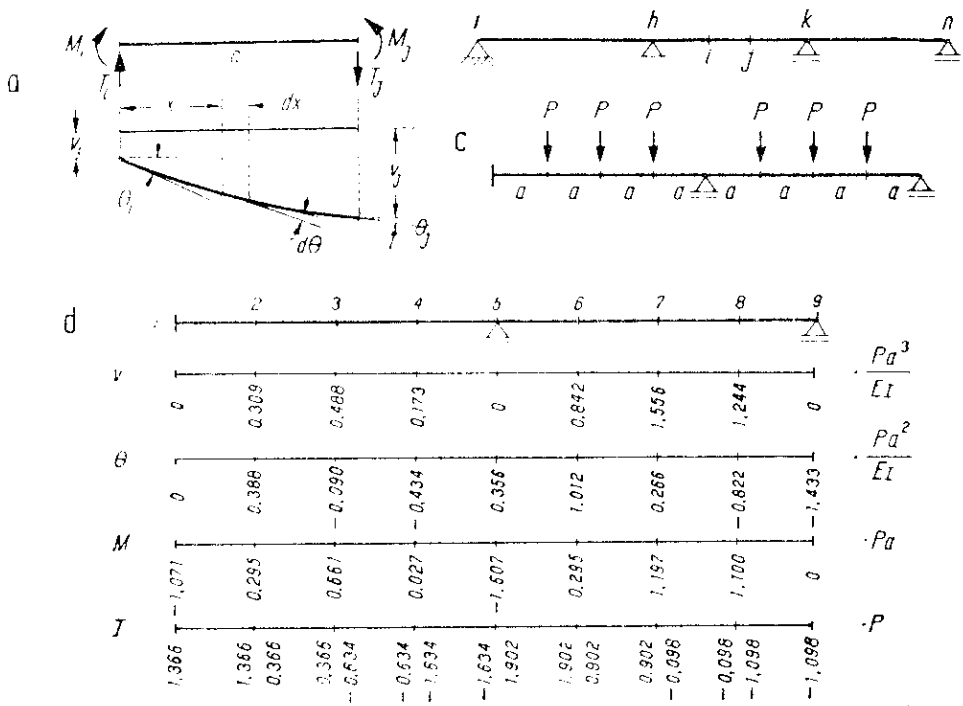


Fig. 160

iar cele dintre deplasări au forma (8.16)

$$\theta_j = \theta_i - \int_i^j d\theta \quad \text{şi} \quad v_j = v_i + \theta_i a - \int_i^j d\theta (a - x).$$

Ţinînd seama că $d\theta = M_x dx/EI$, unde $M_x = M_i + T_i x$, se obţine

$$\theta_j = \theta_i - \int_i^j (M_i + T_i x) \frac{dx}{EI} = \theta_i - M_i \frac{a}{EI} - T_i \frac{a^2}{2EI},$$

$$v_j = v_i + \theta_i a - \int_i^j (M_i + T_i x)(a - x) \frac{dx}{EI} \quad v_i + \theta_i a - M_i \frac{a^2}{2EI} - T_i \frac{a^3}{6EI},$$

Grupul celor patru relații de recurență poate fi scris în formă matriceală. Se va utiliza și aici aranjamentul adoptat în relațiile (2.16), anume matricea $\mathbf{T}_{ij}$ este completată cu un rînd și o coloană, avînd ca element diferit de zero numai pe acel de pe diagonala principală. De asemenea, matricei $\mathbf{C}_j$ a corecțiilor din secțiunea j i se dă formă pătrată, cu elemente diferite de zero numai în ultima coloană. Matricele sînt deci

$$\mathbf{V}\begin{bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ T \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & a & -\frac{a^2}{2EI} & -\frac{a^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a}{EI} & -\frac{a^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_j=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \Delta v_j \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta\theta_j \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta M_j \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta T_j \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

unde s-a notat cu $\mathbf{V}$ matricea-coloană ce cuprinde deplasările și eforturile dintr-o anumită secțiune, iar cu $\mathbf{T}_{ij}$ matricea de trecere de la o secțiune la alta.

Relațiile de recurență se scriu

$$\mathbf{V}_j^{st}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{V}_i^{dr}\ \text{ și }\ \mathbf{V}_j^{dr}=\mathbf{C}_j+\mathbf{V}_j^{st}=\mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij}\mathbf{V}_i^{dr}, \tag{10.32}$$

cu care se poate parcurge grinda din diviziune în diviziune, determinînd succesiv deplasările și eforturile din toate aceste secțiuni. Așa se va proceda la sfîrșit, cînd se cunosc toate elementele necesare. Totodată, datorită alcătuirii adoptate pentru matricele $\mathbf{C}_j$ și $\mathbf{T}_{ij}$, a doua relație (10.32) se mai poate scrie

$$\mathbf{V}_j^{dr}=\mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij}\mathbf{V}_i^{dr}=(\mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij})\mathbf{V}_i^{dr}, \tag{10.33}$$

deoarece rezultatul nu se schimbă dacă cele două matrice sînt mai întîi adunate și apoi multiplicate cu $\mathbf{V}_i^{dr}$. Se poate deci trece direct de la $\mathbf{V}_i^{dr}$ la $\mathbf{V}_j^{dr}$. Matricea $\mathbf{C}_j+\mathbf{T}_{ij}$ este similară cu matricea $\mathbf{T}_{ij}$, în ultima coloană intrînd corecțiile Δv, $\Delta\theta$, ΔM și ΔT.

Relația (10.33) permite să se realizeze trecerea directă de la o extremitate la alta a deschiderii grinzii, aplicînd-o succesiunii de intervale în care aceasta a fost împărțită. Se regăsește modul de stabilire a relației (2.19), care rămîne valabilă și în cazul de față, anume

$$\mathbf{V}_5=\mathbf{T}_{15}\mathbf{V}_1,\quad \text{unde}\quad \mathbf{T}_{15}=\mathbf{T}_{45}\{\mathbf{C}_4+\mathbf{T}_{34}[\mathbf{C}_3+\mathbf{T}_{23}(\mathbf{C}_2+\mathbf{T}_{12})]\}, \tag{10.34}$$

unde $\mathbf{T}_{15}$ (și în genere $\mathbf{T}_{1n}$) reprezintă matricea globală de trecere de la elementele din prima secțiune la cele din ultima secțiune a deschiderii. Calculul matricei $\mathbf{T}_{1n}$ se face pe baza matricelor $\mathbf{T}_{ij}$ și $\mathbf{C}_j$ ale porțiunilor.

Sistematizarea făcută este aplicabilă oricare ar fi legăturile de la extremitățile grinzii, considerată aici cu o singură deschidere. Sînt în total opt elemente necunoscute (cîte patru pentru fiecare dintre matricele-coloană $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_n$), dar dintre acestea numai patru pot fi diferite de zero (cîte două la fiecare extremitate), deoarece dacă pe o anumită direcție dintr-o extremitate există legătură, deplasarea corespunzătoare este nulă și reciproc. Celor patru necunoscute ră-

unde se știe că $v_h=0$ și $v_k=0$. Eliminînd cu ajutorul primei relații pe T_h din cele două relații următoare, se obține

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_k \\ M_k \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_k^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-a_{12}\frac{a_{24}}{a_{14}} & a_{23} & a_{13}\frac{a_{24}}{a_{14}} & a_{25}-a_{15}\frac{a_{24}}{a_{14}} \\ -a_{12}\frac{a_{34}}{a_{14}} & 1-a_{13}\frac{a_{34}}{a_{14}} & a_{35}-a_{15}\frac{a_{34}}{a_{14}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{hk}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} 0_h \\ M_h \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_h^*} \tag{10.36}$$

care constituie relația de legătură între extremitățile deschiderii.

La o grindă continuă, cu reazemele numerotate *1*, *2*, ...*n*, aplicînd succesiv relația (10.36) și ținînd seama de trecerea directă peste reazeme, rezultă

$$\mathbf{V}_2^* = \mathbf{T}_{12}^*\mathbf{V}_1^*, \quad \mathbf{V}_3^* = \mathbf{T}_{23}^*\mathbf{V}_2^* = \mathbf{T}_{23}^*\mathbf{T}_{12}^*\mathbf{V}_1^*, \quad \mathbf{V}_4^* = \mathbf{T}_{34}^*\mathbf{V}_3^* = \mathbf{T}_{34}^*\mathbf{T}_{23}^*\mathbf{T}_{12}^*\mathbf{V}_1^*, \ldots$$

și deci în general

$$\mathbf{V}_n^* = \mathbf{T}_{1n}^*\mathbf{V}_1^*, \quad \text{unde} \quad \mathbf{T}_{1n}^* = \mathbf{T}_{n,n-1}^*\ldots\mathbf{T}_{34}^*\mathbf{T}_{23}^*\mathbf{T}_{12}^*, \tag{10.37}$$

care reprezintă *matricea globală de trecere de la o extremitate la alta a grinzii continue*. Modul de obținere al matricei $\mathbf{T}_{1n}^*$ se poate rezuma astfel: se formează matricele $\mathbf{T}_{hk}$ ale deschiderilor cu ajutorul relației (10.34), se alcătuiesc matricele reduse $\mathbf{T}_{hk}^*$ pe baza relației (10.36) și se determină matricea globală $\mathbf{T}_{1n}^*$ aplicînd relația (10.37).

Relația de ansamblu a grinzii $\mathbf{V}_n^* = \mathbf{T}_{1n}^*\mathbf{V}_1^*$ are forma

$$\begin{vmatrix} 0_n \\ M_n \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0_1 \\ M_1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} 0_n &= t_{11}0_1 + t_{12}M_1 + t_{13}, \\ M_n &= t_{21}0_1 + t_{22}M_2 + t_{23}, \end{aligned} \tag{10.38}$$

deci se dispune de două condiții. Dintre parametrii inițiali 0_1 și M_1, unul este diferit de zero, în funcție de condițiile de rezemare din extremitatea *1*: 0_1 pentru reazem simplu, sau M_1 pentru încastrare. Asemănător, în extremitatea *n* unul dintre elemente va fi nul, rezultînd ecuația din care se află parametrul inițial diferit de zero; de exemplu:

— grindă continuă cu reazeme simple la capete $t_{21}0_1 + t_{23} = 0$,
— grindă continuă cu extremități încastrate $t_{12}M_1 + t_{13} = 0$.

Odată aflat parametrul independent diferit de zero (0_1 sau M_1), trebuie revenit la matricele-coloană $\mathbf{V}$, care conțin toate cele patru elemente. În matricea $\mathbf{V}_1$ a rămas o singură necunoscută, anume T_1, egală cu reacțiunea din extremitatea *1*. Aceasta poate fi aflată din relația matriceală $\mathbf{V}_2 = \mathbf{T}_{12}\mathbf{V}_1$ a deschiderii *1—2*, anume utilizînd condiția $v_2 = 0$, care dă ecuația necesară. În continuare, se pot aplica succesiv pentru toate diviziunile deschiderii *1-2* relațiile de recurență (10.32), determinînd în secțiunile respective deplasările și eforturile.

Ajungînd în reazemul *2*, în matricea $\mathbf{V}_2^{dr}$ apare o nouă necunoscută — anume T_2^{dr} — datorită reacțiunii din reazemul *2*. Situația este similară celei întîlnite

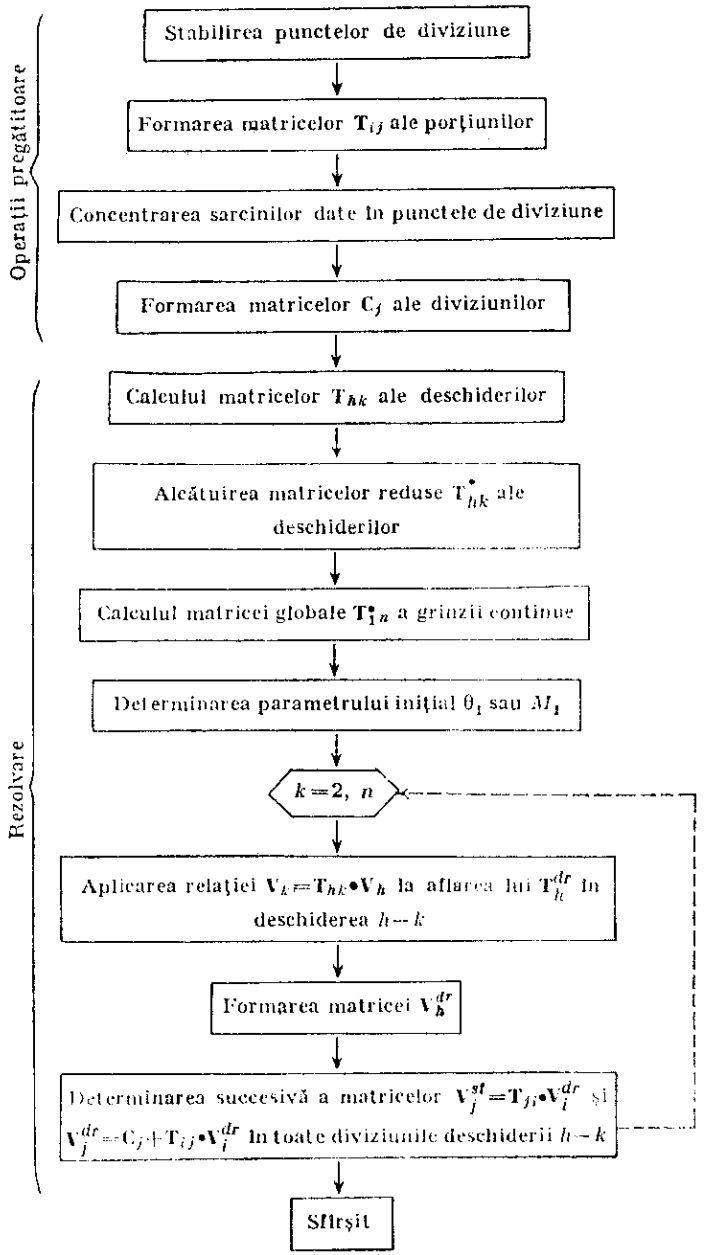


Fig. 161 Schemă logică pentru determinarea eforturilor și deplasărilor la grinzi continue.

în deschiderea *1-2* pentru T_1 și se rezolvă analog, folosind relația matriceală $\mathbf{V}_3=\mathbf{T}_{23}\mathbf{V}_2$ și condiția $v_3=0$. În același mod se procedează și pentru deschiderile următoare.

Întregul procedeu este sintetizat în schema logică din figura 161.

Pentru exemplificare, fie grinda continuă din figura 160, *c*. Fiecare deschidere este împărțită în patru porțiuni egale, de lungime a. Matricea $\mathbf{T}_{ij}$ este aceeași pentru toate porțiunile, iar matricea $\mathbf{C}$ din secțiunile de aplicare a sarcinilor concentrate are un singur element diferit de zero, anume $\Delta T=-P$. Matricele $\mathbf{T}_{15}$ și $\mathbf{T}_{59}$ ale celor două deschideri au aceeași alcătuire și se obțin efectuînd operațiile matriceale indicate de relația (10.34), găsind

$$\mathbf{T}_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & a & -\frac{a^2}{2EI} & -\frac{a^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a}{EI} & -\frac{a^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{15}\quad \mathbf{T}_{59}=\begin{bmatrix} 1 & 4a & -\frac{8a^2}{EI} & \frac{32a^3}{3EI} & \frac{6Pa^3}{EI} \\ 0 & 1 & \frac{4a}{EI} & \frac{8a^2}{EI} & \frac{7Pa^2}{EI} \\ 0 & 0 & 1 & 4a & -6Pa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

În continuare, se alcătuiesc matricele reduse $\mathbf{T}_{15}^{\bullet}=\mathbf{T}_{59}^{\bullet}$ și prin produsul lor rezultă matricea $\mathbf{T}_{19}^{\bullet}$ de trecere de la o extremitate la alta a grinzii continue; aceste matrice sînt

$$\mathbf{T}_{15}^{\bullet}=\mathbf{T}_{59}^{\bullet}=\begin{bmatrix} -2 & \frac{2a}{EI} & \frac{5Pa^2}{2EI} \\ \frac{3EI}{2a} & -2 & -\frac{15Pa}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{T}_{19}^{\bullet}=\begin{bmatrix} 7 & -\frac{8a}{EI} & -\frac{6Pa^2}{EI} \\ -\frac{6EI}{a} & 7 & \frac{15Pa}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se poate acum trece la aflarea parametrului inițial M_1 din încastrarea *1*, utilizînd condiția $M_9=0$ sub forma $t_{22}M_1+t_{23}=0$, unde $t_{22}=7$ și $t_{23}=15\,Pa/2$; rezultă $M_1=-t_{23}/t_{22}=-15Pa/14=-1{,}071\,Pa$.

Celălalt parametru inițial, anume T_1, se obține din relația matriceală $\mathbf{V}_5=\mathbf{T}_{15}\mathbf{V}_1$ punînd condiția $v_5=0$; rezultă $a_{13}M_1+a_{14}T_1+a_{15}=0$, unde

$$a_{13}=-\frac{8a^2}{EI},\quad a_{14}=-\frac{32a^3}{3EI},\quad a_{15}=-\frac{6Pa^3}{EI}\quad \text{și deci}\quad T_1=1{,}366\,P.$$

O situație similară se întîlnește în deschiderea *5-9* pentru T_5^{dr}, după ce prin aplicarea relațiilor de recurență din diviziune în diviziune pe deschiderea *1-5* se ajunge la reazemul *5*, unde $\theta_5=0{,}356\,Pa^2/EI$ și $M_5=-1{,}607\,Pa$. În relația matriceală $\mathbf{V}_9=\mathbf{T}_{59}\mathbf{V}_5$ se pune condiția $v_9=0$, obținînd ecuația

$$a_{12}\theta_5+a_{13}M_5+a_{14}T_5^{dr}+a_{15}=0 \quad \text{și deci}\quad T_5^{dr}=1{,}902\,P,$$

unde alături de coeficienții dați mai sus s-a adăugat și $a_{12}=4a$.

Mărimile deplasărilor și eforturilor din toate punctele de diviziune sînt date în figura 160, *d*

B. GRINZI CU ZĂBRELE

1. Generalități

La aplicarea metodei eforturilor se va ține seama că, drept consecință a admiterii ipotezelor simplificatoare discutate la începutul capitolului IV, în barele grinzilor cu zăbrele se dezvoltă numai eforturi axiale.

S-a arătat anterior că pentru stabilirea gradului de nedeterminare statică se utilizează relația $d=b-2n+r\geqslant 0$, în care b este numărul barelor, n — numărul nodurilor și r — numărul legăturilor din rezemări. Cînd $d>0$, grinda cu zăbrele este static nedeterminată și d reprezintă chiar gradul de nedeterminare. Este necesar apoi să se identifice proveniența legăturilor suplimentare, anume dacă sînt datorite rezemărilor sau unui surplus de bare în alcătuirea structurii, cum s-a arătat în legătură cu figurile 133, *d* și *e*.

Trecerea la sistemul de bază rezultă prin suprimarea unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică. Alegerea legăturilor care se suprimă trebuie făcută cu discernămînt, urmărind pe de o parte simplificarea ecuațiilor de condiție, prin alegerea unui sistem de bază în care diagramele unitare să se întindă pe cît mai puține bare, iar pe de alta căutînd ca eforturile produse de sarcini în barele sistemului de bază să fie cît mai apropiate de cele din grinda static nedeterminată.

Un exemplu este dat în figura 162, *a* pentru o grindă cu zăbrele continuă pe trei deschideri, care este de două ori static nedeterminată. Dacă se suprimă reazemele intermediare, se ajunge la sistemul de bază din figura 162, *b*; este ușor de văzut că aceasta contravine ambelor criterii: fiecare necunoscută produce eforturi în toate barele sistemului de bază, iar mărimile eforturilor date de sarcini sînt cu totul altele decît cele din grinda continuă. Un alt sistem de bază se vede în figura 162, *c*, unde prin suprimarea barelor tălpii superioare din dreptul reazemelor intermediare se ajunge la o succesiune de trei grinzi simplu rezemate. Fiecare dintre necunoscute dă eforturi numai în barele celor două grinzi alăturate; cînd grinda continuă ar avea mai multe deschideri, toți coeficienții secundari care se referă la două necunoscute care nu sînt vecine se anulează. Totodată, eforturile produse de sarcini în acest sistem de bază sînt mai apropiate de cele din grinda dată.

Cînd se aleg ca necunoscute eforturile din una sau mai multe bare, va trebui să se țină seama la scrierea ecuațiilor de condiție de cele discutate în legătură cu figurile 136, *b* și *c* (privitor la structurile cu tiranți), deoarece situația este similară. Astfel, dacă efortul X_i din bara i este ales ca necunoscută, trecerea la sistemul de bază se poate face prin *suprimarea* barei i (fig. 162, *d*), sau prin *secționarea* barei i (fig. 162, *e*). În ambele cazuri se ajunge la aceeași ecuație de condiție de forma (9.12), dacă se introduce separat în coeficientul principal

δ_{ii} partea care provine de la bara i. În consecință, cînd necunoscuta X_i este reprezentată de o forță de legătură dintr-o rezemare, ecuația de condiție corespunzătoare se scrie

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ii}X_i + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{is} = 0.$$

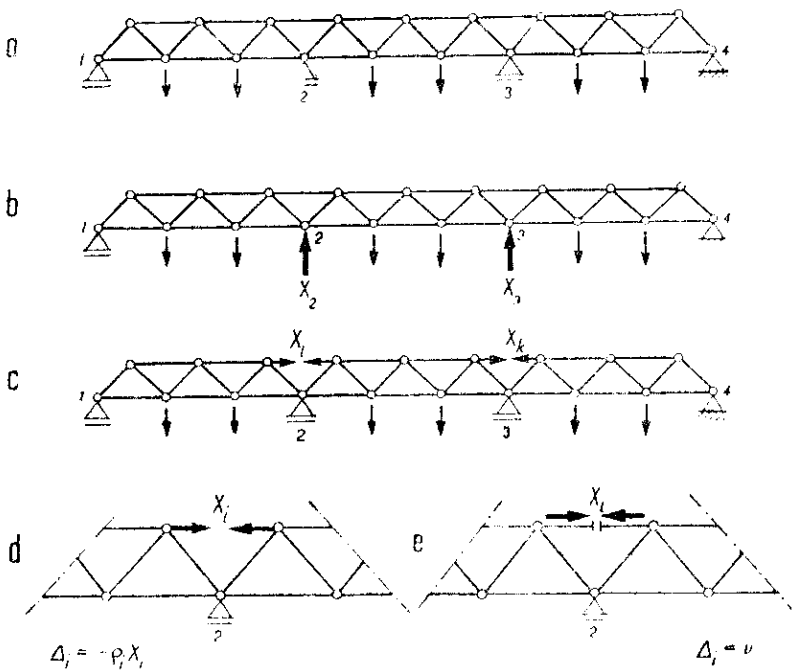


Fig. 162

Dacă drept necunoscută X_i se alege efortul dintr-o anumită bară i, ecuația de condiție are forma

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + (\delta_{ii} + \rho_i)X_i + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{is} = 0. \qquad (10.39)$$

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi dați de sarcini se calculează cu expresiile cunoscute

$$\delta_{ii} = \int n_i^2 ds/EA = \sum n_{ji}^2 \rho_j, \quad \delta_{ik} = \int n_{xi} n_{xk} ds/EA = \sum n_{ji} n_{jk} \rho_j,$$

$$\Delta_{is} = \int N_{xs} n_{xi} ds/EA = \sum N_{js} n_{ji} \rho_j, \qquad (10.40)$$

unde cu indicele j s-a notat bara curentă a sistemului de bază. Pentru cedări de reazeme, termenul liber Δ_{ic} se calculează folosind expresia (9.8) sau (9.10), după caz. În cazul variațiilor de temperatură, termenul liber corespunzător este

$$\Delta_{it} = \sum \alpha t^\circ \int n_{xi} ds = \alpha t^\circ \sum n_{ji} l_j. \qquad (10.41)$$

Semnele produselor care apar în suma $\sum n_{ji} l_j$ se stabilesc comparînd — pentru fiecare bară — sensul deformării date de efortul n_{ji}, produs de încărcarea sistemului de bază cu $X_i = 1$, cu sensul variației de lungime dată de temperatură: cînd cele două sensuri concordă, produsul este pozitiv.

Pentru sistematizarea rezolvării, calculul coeficienților și al termenilor liberi din ecuațiile de condiție se organizează într-un tablou. La fiecare bară se înscriu în rîndul respectiv datele caracteristice (lungime, aria secțiunii, valoarea ρ_j), eforturile produse de sarcini și de fiecare necunoscută-unitate, apoi se fac produsele care intră în expresii; la urmă, se însumează algebric coloanele de produse.

2. Structuri cu unul sau mai multe grade de nedeterminare statică

În cazul unei grinzi cu zăbrele avînd o singură nedeterminare exterioară (fig. 163, *a*), trecerea la sistemul de bază se poate face prin suprimarea reazemului central, cum se vede în figura 163, *b*. Ecuația de condiție este

$$\delta_{22} X_2 + \Delta_{2s} = 0, \text{ deci } X_2 = -\frac{\Delta_{2s}}{\delta_{22}} = -\frac{\sum N_{js} n_{j2} \rho_j}{\sum n_{j2}^2 \rho_j}.$$

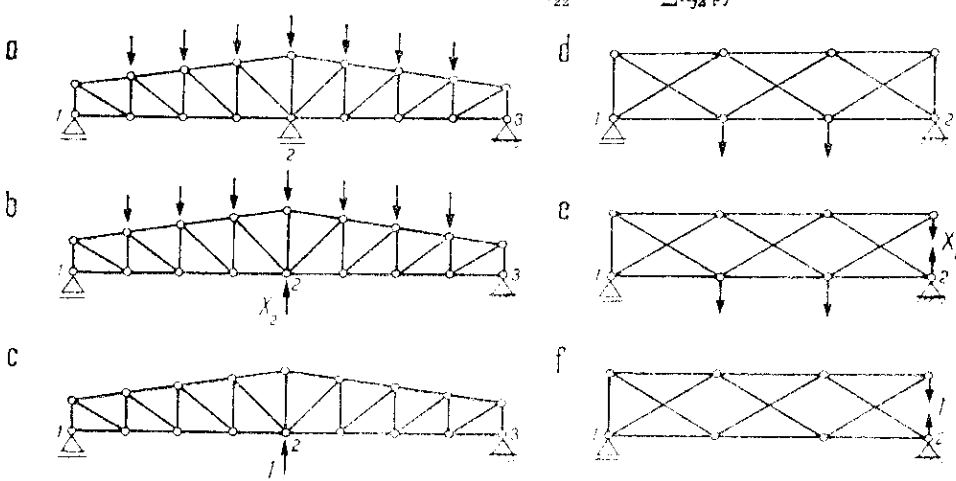


Fig. 163

Sensul pozitiv al deplasărilor Δ_{2s} și δ_{22} este cel indicat de sensul sarcinii-unitate corespunzătoare necunoscutei (fig. 163, *c*); pentru încărcări verticale Δ_{2s} va rezulta deci negativ, astfel că reacțiunea X_2 va fi pozitivă, avînd sensul din figura 163, *b*. Cînd intervin și denivelări de reazeme, situația este în totul asemănătoare celei discutate în legătură cu figura 152.

Cînd grinda cu zăbrele are o nedeterminare interioară, cum este cazul din figura 163, *d* ($b = 14$, $n = 8$, deci $d = b - 2n + r = 14 - 2 \cdot 8 + 3 = +1$), siste-

mul de bază se obține prin suprimarea unei bare (fig. 163, *e*), care introduce necunoscuta X_i, caracterizată prin situația auxiliară din figura 163, *f* cu eforturile n_{ji}. Particularizînd pentru acest caz ecuația de condiție (10.39), se obține

$$(\delta_{ii}+\rho_i)X_i+\Delta_{is}=0, \text{ deci } X_i=-\frac{\Delta_{is}}{\delta_{ii}+\rho_i}=-\frac{\sum N_{js}\,n_{ji}\,\rho_j}{\sum n_{ji}^2\,\rho_j+\rho_i},$$

unde sumele se referă numai la barele rămase în sistemul de bază. O dată aflată necunoscuta X_i (efortul din bara *i*), se determină eforturile din celelalte bare prin suprapunere, sub forma $N_j=N_{js}+n_{ji}X_i$, utilizînd valorile N_{js} și n_{ji} găsite pentru cele două situații de încărcare considerate.

Un tip caracteristic de grindă cu zăbrele static nedeterminată este cel din figura 164, *a*, unde sînt cîte două diagonale în fiecare panou; numărul nedeterminărilor este deci egal cu numărul panourilor. Sistemul de bază se obține suprimînd cîte una din diagonale (figura 164, *b*), astfel că sînt puse în evidență necunoscutele X_1, ..., X_6. Pentru calculul coeficienților și al termenilor liberi trebuie considerate situațiile auxiliare de încărcare cu sarcinile-unitate $X_1=1$, ..., $X_6=1$; de exemplu, încărcarea cu $X_2=1$ se vede în figura 164, *c*, unde s-a aplicat o pereche de forțe egale și direct opuse.

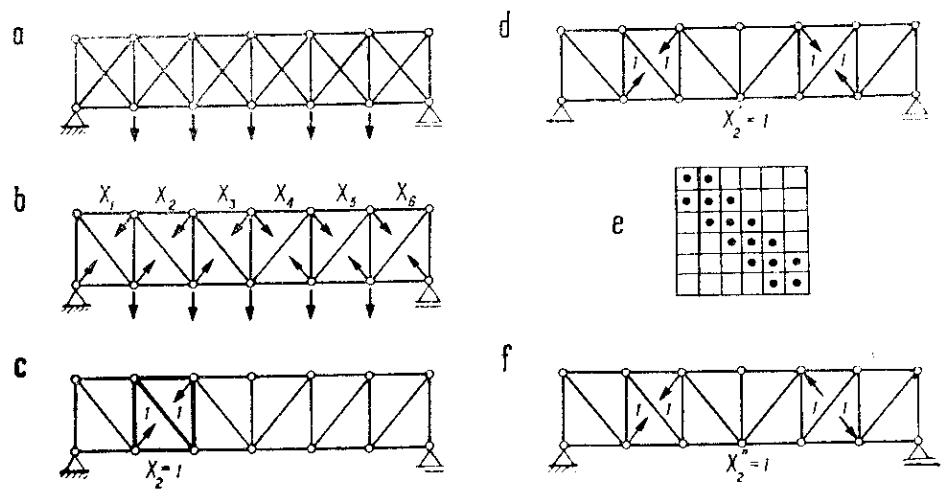


Fig. 164

Deoarece fiecare panou este geometric invariabil, iar perechea de forțe-unitate aplicată pe el reprezintă un sistem de forțe în echilibru, *nu se dezvoltă eforturi decît în barele panoului respectiv*. Înseamnă că toți coeficienții secundari de forma $\delta_{ik}=\Sigma n_{ji}\,n_{jk}\,\rho_j$, la care indicii *i* și *k* corespund la două necunoscute din panouri care *nu sînt alăturate*, sînt *nuli*. Fiecare ecuație de condiție conține deci numai **cîte trei necunoscute** din panouri consecutive, ajungîndu-se

la o matrice a coeficienților de forma din figura 164, *e*, analoagă celei de la sistemul „ecuațiilor de trei momente" întîlnit la rezolvarea grinzilor continue, unde situația era asemănătoare.

Cînd grinda cu zăbrele este *simetrică*, se pot aduce simplificări în rezolvare prin grupări de necunoscute, sub forma utilizării perechilor de necunoscute simetrice și antisimetrice. Astfel, grupele de necunoscute cu poziție simetrică X_1 și X_6, X_2 și X_5, X_3 și X_4 se înlocuiesc prin perechile X'_1 și X''_1, X'_2 și X''_2, X'_3 și X''_3, unde necunoscutele X' sînt perechi simetrice, iar necunoscutele X'' sînt perechi antisimetrice. În figurile 164, *d* și *f* se văd sarcinile-unitate corespunzătoare necunoscutelor X'_2 și X''_2. Sistemul de ecuații se desparte în două, anume un grup de trei ecuații numai cu necunoscute simetrice și un alt grup de trei ecuații numai cu necunoscute antisimetrice

$$\left.\begin{aligned}
(\delta'_{11}+\rho_1)X'_1 &+ \delta'_{12}X'_2 &&+ \Delta'_{1s}=0\\
\delta'_{21}X'_1+(\delta'_{22}+\rho_2)X'_2 &+ \delta'_{23}X'_3 &+ \Delta'_{2s}&=0\\
\delta'_{32}X'_2+(\delta'_{33}+\rho_3)X'_3 &+ \Delta'_{3s}&=0
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
(\delta''_{11}+\rho_1)X''_1 &+ \delta''_{12}X''_2 &&+ \Delta''_{1s}=0\\
\delta''_{21}X''_1+(\delta''_{22}+\rho_2)X''_2 &+ \delta''_{23}X''_3 &+ \Delta''_{2s}&=0\\
\delta''_{32}X''_2+(\delta''_{33}+\rho_3)X''_3 &+ \Delta''_{3s}&=0
\end{aligned}\right\}.$$

Sarcinile se descompun într-o componentă simetrică și una antisimetrică. Calculul coeficienților și al termenilor liberi se face numai pentru jumătate de structură (la bara centrală se ia $\rho/2$).

CAPITOLUL XI

APLICAREA METODEI EFORTURILOR LA ARCE STATIC NEDETERMINATE

A. ARCUL CU DOUĂ ARTICULAŢII

1. Rezolvare generală

Arcele static nedeterminate sînt bare curbe plane, care au un număr de legături mai mare decît cel minim necesar pentru fixarea în plan; sarcinile acţionează în planul barei curbe. Dintre tipurile de arce static nedeterminate, utilizare largă în construcţii o are arcul *dublu articulat* (fig. 165, *a*); împingerea laterală trebuie să fie preluată de către elementele pe care sprijină arcul. La construcţii industriale, unde arcele sînt folosite de obicei ca elemente portante ale acoperişurilor, pentru preluarea împingerilor se prevăd *tiranţi* (fig. 165, *b*); deoarece tirantul reprezintă o legătură interioară în plus, la una dintre extremităţi trebuie prevăzut reazem simplu, sistemul devenind exterior static determinat.

Sistematizările de calcul specifice arcelor static nedeterminate pot fi aplicate oricărei structuri plane cu un singur contur, alcătuită din bare drepte sau curbe şi avînd aceleaşi legături (fig. 165, *c*). care determină o comportare specifică ce se caracterizează prin dezvoltare de împingeri în rezemări. Fenomenul este asemănător celui întîlnit la studiul arcului cu trei articulaţii.

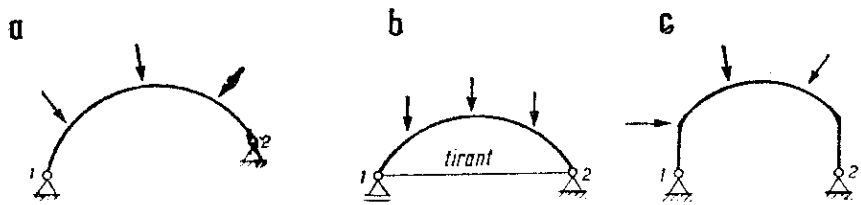


Fig. 165

Arcul cu două articulaţii are o singură nedeterminare statică; drept cantitate static nedeterminată se poate alege împingerea orizontală H_1 (fig. 166, *a*). Rezultă sistemul de bază din figura 166, *b*, încărcat cu sarcinile date şi cu necunoscuta suplimentară H_1, la care apar reacţiunile

$$H_2 = H_{2s} + H_1, \quad V_1 = V_{1s} + H_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad V_2 = V_{2s} - H_1 \operatorname{tg} \alpha \qquad (11.1)$$

și eforturile în secțiunea curentă

$$M_x = M_{xs} - H_1(y - x\,\mathrm{tg}\,\alpha) = M_{xs} - Hy_1,$$
$$N_x = N_{xs} - H_1(\cos\varphi + \mathrm{tg}\,\alpha \sin\varphi) = N_{xs} - H_1 \cos(\varphi - \alpha)/\cos\alpha, \qquad (11.2)$$
$$T_x = T_{xs} - H_1(\sin\varphi - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\varphi) = T_{xs} - H_1 \sin(\varphi - \alpha)/\cos\alpha,$$

unde s-au notat cu H_{2s}, V_{1s}, V_{2s}, M_{xs}, N_{xs}, T_{xs} reacțiunile și eforturile date de sarcini în sistemul de bază. Pentru efectul împingerii H_1 s-a folosit fig. 166, *d*.

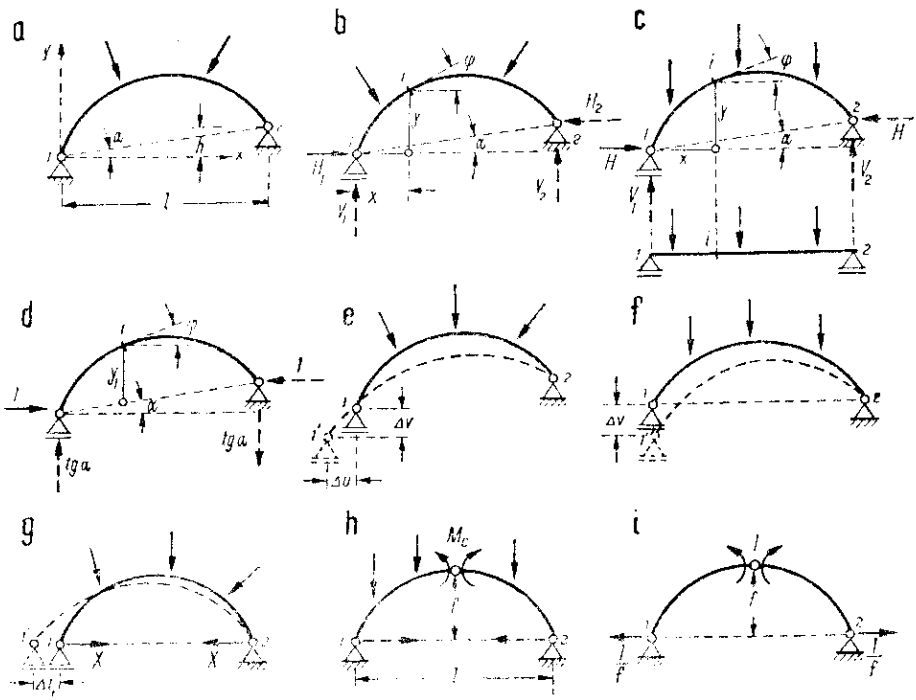


Fig. 166

În cazul particular al *sarcinilor verticale* (fig. 166, *c*), $H_{2s} = 0$, $V_{1s} = V_1^0$, $V_{2s} = V_2^0$, $M_{xs} = M_x^0$, $N_{xs} = -T_x^0 \sin\varphi$ și $T_{xs} = T_x^0 \cos\varphi$, unde V_1^0, V_2^0 și M_x^0, T_x^0 sînt cele din grinda simplu rezemată. Reacțiunile arcului sînt deci

$$H_1 = H_2 = H, \quad V_1 = V_1^0 + H\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad V_2 = V_2^0 - H\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad (11.3)$$

iar eforturile din secțiunea curentă au expresiile

$$M_x = M_x^0 - Hy_1,$$
$$N_x = -T_x^0 \sin\varphi - H\cos(\varphi - \alpha)/\cos\alpha, \quad T_x = T_x^0 \cos\varphi - H\sin(\varphi - \alpha)/\cos\alpha. \qquad (11.4)$$

Pentru rezemări *de nivel* ($\alpha = 0$) se obțin $V_1 = V_1^0$, $V_2 = V_2^0$ și

$$M_x = M_x^0 - Hy, \quad N_x = -T_x^0 \sin\varphi - H\cos\varphi, \quad T_x = T_x^0 \cos\varphi - H\sin\varphi. \qquad (11.5)$$

Expresiile reacțiunilor și ale eforturilor, stabilite aici pentru arcul cu două articulații, sînt similare celor întîlnite anterior la studiul arcului cu trei articulații. Deosebirea constă în faptul că împingerea H *nu este aceeași*. La arcul cu trei articulații, împingerea este o cantitate determinată static și rezultă din condiția că momentul încovoietor din articulația centrală este nul; la arcul cu două articulații, împingerea este o cantitate static nedeterminată, care se obține din condiția de compatibilitate a poziției deformate a arcului cu rezemarea din extremitatea *1*.

Considerînd cazul general (fig. 166, *b*), mărimea împingerii orizontale H_1 se determină folosind ecuația de condiție a metodei generale a eforturilor, $u_1 = 0$, care are forma

$$u_{11}H_1 + u_{1s} + u_{1t} + u_{1c} = 0,$$

unde apar termenii liberi corespunzători sarcinilor date, variațiilor de temperatură și cedărilor de reazeme. De observat că, pentru deplasarea orizontală a extremității *1*, convenția de semne este fixată în figura 166, *d* (prin sensul sarcinii-unitate $H_1 = 1$), fiind considerate pozitive deplasările care corespund micșorării deschiderii arcului. Deoarece sarcinile uzuale — aplicate asupra sistemului de bază — tind să mărească deschiderea, înseamnă că termenul liber u_{1s} va rezulta din calcul *negativ*.

Pentru variații de temperatură, termenul liber u_{1t} se calculează cu expresia (9.7)

$$u_{1t} = \alpha_a t^\circ \int n_{x1}\,ds + \alpha_a \Delta t^\circ \int \frac{m_{x1}}{d}\,ds,$$

unde α_a este coeficientul de dilatație al materialului din care este făcut arcul. Din figura 166, *d* rezultă $n_{x1} = -\cos(\varphi - \alpha)/\cos\alpha$ și $m_{x1} = -y_1$, astfel că expresia capătă forma

$$u_{1t} = -\alpha_a t^\circ \int \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\,ds - \alpha_a \Delta t^\circ \int \frac{y_1}{d}\,ds. \tag{11.6}$$

În cazul unui arc cu extremități *de nivel* ($\alpha = 0$), supus la o creștere uniformă de temperatură t°, termenul liber devine $u_{1t} = -\alpha_a t^\circ \int \cos\varphi\,ds = -\alpha_a t^\circ l$, astfel că ecuația de condiție este

$$u_{11}H_1 + u_{1s} - \alpha_a t^\circ l = 0, \text{ deci } H_1 = -(u_{1s} - \alpha_a t^\circ l)/u_{11}. \tag{11.7}$$

Deoarece u_{1s} rezultă negativ, se vede că o creștere de temperatură conduce la *mărirea* împingerii arcului, ceea ce apare de altfel evident din faptul că creșterea de temperatură tinde să mărească deschiderea, în timp ce împingerea împiedică această mărire.

Pentru cedări de reazeme, ca în figura 166, *c* (creșterea deschiderii cu Δu și creșterea denivelării cu Δv), termenul liber u_{1c} este dat de expresia (9.8)

$$u_{1c} = -\sum \overline{R}_1 \Delta_r = \Delta u + \Delta v \operatorname{tg}\alpha, \tag{11.8}$$

unde s-a ținut seama de sensurile cedărilor de reazeme. Cînd sînt și sarcini, expresia împingerii devine

$$H_1 = -(u_{1s} + u_{1c})/u_{11} = -(u_{1s} + \Delta u + \Delta v \operatorname{tg}\alpha)/u_{11}, \tag{11.9}$$

din care se vede că cedările de reazeme considerate *micșorează* mărimea împingerii arcului, ceea ce corespunde faptului că ele permit o mărire a distanței dintre extremități. De remarcat că pentru arce cu extremitățile de nivel ($\alpha = 0$), termenul care conține pe Δv *dispare*. Înseamnă că, în acest caz, creșterea denivelării nu are influență asupra împingerii, și deci nici asupra eforturilor din arc. Explicația rezultă din figura 166, *f*, unde se vede că arcul poate căpăta denivelarea Δv *fără să se deformeze*, rotindu-se ca un corp rigid în jurul articulației *2*; aceasta nu este posibil în cazul arcului din figura 166, *e*, care are extremitățile denivelate.

La un *arc cu tirant* (fig. 166, *g*), sistemul de bază se obține considerînd tirantul secționat, efortul X al acestuia devenind necunoscuta suplimentară. Situația este similară celei de la arcul dublu articulat (fig. 166, *b*), cu deosebirea că trebuie să se țină seama de alungirea tirantului, care nu poate împiedica decît parțial variația de distanță dintre extremitățile arcului. Această alungire are mărimea $\Delta l_t = \varepsilon_t l = Xl/E_t A_t = X\varrho_t$, unde s-a notat cu $\varrho_t = l/E_t A_t$ caracteristica de deformabilitate a tirantului. Se pot utiliza expresiile stabilite mai sus, asimilînd alungirea tirantului cu o cedare de reazem $\Delta u = \Delta l_t$. Ecuația de condiție are deci forma

$$u_{11}X + u_{1s} + X\varrho_t = 0, \quad \text{sau} \quad X = -u_{1s}/(u_{11} + \varrho_t), \tag{11.10}$$

de unde se vede că efortul din tirant este *mai mic* decît împingerea ce ar rezulta pentru arcul dublu articulat cu rezemări fixe. Cu cît tirantul este mai deformabil (ϱ_t mai mare), cu atît efortul X este mai mic, și deci arcul lucrează mai dezavantajos.

La arce *simetrice* supuse la sarcini verticale poate fi uneori avantajos să se utilizeze ca sistem de bază arcul cu trei articulații; momentul încovoietor M_c din secțiunea de la cheie este în acest caz necunoscută suplimentară (fig. 166, *h*). Reacțiunile sînt

$$V_1 = V_1^0, \quad V_2 = V_2^0 \text{ și } H = H_0 - M_c/f, \tag{11.11}$$

unde s-a notat cu H_0 împingerea arcului cu trei articulații sub acțiunea sarcinilor date. Ecuația de condiție este

$$\theta_{cc} M_c + \theta_{cs} = 0, \text{ deci } M_c = -\theta_{cs}/\theta_{cc}, \tag{11.12}$$

în care intervin rotirile relative θ_{cs} și θ_{cc} din articulația centrală a sistemului de bază, produse de sarcini și de acțiunea sarcinii-unitate $M_c = 1$ (fig. 166, *i*).

Utilizarea arcului triplu articulat ca sistem de bază are avantajul de a permite să se vadă în ce măsură diferă reacțiunile și eforturile arcului cu două articulații, față de cele ale arcului cu trei articulații, pentru anumite sarcini date. Din expresia (11.12) rezultă că mărimea corecției de împingere $H^* = -M_c/f$, datorită continuității în secțiunea de la cheia arcului, este cu atît mai mare cu cît θ_{cs} este mai mare. Dacă pentru anumite sarcini nu ar apare rotire relativă în articulația centrală a sistemului de bază ($\theta_{cs} = 0$), rezultă că $M_c = 0$, și deci eforturile din arcul cu două articulații sînt aceleași cu cele din arcul cu trei articulații.

O utilizare avantajoasă a arcului cu trei articulații ca sistem de bază pentru sarcini se va întîlni mai departe, la rezolvarea arcelor a căror axă este apropiată de forma de coincidență.

2. Expresia împingerii la arce cu secțiune plină

Determinarea împingerii arcului cu două articulații se obține din ecuația de condiție $u_1 = 0$, care are o singură necunoscută. Pentru încărcarea cu sarcini, ecuația are forma

$$u_{11}H_1 + u_{1s} = 0, \text{ deci } H_1 = -u_{1s}/u_{11}. \tag{11.13}$$

Considerarea altor cauze, ca variații de temperatură sau cedări cu reazeme, precum și efectul tirantului, se reduc la introducerea unor termeni suplimen-

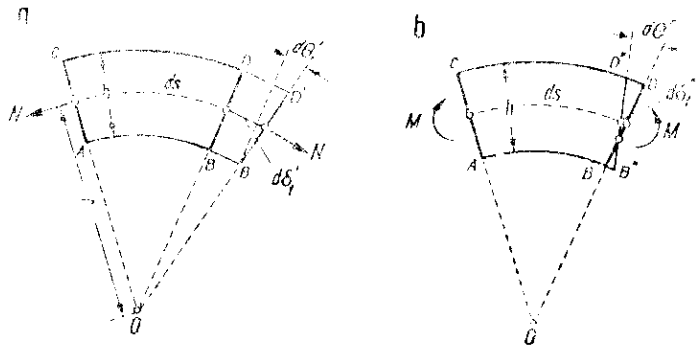


Fig. 167

tari la numărătorul sau la numitorul expresiei, cum se vede din relațiile (11.7), (11.9) și (11.10).

La calculul deplasărilor u_{1s} și u_{11} trebuie ținut seama că, spre deosebire de barele drepte, la bare curbe intervine și *efectul curburii* asupra deformării. La un element ds de bară curbă, lungimile fibrelor variază de la fața superioară la fața inferioară. Drept consecință, deplasările relative $d\theta$ și $d\delta_t$ dintre fețele elementului nu sînt produse numai de efortul corespunzător (M, respectiv N), ca la barele drepte, ci fiecare dintre aceste eforturi produce deformarea elementului și pe direcția celuilalt efort, cum se vede în figurile 167, *a* și *b*, deoarece în ambele cazuri apare o variație a lungimii axei elementului, precum și o rotire relativă între fețele acestuia. Înseamnă că în expresia generală a deplasărilor, care are forma

$$\Delta_i = \int m_{xi}d\theta + \int n_{xi}d\delta_t + \int t_{xi}d\delta_n,$$

trebuie introduse cantitățile $d\theta = d\theta' + d\theta''$ și $d\delta_t = d\delta_t' + d\delta_t''$. Evaluînd aceste cantități în cazul încărcării cu sarcini, se ajunge la următoarele expresii pentru u_{1s} și u_{11}

$$u_{1s} = \int M_{xs}m_{x1}\frac{ds}{EI} + \int N_{xs}n_{x1}\frac{ds}{EA} + \int kT_{xs}t_{x1}\frac{ds}{GA} - \int (M_{xs}n_{x1} + N_{xs}m_{x1})\frac{ds}{EAr},$$

$$u_{11} = \int m_{x1}^2\frac{ds}{EI} + \int n_{x1}^2\frac{ds}{EA} + \int kt_{x1}^2\frac{ds}{GA} - 2\int m_{x1}n_{x1}\frac{ds}{EAr}, \tag{11.14}$$

unde eforturile M_{xs}, N_{xs}, T_{xs} și m_{x1}, n_{x1}, t_{x1} se determină în sistemul de

bază (fig. 166, *b*), încărcat cu sarcinile date și respectiv cu sarcina-unitate $H_1=1$; r este raza de curbură a elementului ds.

S-a arătat anterior că, pentru calcule practice, nu este necesar să se rețină toți termenii din expresiile (11.14), așa cum rezultă din calcule comparative efectuate privitor la importanța relativă a acestor termeni[1]. Pentru orientare, se dau în tabela 7 rezultatele unui asemenea calcul la un arc cu axă parabolică, considerînd diferite rapoarte f/l (țurțirea arcului) și h_c/l (grosimea arcului). Cifrele reprezintă influența ultimilor trei termeni din expresia *numitorului* a_{11}, dată în procente față de valoarea primului termen (efectul momentului încovoietor).

Tabela 7

Valori comparative

$\frac{f}{l}$	Influență n_{x1}		Influență t_{x1}		Influență curbură	
	$h_c/l=0,1$	$h_c/l=0,05$	$h_c/l=0,1$	$h_c/l=0,05$	$h_c/l=0,1$	$h_c/l=0,05$
1 / 12	21,7	5,4	2,4	0,6	−1,6	−0,4
1 / 8	9,3	2,3	2,2	0,5	−1,5	−0,4
1 / 4	1,9	0,6	1,6	0,4	−1,3	−0,3
1 / 2	—	—	0,8	0,2	−0,8	−0,2

Pe baza calculelor comparative se admit următoarele simplificări:

(1) *Privitor la numitorul* a_{11}. Influența forțelor tăietoare și a curburii este redusă, iar termenii respectivi rezultă de valori apropiate și cu semne contrare, compensîndu-se reciproc, astfel că pot fi totdeauna neglijați. În schimb, influența forțelor axiale poate deveni importantă; *această influență crește cu cît arcul este mai turtit și cu cît grosimea sa este mai mare*. Arcele folosite curent în construcții au de obicei $1/10<f/l<1/4$ și $h_c/l<0,1$. Pentru stabilirea formulelor generale, termenul datorit forțelor axiale trebuie menținut în expresia numitorului; acest termen nu poate fi neglijat la arce cu turtiri $f/l<1/5$, în special dacă grosimea arcului este mai mare.

(2) *Privitor la numărătorul* a_{1s}. Influența curburii este aici și mai mică decît în cazul numitorului. De asemenea, atît influența forței tăietoare cît și cea a forței axiale pot fi neglijate cînd pentru sarcini se consideră sistemul de bază din figura 166, *b*. Înseamnă că pentru numărător se va reține numai primul termen din expresie, acel datorit momentelor încovoietoare.

Cu aceste simplificări, expresia împingerii H_1 devine

$$H_1 = -\frac{a_{1s}}{a_{11}} = -\frac{\int M_{xs}\, m_{x1}\, ds/EI}{\int m_{x1}^2\, ds/EI + \int n_{x1}^2\, ds/EA}. \qquad (11.15)$$

unde, ținînd seama că din figura 166, *d* rezultă $m_{x1}=-y_1$ și $n_{x1}=-\cos(\varphi-\alpha)/\cos\alpha$, de asemenea multiplicînd cu constanta EI_c (I_c — moment de inerție în secțiunea de la cheie) și notînd

$$d\omega=ds I_c/I \text{ și } d\omega'=ds I_c/A, \qquad (11.16)$$

[1] v. date mai complete în lucrarea: Procopiev, I. P., *Statica construcțiilor*, vol. II, cap. 6, București, O.P.E.D., 1951.

se obține:

$$H_1 = \frac{\int M_{xs} y_1 \, d\omega}{\int y^2 d\omega + \int \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\omega'}, \tag{11.17}$$

care este expresia generală a împingerii la arcul dublu articulat.

În cazul uzual al arcelor cu rezemări de nivel, $\alpha = 0$ și $y_1 = y$, astfel că

$$H_1 = \frac{\int M_{xs} y \, d\omega}{\int y^2 d\omega + \int \cos^2 \varphi \, d\omega'}. \tag{11.18}$$

Se poate pune în evidență mai clar importanța relativă a termenului al doilea din numitor, față de primul, introducînd raportul

$$\int \cos^2 \varphi \, d\omega' / \int y^2 d\omega = \nu \text{ și notația } \gamma_1 = 1/(1+\nu). \tag{11.19}$$

Expresia împingerii devine

$$H_1 = \frac{\int M_{xs} y \, d\omega}{(1+\nu) \int y^2 d\omega} = \gamma_1 \frac{\int M_{xs} y \, d\omega}{\int y^2 d\omega}, \tag{11.20}$$

unde coeficientul $\eta < 1$ reprezintă efectul considerării forțelor axiale asupra împingerii. Se vede că acest efect micșorează într-o oarecare măsură împingerea arcului.

La aplicarea practică, pentru calculul raportului ν se poate admite aproximația

$$\int \cos^2 \varphi \, d\omega' \simeq l I_c / A_c = l i_c^2, \tag{11.21}$$

unde i este raza de inerție a secțiunii de la cheia arcului. Valoarea raportului ν este de obicei foarte mică în raport cu 1; cînd efectul forțelor axiale se neglijează, $\nu = 0$, și deci $\eta = 1$.

3. Căi de evaluare a integralelor din expresia împingerii

Pentru calculul integralelor din expresiile (11.17)—(11.20) este necesar să se cunoască atît *forma axei arcului*, definită de ecuația $y = f(x)$, cît și *legea de variație a momentului de inerție* în secțiunile succesive. Amîndouă aceste elemente influențează mărimea împingerii, și deci eforturile din arc. Pentru arce de forme curente (parabolică, circulară) și pentru legi simple de variație a momentului de inerție, evaluarea integralelor se poate face direct, conducînd la stabilirea de formule generale. La arce de alte forme, sau cînd legea de variație a momentului de inerție nu este convenabilă pentru integrare directă, devine necesar să se utilizeze procedee aproximative, înlocuind integrările prin sumări.

Se desprind astfel două modalități de efectuare a integrărilor.

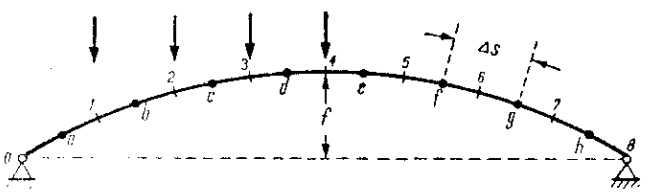
(a) *Operare prin bolțari.* Aceasta se aplică atunci cînd forma axei arcului sau legea de variație a momentului de inerție sînt oarecare. În vederea înlocuirii integrărilor prin sumări se împarte axa într-un număr finit de porțiuni de lungime Δs, denumite *bolțari*, cum se vede în figura 168. Obișnuit se folosește însumarea simplă, astfel că expresia împingerii (11.17) capătă forma

$$H_1 = \frac{\int M_{xs}\, y_1\, d\omega}{\int y_1^2\, d\omega + I\, i_c^2} \approx \frac{\sum M_{xs}\, y_1\, \Delta\omega}{\sum y_1^2 \Delta\omega + I\, i_c^2}, \qquad (11.22)$$

unde $\Delta\omega = \Delta s \cdot I_c/I$ este lungimea transformată (redusă) a bolțarului.

Cantitățile y, $\Delta\omega$, M_{xs} se calculează pentru *centrele* bolțarilor; calculul se organizează sub formă de tablou, rezervînd cîte un rînd pentru fiecare bolțar. În coloane succesive se înscriu mai întîi cantitățile menționate, apoi se efectuează produsele care apar în expresia (11.22), cum se arată în figură. Însumînd coloanele respective, se obține numărătorul și numitorul din expresia împingerii. O dată găsită valoarea H_1, se determină eforturile din secțiuni folosind expresiile (11.2) sau (11.4); și acest calcul se organizează tot sub formă de tablou.

Calculul împingerii trebuie făcut cît mai exact, aceasta prezentînd o importanță deosebită pentru determinarea corectă a momentelor încovoietoare din secțiuni. La arce se urmărește reducerea în cît mai mare măsură a momentelor încovoietoare, prin alegerea favorabilă a formei axei arcului, care trebuie să



Bolțar	y	Δs	$\Delta\omega$	$y\Delta\omega$	$y^2\Delta\omega$	M_x^0	$M_x^0 y$	$M_x^0 y\Delta\omega$
a	•	•	•	•	•	•	•	•
b	•	•	•	•	•	•	•	•
c	•	•	•	•	•	•	•	•
					Σ			Σ

Fig. 168

se apropie cît mai mult de curba de presiune. În aceste condiții, considerînd de exemplu cazul sarcinilor verticale, momentele încovoietoare M_x din arc sînt foarte mici în raport cu momentele încovoietoare M_x^0 date de sarcini în sistemul de bază. Din prima relație (11.4), care are forma $M_x = M_x^0 - Hy_1$, se vede că momentul încovoietor din secțiunea curentă a arcului rezultă din diferența a doi termeni de mărimi foarte apropiate. Înseamnă că o eroare mică la mări-

mea împingerii conduce la erori mult mai mari pentru M_x, alterînd astfel simțitor rezultatele.

(b) *Integrare directă.* Se aplică cînd forma axei arcului și legea de variație a momentului de inerție au expresii matematice simple și avantajoase pentru integrare. Pe această cale se rezolvă în special arcele parabolice și circulare; aici se va examina numai *arcul parabolic* simetric (extremități de nivel)[1].

Privitor la variația momentului de inerție, evaluările comparative arată că la arcele turtite curent folosite în construcții ($f/l<1/4-1/5$), influența diferitelor legi asupra mărimii împingerii este foarte redusă, dacă se menține nemodificată grosimea la cheie. În consecință, se admite pentru efectuarea integrărilor o lege de variație de forma

$$I=I_c/\cos\varphi, \text{ deoarece } d\omega=ds\cdot I_c/I=ds\cos\varphi=dx, \qquad (11.23),$$

astfel că *integrarea după axa arcului se înlocuiește cu o integrare obișnuită după axa x*. La arce foarte turtite, expresia poate fi privită drept corespunzătoare secțiunii constante ($I=I_c$), dacă se face aproximarea $\cos\varphi\simeq 1$.

Utilizînd această lege în expresia (11.20), mărimea împingerii capătă forma

$$H_1=\frac{\int M_{x8}\,y\,dx}{\int y^2dx+I\,i_c^2}=\eta_1\frac{\int M_{x8}\,y\,dx}{\int y^2\,dx},$$

unde trebuie ținut seama că pentru arcul parabolic simetric, cu originea în extremitatea 1, ecuația axei este

$$y=4fx\,(l-x)/l^2=4f\,\xi(1-\xi).$$

Introducînd în integrala numitorului, care nu depinde de sarcini, se obține

$$\int y^2\,dx=16f^2l\int_0^1\xi^2\,(1-\xi)^2\,d\xi=8f^2l/15,$$

astfel că expresia împingerii devine

$$H_1=\eta_1\frac{15}{8f^2l}\int M_{x8}\,y\,dx, \qquad (11.24)$$

unde, pe baza expresiei (11.19) și ținînd seama de (11.21), rezultă

$$\nu=\frac{I\,i_c^2}{\int y^2dx}=\frac{15}{8}\left(\frac{i_c}{f}\right)^2 \quad \text{și} \quad \eta_1=1/(1+\nu), \qquad (11.25)$$

Apar astfel cu claritate elementele care influențează mărimea corecției aduse de considerarea efectului forțelor axiale: influența este cu atît mai mare cu cît arcul este mai turtit (f mai mic) și cu cît înălțimea secțiunii la cheie este mai mare (rază de inerție mai mare).

[1] Pentru arce de formă circulară, cu secțiune constantă, curent folosite în practică, v. S.C–2, capitolul VI.

Cînd arcul parabolic simetric ar avea *tirant* (fig. 166, *g*), necunoscuta suplimentară este dată de relaţia (11.10). Ţinînd seama de multiplicarea cu EI_c, numitorul se poate scrie

$$EI_c(\delta_{11}+\varphi_t)=\frac{8f^2l}{15}(1+\nu)+l\,\frac{E}{E_t}\cdot\frac{I_c}{A_t}=\frac{8f^2l}{15}(1+\nu+\nu_t),$$

unde s-a notat

$$\nu=\frac{15}{8}\left(\frac{i_c}{f}\right)^2 \text{ şi } \nu_t=\frac{15}{8f^2}\cdot\frac{EI_c}{E_tA_t}. \tag{11.26}$$

Astfel, expresia efortului din tirant este

$$X=\eta'\frac{15}{8f^2l}\int M_{xs}y\,\mathrm{d}x,\quad \eta'=1/(1+\nu+\nu_t), \tag{11.27}$$

în care $\eta'<1$ cuprinde atît efectul considerării forţelor axiale din arc, cît şi al alungirii tirantului.

Expresiile (11.24) şi (11.27) au caracter general, oricare ar fi sarcinile aplicate pe arcul parabolic simetric; cunoaşterea sarcinilor permite să se determine mărimea efectivă a împingerii, introducînd expresiile corespunzătoare ale lui M_{xs}.

Pentru exemplificare, se consideră cazul unei sarcini uniform distribuite pe jumătate din deschidere (fig. 169, *a*). Diagrama M_{xs} în sistemul de bază este aceeaşi ca pentru o grindă simplu rezemată. Expresiile momentului încovoietor din secţiunea curentă a celor două porţiuni sînt

$$(1-c)\qquad M_{xs}=\frac{pl^2}{8}\xi(3-4\xi)/8,$$
$$(c-2)\qquad M_{xs}=\frac{pl^2}{8}\xi'/8,$$

astfel că integrala din expresia (11.24) devine

$$\int M_{xs}y\,\mathrm{d}x=\frac{pl^2}{8}\cdot 4fl\left[\int_0^{1/2}\xi^2(1-\xi)(3-4\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int_0^{1/2}\xi'^2(1-\xi')\,\mathrm{d}\xi'\right]=\frac{pfl^2}{30},$$

şi deci expresia împingerii orizontale a arcului este

$$H=\eta\frac{15}{8f^2l}\cdot\frac{pfl^2}{30}=\eta\frac{pl^2}{16f}.$$

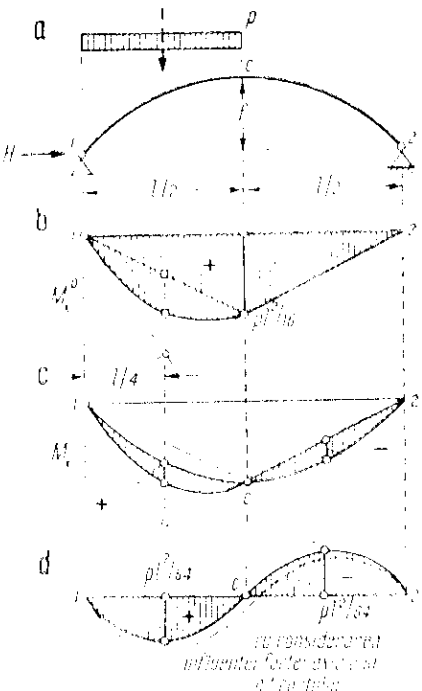


Fig. 169

Dacă se admite $\nu=0$ ($\eta=1$), împingerea are mărimea $H=pl^2/16f$ şi este *aceeaşi cu pentru arcul cu trei articulaţii*. Înseamnă că şi diagrama M este aceeaşi, obţinînd prin suprapunere forma din figura 169, *c*; raportată la o axă de referinţă orizontală, diagrama este dată în figura 169, *d* (linie plină).

Explicaţia faptului că, pentru cazul de încărcare considerat şi admiţînd $\nu=0$, nu există diferenţe între reacţiunile şi eforturile arcului cu două articulaţii, faţă de cele ale arcului cu trei articulaţii, rezultă din cele arătate în legătură cu figura 166, *h*. Luînd ca sistem de bază

arcul cu trei articulații, diagrama M_{cs} este cea arătată în figura 169, *d*, deci o diagramă antisimetrică, în timp ce perechea de momente-unitate aplicată în articulația de la cheie (fig. 166, *i*) dă o diagramă m_{xc} simetrică. Rezultă $\delta_{cs}=0$, și deci $M_c=0$, astfel încît corecția de reacțiune M_c/f este nulă.

Pentru comparație, se admite că arcul are tirant și se ține seama și de efectul forțelor axiale. În acest caz trebuie utilizată relația (11.27), unde intervine corecția dată de coeficientul $\eta'=1/(1+\nu+\nu_t)$; expresia efortului din tirant este deci $X=pl^2/16f(1+\nu+\nu')$. Fie următorul caz numeric: $l=24$ m, $f=3$ m, secțiunea la cheia arcului 30/80 cm și $A_t=50$ cm²; arcul este din beton armat și tirantul metalic.

Pentru aceste date se obține $I_c=0{,}3\cdot 0{,}8^3/12=0{,}0128$ m⁴ și $i_c^2=I_c/A_c=h_c^2/12=0{,}64/12=0{,}053$ m². De asemenea, pentru materialele utilizate ($E=210\,000$ da N/cm² și $E_t=2\,100\,000$ da N/cm²) rezultă $E/E_t=1/10$. Introducînd în relațiile (11.26), se găsește

$$\nu=\frac{15}{8}\left(\frac{i}{f}\right)^2=\frac{15}{8}\cdot\frac{0{,}053}{9}=0{,}011,$$

$$\nu_t=\frac{15}{8f^2}\cdot\frac{EI_c}{E_tA_t}=\frac{15}{8\cdot 9}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{0{,}0128}{0{,}0050}=0{,}054,$$

și deci $1+\nu+\nu_t=1+0{,}011+0{,}054=1{,}065$, astfel că numitorul crește cu 6,5%. Efortul din tirant este

$$X=\frac{pl^2}{16\cdot 1{,}065f}=\frac{pl^2}{17{,}1\,f}<\frac{pl^2}{16f}.$$

Această corecție duce la o corectare mult mai mare a diagramei de momente încovoietoare. Aplicînd relația $M_x=M_x^0-Xy$ pentru secțiunea de la cheie și pentru secțiunile de la *sfeșturile deschiderii* (unde $y=3f/4$), se obține

$$M_c=\frac{pl^2}{16}-\frac{pl^2}{17{,}1\,f}\cdot f=(0{,}0625-0{,}0585)\,pl^2=0{,}0040\,pl^2,$$

$$(1-c)\quad M_i=\frac{pl^2}{16}-\frac{pl^2}{17{,}1\,f}\cdot\frac{3f}{4}=(0{,}0625-0{,}0438)\,pl^2=0{,}0187\,pl^2,$$

$$(c-2)\quad M_i=\frac{pl^2}{32}-\frac{pl^2}{17{,}1\,f}\cdot\frac{3f}{4}=(0{,}0312-0{,}0438)\,pl^2=-0{,}0126\,pl^2.$$

Comparînd aceste valori cu cele ale diagramei din figura 169, *d*, unde la sferturile deschiderii $M_{max}=\pm pl^2/64=\pm 0{,}0156pl^2$, se constată că momentul încovoietor pozitiv a crescut cu 20%, în timp ce momentul încovoietor negativ a scăzut în aceeași proporție. Corecțiile se datoresc în special tirantului, așa cum se vede din compararea valorilor ν și ν_t, corecția dată de considerarea efectului forțelor axiale este mică în acest caz, deoarece grosimea arcului la cheie este mică în raport cu deschiderea ($h_c/l=0{,}033$).

În figura 169, *d* s-a trasat punctat diagrama M pentru cazul arcului cu tirant.

4. Curba de presiune

Semnificația curbei de presiune este cunoscută de la studiul arcului cu trei articulații. Se știe că această curbă este reprezentată de un funicular particular al sarcinilor aplicate pe arc, care are următoarele proprietăți:

— laturile extreme ale funicularului sînt suporturile reacțiunilor arcului, iar mărimile reacțiunilor sînt date de razele polare extreme din poligonul forțelor;

— o latură oarecare a funicularului este suportul rezultantei forțelor exterioare situate de o aceeași parte a acestei laturi, iar mărimea rezultantei este dată de raza polară corespunzătoare din poligonul forțelor.

Curba de presiune constituie elementul esențial pentru aprecierea modului cum lucrează arcul sub acțiunea sarcinilor date. Cu cît axa arcului este mai apro-

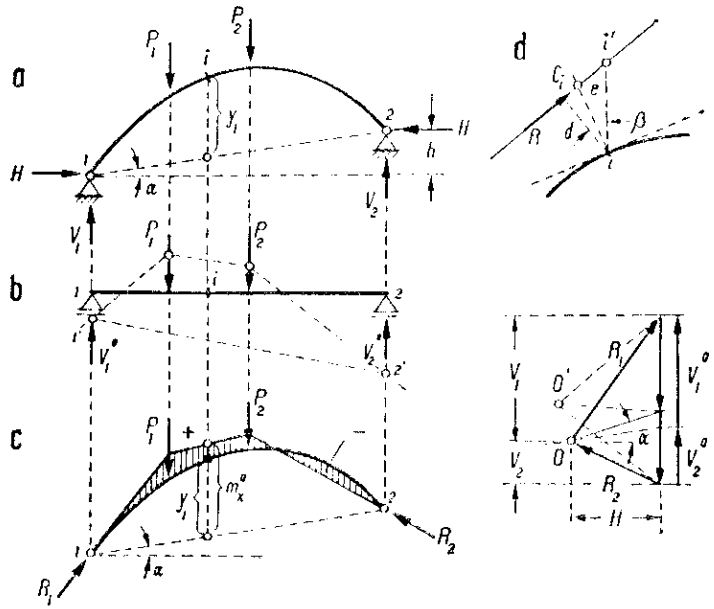


Fig. 170

piată de curba de presiune, excentricitățile centrelor de presiune rezultă mai reduse, momentele încovoietoare sînt mai mici, și deci arcul lucrează mai favorabil.

Funicularul particular care reprezintă curba de presiune diferă de la un tip de arc la altul. Se știe că la arcul triplu articulat curba de presiune trece prin cele trei articulații. Să cercetăm acum care este situația la arcul dublu articulat.

Pentru claritate, fie cazul arcului cu două articulații supus la sarcini verticale (fig. 170, *a*). Momentul încovoietor din secțiunea curentă se poate scrie sub forma

$$M_x = M_x^0 - Hy_1 = H(M_x^0/H - y_1), \tag{11.28}$$

unde H este împingerea orizontală a arcului, determinată în prealabil cu ajutorul expresiei (11.18). Relația (11.28) permite trasarea grafică a diagramei de momente încovoietoare pentru arc. În acest scop, este necesar să se construiască diagrama M_x^0 cu ajutorul unui funicular al sarcinilor date, avînd distanță polară egală cu împingerea H; dacă se măsoară ordonatele de la linia de închidere, se obțin segmentele $m_x^0 = M_x^0/H$ corespunzătoare grinzii simplu rezemate.

Totodată, trebuie ca linia de închidere a acestui funicular să fie chiar linia *1-2* a articulațiilor, spre a putea obține direct diferența de segmente $(m_x^0 - y_1)$ din relația (11.28). Urmează deci să se construiască un funicular particular al sarcinilor, care să îndeplinească trei condiții specifice arcului dublu articulat: să treacă prin articulațiile de la extremitățile arcului și să aibă ca distanță polară împingerea orizontală H.

Construcția se face în modul următor. Se determină mai întîi reacțiunile V_1^0 și V_2^0 ale grinzii simplu rezemate (fig. 170, *b*), folosind un funicular construit cu un pol oarecare O' și ducînd linia de închidere $1'$-$2'$. Oricare ar fi polul ales, raza polară paralelă cu linia de închidere trebuie să determine aceleași valori V_1^0 și V_2^0. Se consideră ca linie de închidere linia *1-2* a articulațiilor arcului și se duce în poligonul forțelor o paralelă prin punctul de separație a reacțiunilor V_1^0 și V_2^0; orice punct de pe această dreaptă (dreapta lui *Culmann*) reprezintă polul unui funicular care trece prin cele două articulații. Impunînd acum condiția ca distanța polară să fie egală cu împingerea H a arcului, se obține polul O al funicularului care îndeplinește toate cele trei condiții și este deci o soluție unică.

Construind acest funicular (fig. 170, *c*), ale cărui ordonate pînă la linia de închidere sînt tocmai segmentele m_x^0, se obține diagrama de momente încovoietoare a arcului: *ea este reprezentată de suprafața cuprinsă între funicular și axa arcului, cu ordonate măsurate pe verticală și multiplicate cu împingerea H*. Zona pozitivă a diagramei este cea unde funicularul trece deasupra arcului, așa cum rezultă din (11.28).

Construcția făcută permite să se identifice proprietățile caracteristice ale curbei de presiune. În poligonul forțelor se constată că razele polare extreme dau chiar mărimile reacțiunilor arcului cu două articulații, deoarece componentele orizontale sînt egale cu H, iar componentele verticale satisfac relațiile (11.3)

$$V_1 = V_1^0 + H \operatorname{tg} \alpha \quad \text{și} \quad V_2 = V_2^0 - H \operatorname{tg} \alpha.$$

În poligonul funicular, care trece prin articulațiile arcului, laturile extreme sînt suporturile reacțiunilor R_1 și R_2. Asemănător, se constată că rezultanta forțelor exterioare de la stînga unei anumite secțiuni i are ca suport latura funicularului care succedă acestui grup de forțe, iar ca mărime — raza polară corespunzătoare din poligonul forțelor. Punctul în care rezultanta înțeapă planul secțiunii este centrul de presiune (fig. 170, *d*); reducînd rezultanta în raport cu centrul de greutate al secțiunii, se găsesc eforturile N_i, T_i și M_i.

Se ajunge la concluzia: *curba de presiune a arcului cu două articulații, încărcat cu sarcini verticale, este reprezentată de funicularul particular al sarcinilor care trece prin cele două articulații și are distanță polară egală cu împingerea orizontală a arcului*. Pe această bază se poate obține direct semnificația diagramei din figura 170, *c*, folosind figura 170, *d*. Într-adevăr, momentul încovoietor M_i din secțiunea arcului se obține ca moment al rezultantei R în raport cu centrul de greutate al secțiunii, deci $M_i = Rd = R \cdot \overline{ii'} \cos \beta = \overline{ii'} \cdot H$, unde $\overline{ii'}$ este segmentul pe verticală cuprins între funicular și arc.

Este utilă o comparație între curba de presiune a arcului cu două articulații și cea a arcului cu trei articulații, deoarece apare o deosebire caracteristică:

(*a*) La arcul cu trei articulații, curba de presiune este reprezentată de funicularul particular al sarcinilor, care trece prin cele trei articulații. Acest funicular îndeplinește deci trei condiții de natură *geometrică*, rezultînd din poziția relativă a articulațiilor. Forma axei arcului și dimensiunile secțiunilor nu influențează funicularul; dînd-se pozițiile articulațiilor, funicularul ce rezultă este unic și independent de configurația ce se dă axei între articulații.

(*b*) La arcul cu două articulații, curba de presiune este reprezentată de funicularul particular al sarcinilor ce trece prin cele două articulații și are distanță polară egală cu împingerea H, care este o cantitate static nedeterminată. Acest funicular îndeplinește deci două condiții de natură *geometrică* și o condiție de natură *elastică*, deoarece împingerea H depinde de forma axei arcului și de dimensiunile secțiunilor, așa cum se vede din relația (11.18). Forma axei arcului și curba de presiune sînt în acest caz *dependente*, o modificare a celei dintîi conducînd la corectarea mărimii împingerii și, în consecință, la modificarea curbei de presiune. Această dependență este datorită nedeterminării statice a arcului cu două articulații.

5. Utilizarea concomitentă a două sisteme de bază

Forma optimă a arcului cu două articulații se alege de obicei drept cea corespunzătoare arcului cu trei articulații, care este dată de funicularul sarcinilor ce trece prin centrele de greutate ale secțiunilor de la nașteri și cheie. *Forma de coincidență pentru arcul triplu articulat nu poate rămîne formă de coincidență și pentru arcul dublu articulat*, cît timp articulațiile de la extremități au poziție *fixă*. Într-adevăr, datorită compresiunii arcul *se scurtează*, deoarece fiecare element al său își reduce lungimea. Înseamnă că și mărimea deschiderii ar trebui să se reducă, dar articulațiile de la capete nu permit aceasta. Realizarea continuității la cheie trebuie deci să ducă în mod necesar la o modificare în comportarea arcului, sub forma apariției unei *corecții de împingere* H^*.

Această corecție de împingere poate fi considerată drept cantitate static nedeterminată; o cale avantajoasă constă în utilizarea concomitentă a două sisteme de bază, cum s-a arătat la metoda generală a eforturilor. Pentru calculul practic, o asemenea rezolvare este cea indicată în special în cazul sarcinilor permanente, cînd se realizează de obicei o apropiere de forma de coincidență. Se elimină astfel calculul momentelor încovoietoare cu expresia $M_x = M_x^0 - Hy$, în care apare valoarea integrală a împingerii arcului cu două articulații și unde cei doi termeni ai diferenței sînt de valori foarte apropiate, ceea ce poate conduce la erori mari pentru M_x.

Fie arcul dublu articulat din figura 171, *a*, supus la sarcini verticale. Pentru diagramele unitare corespunzătoare necunoscutei se consideră sistemul de bază din figura 171, *b*, deci $m_{x1} = -y$ și $n_{x1} = -\cos\varphi$. Pentru sarcini se admite sistemul de bază din figura 171, *c*, cu eforturile $M_{xs}^{(a)}$ și $N_{xs}^{(a)}$, care sînt cele ale arcului cu trei articulații. Necunoscuta este dată de ecuația $H^* u_{11} + u_{1s} = 0$,

în care termenul liber u_{1s} rezultă din combinarea diagramelor de eforturi ale celor două sisteme de bază. Se obține

$$H^* = -\frac{u_{1s}}{u_{11}} = -\frac{\int M_{xs}^{(a)} y \, d\omega + \int N_{xs}^{(a)} \cos\varphi \, d\omega'}{\int y^2 \, d\omega + I i_c^2},$$

cu observația că în acest caz nu se mai poate neglija efectul forțelor axiale asupra numărătorului, deoarece la arcul cu trei articulații acestea au valori importante, în timp ce momentele încovoietoare sînt mici.

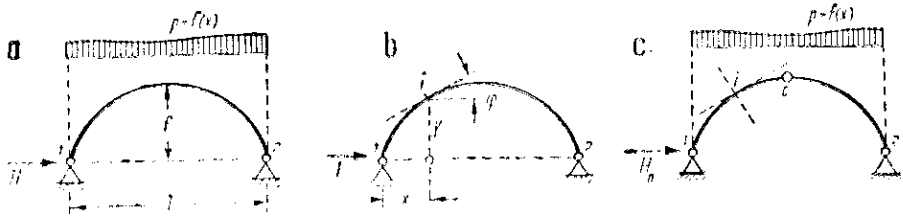


Fig. 171

Momentul încovoietor se poate pune sub forma $M_{xs}^{(a)} = m_{xs}^{(a)} - H_0 y$, unde $m_{xs}^{(a)}$ este segmentul cuprins între curba de presiune și arc, în cazul arcului cu trei articulații încărcat cu sarcinile date (fig. 171, *c*); H_0 este împingerea acestui arc. În același caz, dacă axa arcului este apropiată de curba de presiune, se poate admite aproximativ $N_{xs}^{(a)} \cos\varphi \cong -H_0$, deoarece forțele tăietoare devin neglijabile. Introducînd în expresia necunoscutei H^*, rezultă

$$H^* = H_0 \frac{\int m_{xs}^{(a)} y \, d\omega - \int d\omega'}{\int y^2 \, d\omega + I i_c^2} = H_0 \frac{\int m_{xs}^{(a)} y \, d\omega - I i_c^2}{(1+\nu)\int y^2 \, d\omega}, \tag{11.29}$$

unde s-a admis aproximația $d\omega' \cong i_c^2 d\omega$; numitorul este același ca în expresia generală (11.20), cu notația (11.19).

Cînd în sistemul de bază $M_{xs}^{(a)} = 0$, deci cînd pentru arcul cu trei articulații există formă de coincidență, prima integrală din numărător dispare și se obține

$$H^* = -H_0 \frac{I i_c^2}{(1+\nu)\int y^2 \, d\omega} = -H_0 \frac{\nu}{1+\nu} = -(1-\eta) H_0. \tag{11.30}$$

Corecția de împingere H^* este de sens contrar împingerii H_0, respectiv sarcinii-unitate din figura 171, *b*, deci realizarea continuității la cheia arcului cu două articulații conduce la o *micșorare* a împingerii. Mărimea acesteia este

$$H = H_0 + H^* = H_0/(1+\nu) = \eta H_0. \tag{11.31}$$

Calculul momentelor încovoietoare din secțiunile arcului dublu articulat se face cu expresia

$$M_x = M_{xs}^{(a)} - H^* y,$$

unde $M_{xs}^{(a)}$ corespunde arcului cu trei articulații. Cînd $M_{xs}^{(a)}=0$, rezultă

$$M_x=-H^*y=-(1-\eta)H_0y. \tag{11.32}$$

Astfel, în cazul unui arc parabolic simetric încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea, $H_0=pl^2/8f$ și $y=4f\xi(1-\xi)$, deci

$$H^*=-(1-\eta)pl^2/8f, \qquad H=\eta pl^2/8f, \qquad M_x=(1-\eta)pl^2\xi(1-\xi)/2.$$

Diagrama M_x este pozitivă și are formă parabolică; deoarece η este apropiat de unitate, ordonatele diagramei sînt foarte mici.

B. ARCUL DUBLU ÎNCASTRAT

1. Metoda centrului elastic

a. **Determinarea parametrilor centrului elastic.** Arcul dublu încastrat este de trei ori static nedeterminat, și deci pentru rezolvare este necesar să se aleagă trei necunoscute suplimentare. Alegerea poate fi făcută în mai multe moduri. În cazul general, la arce de formă oarecare și cu extremități denivelate, este preferabil ca trecerea la sistemul de bază să se facă prin suprimarea uneia dintre încastrări, de exemplu încastrarea din extremitatea *1*, introducînd necunoscutele H_1, V_1 și M_1. Încărcînd-o succesiv cu sarcinile-unitate corespunzătoare necunoscutelor, în extremitatea *1* apar de fiecare dată atît deplasări pe verticală și pe orizontală, cît și rotiri, astfel că toți coeficienții secundari din ecuațiile de condiție sînt diferiți de zero; se ajunge deci la trei ecuații cu trei necunoscute.

Simplificări importante se pot obține pe căile cunoscute de la metoda generală a eforturilor, și anume utilizînd aici procedeul necunoscutelor grupate, sub forma transferării necunoscutelor, discutată anterior în legătură cu figura 145. Pentru ortogonalizarea diagramelor unitare se adunite că încastrarea din extremitatea *1* este mutată într-un punct *O* din planul arcului, prin intermediul barei perfect rigide *1-O* (fig. 172, *b*); această operație nu are nici o influență asupra deformării arcului dat. Punctul *O*, în care se aplică necunoscutele suplimentare X_1, X_2 și X_3, poartă numele de *centru elastic*; parametrii corespunzători (coordonatele *c* și *d*, precum și înclinarea β) trebuie aleși astfel ca să se anuleze coeficienții secundari din ecuațiile de condiție.

Pentru claritate, se consideră o etapă intermediară în procesul de ortogonalizare, anume înlocuind necunoscutele inițiale H_1, V_1 și M_1 prin necunoscutele grupate X_1', X_2', X_3 din centrul elastic (fig. 172, *a*), unde gruparea s-a efectuat printr-o simplă translație. Deoarece stabilirea poziției punctului *O* rezultă prin impunerea a două condiții, înseamnă că este posibilă numai anularea a două perechi de coeficienți secundari, anume $\delta_{13}=\delta_{31}=0$ și $\delta_{23}=\delta_{32}=0$. Aceste condiții definesc semnificația centrului elastic: *punctul din planul arcului unde, aplicînd un moment asupra extremității barei fictive, această extremitate nu are deplasări liniare.* O altă formulare echivalentă este: punctul din planul arcului

unde, aplicînd o forță de direcție oarecare în plan asupra extremității barei rigide, aceasta nu se rotește.

Dacă se ține seama numai de efectul momentelor încovoietoare, condițiile sînt

$$EI_c\delta_{13} = EI_c\delta_{31} = \int m_{x1}m_{x3}d\omega = 0 \text{ și } EI_c\delta_{23} = EI_c\delta_{32} = \int m_{x2}m_{x3}d\omega = 0.$$

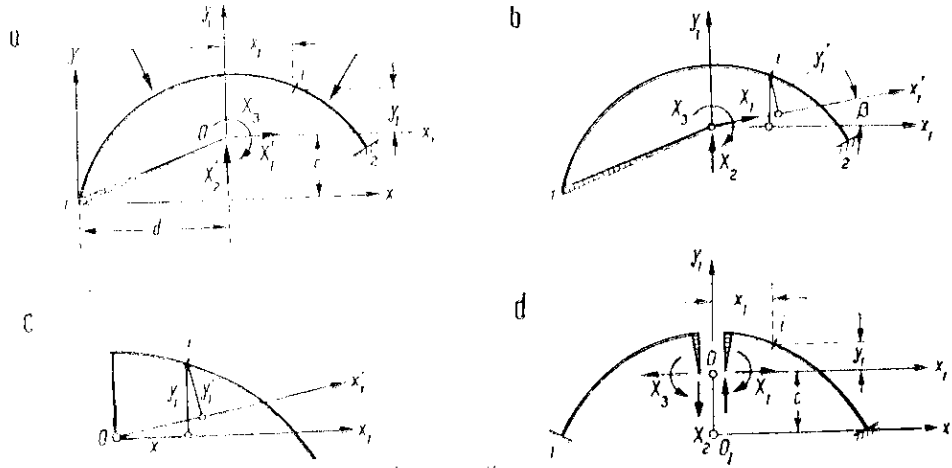


Fig. 172

Pentru sistemul de axe x_1Oy_1 (fig. 172, *a*) se poate scrie în secțiunea curentă a arcului

$$m'_{x1} = -y_1, \quad m'_{x2} = x_1, \quad m_{x3} = 1,$$

astfel încît condițiile devin

$$\int y_1\, d\omega = 0 \quad \text{și} \quad \int x_1\, d\omega = 0, \tag{11.33}$$

arătînd că *punctul O trebuie să coincidă cu centrul de greutate al elementelor convenționale de arie* $d\omega = ds.I_c/I$ *distribuite în lungul axei arcului*. Poziția centrului elastic față de sistemul de referință inițial, cu originea în extremitatea *1*, se obține introducînd în condițiile (11.33) corelațiile dintre noile și vechile coordonate ale secțiunii curente, anume $y_1 = y - c$ și $x_1 = x - d$. Se găsește

$$c = \int y d\omega / \int d\omega \text{ și } d = \int x d\omega / \int d\omega, \tag{11.34}$$

ca la determinarea oricărui centru de greutate.

Pe baza simplificării introduse, sistemul ecuațiilor de condiție este

$$\delta_{11}X'_1 + \delta_{12}X'_2 + \Delta_{1s} = 0, \quad \delta_{21}X'_1 + \delta_{22}X'_2 + \Delta_{2s} = 0, \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3s} = 0, \tag{11.35}$$

unde au rămas încă două ecuații cu cîte două necunoscute. Ultima pereche de coeficienți secundari se poate anula numai dacă se înlocuiește descompu-

nerea reacțiunii-forță din încastrarea O în componentele X_1' și X_2' după orizontală și verticală, prin descompunerea în componente după alte două direcții. Se pot alege două axe perpendiculare între ele, caz în care sistemul de axe rezultă rotit în ansamblu cu un anumit unghi, sau se păstrează una dintre axe (de exemplu, axa y_1), iar celeilalte i se dă o înclinare β, ca în figura 172, *b*. Necunoscutele suplimentare sînt acum X_1, X_2 și X_3, ultima fiind aceeași ca în figura 172, *a*.

Mărimea unghiului β rezultă din condiția

$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \int m_{x1}m_{x2}d\omega = 0,$$

care arată că noul sistem de axe $x_1'Oy_1$ trebuie astfel ales încît, aplicînd o forță în extremitatea barei fictive după direcția uneia dintre axe, să nu se producă deplasare după direcția celeilalte axe. În secțiunea curentă

$$m_{x1} = -y_1', \quad m_{x2} = x_1, \quad \text{și deci} \quad \int x_1 y_1' d\omega = 0, \tag{11.36}$$

de unde rezultă că axele x_1' și y_1 trebuie să fie *axe conjugate* în raport cu elipsa centrală de inerție corespunzătoare distribuției elementelor convenționale de arie $d\omega = ds.I_c/I$. Dacă pentru descompunerea reacțiunii-forță din încastrarea O se alegeau două axe perpendiculare între ele, condiția (11.36) arată că acestea trebuie să fie *axe principale* pentru ansamblul elementelor $d\omega$.

Mărimea unghiului β rezultă folosind corelația $y_1' = y_1 \cos\beta - x_1 \sin\beta$, care se obține prin proiectarea pe direcția lui y_1' a conturului închis de coordonate arătat în figura 172, *c*. Introducînd în condiția (11.36), se obține

$$\operatorname{tg}\beta = \int x_1 y_1 \, d\omega / \int x_1^2 \, d\omega, \tag{11.37}$$

care determină direcția axei x_1' și deci a necunoscutei X_1.

Cu necunoscutele X_1, X_2 și X_3 alese în acest fel se ajunge la ecuațiile independente

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1s} = 0, \qquad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2s} = 0, \qquad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3s} = 0,$$

și deci cele trei necunoscute se calculează cu expresiile

$$X_1 = -\Delta_{1s}/\delta_{11}, \qquad X_2 = -\Delta_{2s}/\delta_{22}, \qquad X_3 = -\Delta_{3s}/\delta_{33}, \tag{11.38}$$

care se aplică pentru orice încărcare ar acționa asupra arcului. În cazul general, calculul coeficienților și al termenilor liberi se complică datorită axei înclinate x_1', care introduce elemente mai laborios de determinat. De aceea, pentru cazurile cînd intervin arce nesimetrice, în practică se preferă folosirea ecuațiilor de condiție sub forma (11.35), care utilizează raportarea arcului la un sistem de axe rectangulare.

b. **Expresiile necunoscutelor din centrul elastic.** La aplicarea expresiilor (11.38) se ridică probleme similare celor întîlnite la arcul cu două articulații, în ceea ce privește integralele ce trebuie reținute în expresiile deplasărilor, ținînd seama de ponderea diferită a acestora. Pe baza studiilor comparative s-a ajuns la următoarele concluzii:

(1) *Privitor la numitorii* δ_{ii}. La arcele uzual întîlnite în construcții, influența curburii este foarte redusă și poate fi totdeauna neglijată; de asemenea, este redusă și influența forțelor tăietoare pentru arce subțiri și mai turtite. În schimb, influența forțelor axiale în expresia numitorului δ_{11} poate deveni importantă la arce turtite și sporește o dată cu creșterea grosimii arcului la cheie. Pe baza acestor constatări și ținînd seama că pentru cazul general din figura 172, *b*

$$m_{x1} = -y_1', \quad n_{x1} = -\cos(\varphi-\beta), \quad m_{x2} = x_1, \quad m_{x3} = 1,$$

se găsesc următoarele expresii ale numitorilor din ecuațiile (11.38)

$$\delta_{11} = \int y_1'^2 ds/EI + \int \cos^2(\varphi-\beta) ds/EA \cong \int y_1'^2 ds/EI + l/EA_c,$$
$$\delta_{22} = \int x_1^2 ds/EI, \quad \delta_{33} = \int ds/EI, \tag{11.39}$$

unde pentru termenul al doilea din expresia lui δ_{11} s-a admis o evaluare aproximativă, în același mod ca la arcul cu două articulații.

(2) *Privitor la numărătorii* Δ_{is}. Aici influența curburii și a forțelor tăietoare este totdeauna neglijabilă; de asemenea este neglijabilă influența forțelor axiale pentru sistemul de bază ales (bara curbă încastrată la un singur capăt), unde acțiunea sarcinilor dă momente încovoietoare mari. Deci

$$\Delta_{1s} = \int M_{xs} m_{x1} \frac{ds}{EI} = -\int M_{xs} y_1' \frac{ds}{EI}, \quad \Delta_{2s} = \int M_{xs} m_{x2} \frac{ds}{EI} = \int M_{xs} x_1 \frac{ds}{EI},$$
$$\Delta_{3s} = \int M_{xs} m_{x3} \frac{ds}{EI} = \int M_{xs} \frac{ds}{EI},$$

astfel că expresiile necunoscutelor devin

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1s}}{\delta_{11}} = -\frac{\int M_{xs} y_1' ds/EI}{\int y_1'^2 ds/EI + l/EA_c} = -\frac{\int M_{xs} y' d\omega}{\int y_1'^2 d\omega + I i_c^2}, \tag{11.40}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2s}}{\delta_{22}} = -\frac{\int M_{xs} x_1 d\omega}{\int x_1^2 d\omega}, \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3s}}{\delta_{33}} = -\frac{\int M_{xs} d\omega}{\int d\omega},$$

unde s-a multiplicat la numărător și numitor cu constanta EI_c și s-au folosit notațiile cunoscute $d\omega = ds.I_c/I$ și $I_c/A_c = i_c^2$.

Pentru evaluarea integralelor din expresiile necunoscutelor se folosesc aceleași căi ca și la arcul cu două articulații. Cînd forma axei arcului și legea de variație a momentului de inerție sînt date de expresii ușor integrabile, se preferă integrarea directă, deoarece conduce la stabilirea de expresii generale; în celelalte cazuri se recurge la operarea prin bolțari.

O dată aflate necunoscutele X_1, X_2, X_3, se poate trece la exprimarea reacțiunilor din încastrarea I sub forma

$$H_1 = X_1 \cos\beta, \quad V_1 = -X_2 + X_1 \sin\beta, \quad M_1 = X_3 + X_1(c\cos\beta - d\sin\beta) - X_2 d$$

și a eforturilor din secțiunea curentă, care sînt

$$N_i = N_{is} - X_1 \cos(\varphi - \beta) - X_2 \sin\varphi, \quad T_i = T_{is} - X_1 \sin(\varphi - \beta) + X_2 \cos\varphi,$$
$$M_i = M_{is} + X_3 - X_1[(y_i - c)\cos\beta + (d - x_i)\sin\beta] - X_2(d - x_i), \qquad (11.41)$$

unde N_{is}, T_{is}, M_{is} sînt eforturile date de sarcini în sistemul de bază.

2. Utilizarea centrului elastic la arce simetrice

a. **Expresiile necunoscutelor.** Se adoptă un sistem de bază simetric, obținut prin secționarea la cheie a arcului dublu încastrat. Dintre cele trei necunoscute, două sînt simetrice (forța axială și momentul încovoietor) și una antisimetrică (forța tăietoare), astfel că sînt nuli patru dintre coeficienții secundari. Pentru separarea completă a necunoscutelor se efectuează o grupare prin transferare a primelor două, obținînd sistemul de bază din figura 172, d cu necunoscutele X_1, X_2, X_3 aplicate în punctul O de pe axa de simetrie.

Fixarea poziției punctului O permite să se impună o condiție, anume

$$EI_c\delta_{13} = EI_c\delta_{31} = -\int y_1 d\omega = 0,$$

unde s-a ținut seama că $m_{x_1} = -y_1$ și $m_{x_3} = 1$. Condiția $\int y_1 d\omega = 0$ arată ca punctul O trebuie să coincidă cu centrul de greutate al elementelor convenționale de arie $d\omega$. Distanța c dintre axele x și x_1 rezultă

$$\int y_1 d\omega = \int (y - c) d\omega = 0, \quad \text{deci} \quad c = \int y d\omega / \int d\omega, \qquad (11.42)$$

unde y se măsoară de la linia nașterilor arcului. Se regăsește astfel poziția cunoscută a centrului elastic, care are în acest caz proprietatea că fiecare dintre cele trei necunoscute produce deplasare relativă numai pe propria sa direcție. Datorită simetriei, unghiul β este egal cu zero; axa de simetrie este axă principală pentru distribuția elementelor convenționale de arie $d\omega$, și deci conjugata sa este chiar Ox_1. Pentru necunoscutele din centrul elastic ecuațiile de condiție devin independente, obținînd următoarele expresii

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1s}}{\delta_{11}} = \frac{\int M_{xs} y_1 d\omega}{\int y_1^2 d\omega + I i_s^2},$$
$$X_2 = -\frac{\Delta_{2s}}{\delta_{22}} = -\frac{\int M_{xs} x_1 d\omega}{\int x_1^2 d\omega}, \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3s}}{\delta_{33}} = \frac{\int M_{xs} d\omega}{\int d\omega}, \qquad (11.43)$$

care sînt similare expresiilor generale (11.40).

Cînd arcul ar fi supus unei variații de temperatură, numărătorii din expresiile (11.43) trebuie înlocuiți cu Δ_{1t}, Δ_{2t} și Δ_{3t}. Admițînd creșteri de temperatură de t_1^0 la intrados și de t_2^0 la extrados ($t_2^0 > t_1^0$), cu o creștere de t^0 în axa arcului, apare o solicitare simetrică și deci $X_2 = 0$, deoarece $\Delta_{2s} = 0$. Ceilalți doi

termeni liberi se calculează cu expresia (9.7), unde $\Delta t^0 = t_2^0 - t_1^0$. Considerînd situațiile auxiliare de încărcare respective, pentru $X_1 = 1$ se obține $m_{x1} = -y_1$ și $n_{x1} = -\cos\varphi$, iar pentru $X_3 = 1$ rezultă $m_{x3} = 1$ și $n_{x3} = 0$, astfel că

$$\Delta_{1t} = \alpha\Delta t^0 \int \frac{y_1}{h}\,ds = \alpha t^0 \int \cos\varphi\,ds \quad \text{și} \quad \Delta_{3t} = -\alpha\Delta t^0 \int \frac{ds}{h}. \tag{11.44}$$

Prima integrală a rezultat pozitivă, deoarece sensul deformării date de m_{x1} concordă cu efectul diferenței de temperatură Δt^0 (în ambele cazuri alungirea este la extrados); celelalte două integrale sînt negative datorită neconcordanței de sensuri.

Particularizînd pentru o formă a axei arcului curent întîlnită, anume *arcul parabolic simetric* dublu încastrat, cu legea de variație $I = I_c/\cos\varphi$, se obține $ds = dx$ și deci integrările trebuie făcute după axa x. Ecuația axei arcului, în raport cu sistemul de axe xO_1y_1 avînd originea la mijlocul deschiderii (fig. 172, *d*), este

$$y = f(1 - 4\xi_1^2), \text{ unde } -0{,}5 \leq \xi_1 = x_1/l \leq +0{,}5.$$

Poziția centrului elastic este dată de relația (11.12), în care

$$\int_0^{l/2} y\,dx = fl\int_0^{1/2}(1-4\xi_1^2)d\xi_1 = \frac{fl}{3} \quad \text{și} \quad \int_0^{l/2} dx = \frac{l}{2},$$

astfel că rezultă $c = 2f/3$. Ecuația axei arcului, în raport cu sistemul de axe al centrului elastic, se obține prin transformarea $y = y_1 + 2f/3$, care conduce la

$$y_1 = f(1 - 12\xi_1^2)/3. \tag{11.45}$$

Se pot acum calcula integralele din numitorii expresiilor (11.33), care sînt

$$\int y_1^2\,dx = 2\cdot\frac{f^2 l}{9}\int_0^{1/2}(1-12\xi_1^2)^2\,d\xi_1 = 4f^2 l/45,$$

$$\int x_1^2\,dx = 2\cdot l^3\int_0^{1/2}\xi_1^2\,d\xi_1 = l^3/12, \quad \int dx = l,$$

astfel că se ajunge la următoarele expresii ale necunoscutelor din centrul elastic

$$X_1 = -\eta\frac{45}{4}\frac{}{f^2 l}\int M_{xs}\,y_1\,dx,$$

$$X_2 = -\frac{12}{l^3}\int M_{xs}\,x_1\,dx, \quad X_3 = -\frac{1}{l}\int M_{xs}\,dx, \tag{11.46}$$

unde la prima necunoscută efectul forței axiale a fost introdus prin coeficientul

$$\eta = \frac{1}{1+\nu}, \text{ unde } \nu = \frac{I_c^2}{\int y_1^2\,dx} = \frac{45}{4}\left(\frac{i_c}{f}\right)^2. \tag{11.47}$$

Comparînd cu relația (11.25), se constată că la arcul dublu încastrat influența termenului dat de forțele axiale în numitorul necunoscutei X_1 este de șase ori mai mare ca la arcul cu două articulații.

În cazul variațiilor de temperatură vom admite aproximativ pentru legea de variație a înălțimii secțiunii $h_c/h=\cos\varphi$, astfel că integrala din prima expresie (11.44) se anulează (ea definește tocmai poziția centrului elastic) și integrala din cea de-a doua expresie devine egală cu l. Deci

$$\Delta_{1t}=-\alpha t^0 l \quad \text{și} \quad \Delta_{3t}=-\alpha\Delta t^0 l/h_c,$$

astfel că pentru necunoscutele din centrul elastic rezultă expresiile

$$X_1=\eta_1\frac{45\,\alpha t^0}{4f^2}EI_c \quad \text{și} \quad X_3=\frac{\alpha\Delta t^0}{h_c}EI_c. \tag{11.48}$$

unde s-a ținut seama că numitorii sînt multiplicați cu constanta EI_c. De reținut că, în expresia necunoscutei X_3, $\Delta t^0=t_2^0-t_1^0$ reprezintă diferența de temperatură dintre extrados și intrados.

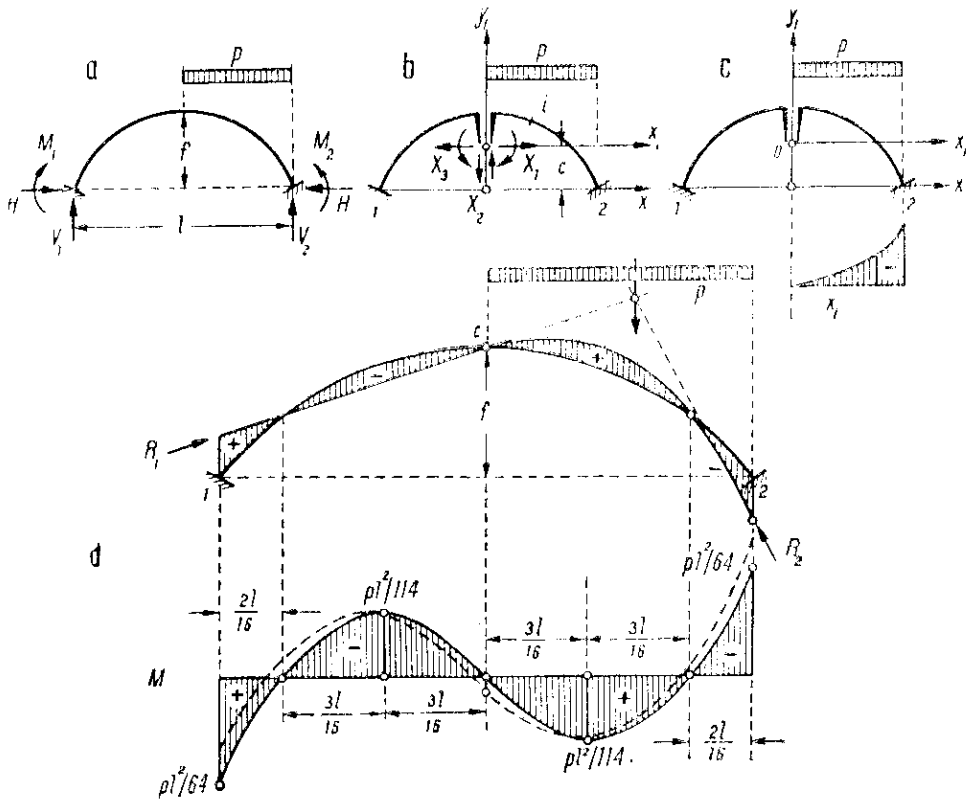


Fig. 173

b. **Exemplificare.** Fie un caz concret de încărcare a arcului, anume o sarcină verticală uniform distribuită pe jumătate din deschidere (fig. 173, *a*). Diagrama M_{xs} se vede în figura 173, *c* și are ordonata curentă $M_{xs}=-px_1^2/2=-pl^2\xi_1^2/2$. Integralele din expresiile (11.46) devin

$$\int M_{xs}y_1\,dx=-\frac{pl^2}{2}\cdot\frac{fl}{3}\int_0^{1/2}(1-12\xi_1^2)\xi_1^2\,d\xi_1=\frac{pfl^3}{180},$$

$$\int M_{xs}x_1 dx = -\frac{pl^2}{2}\cdot l^2\int_0^{1/2}\xi_1^3 d\xi_1 = -\frac{pl^4}{128}, \quad \int M_{xs}dx = -\frac{pl^2}{2}\cdot l\int_0^{1/2}\xi_1^2 d\xi_1 = -\frac{pl^3}{48},$$

astfel că mărimile necunoscutelor din centrul elastic sînt

$$X_1 = \eta\, pl^2/16\, f, \quad X_2 = 3pl/32, \quad X_3 = pl^2/48. \tag{a}$$

Se pot calcula reacţiunile arcului dublu încastrat (fig. 173, *a*) şi eforturile din secţiunea de la cheie:

— reacţiuni în încastrări

$$H = X_1 = \eta pl^2/16\, f, \quad V_1 = X_2 = 3pl/32, \quad V_2 = pl/2 - X_2 = 13\, pl/32,$$
$$M_1 = X_3 + X_1\cdot 2f/3 - X_2\cdot l/2 = pl^2(8\,\eta - 5)/192, \tag{b}$$
$$M_2 = X_3 + X_1\cdot 2f/3 + X_2\cdot l/2 - pl^2/8 = -pl^2(11 - 8\,\eta)/192;$$

— eforturi în secţiunea de la cheie

$$N_c = -X_1 = -\eta pl^2/16\, f, \quad T_c = X_2 = 3\, pl/32, \quad M_c = X_3 - X_1\cdot f/3 = pl^2(1-\eta)/48. \tag{c}$$

Momentul încovoietor din secţiunea curentă are expresii diferite pe cele două jumătăţi ale arcului

$$(1-c) \qquad M_x = X_3 - X_1 y_1 + X_2 x_1 = pl^2\left[2(1-\eta) + 9\,\xi_1 + 24\eta\xi_1^2\right]/96,$$
$$(c-2) \qquad M_x = X_3 - X_1 y_1 + X_2 x_1 - px_1^2/2 = pl^2\left[2(1-\eta) + 9\xi_1 - 24(2-\eta)\xi_1^2\right]/96, \tag{d}$$

în prima relaţie ξ_1 variind de la 0 la $-1/2$, iar în a doua de la 0 la $1/2$. Particularizînd pentru $\xi_1 = -1/2$, $\xi_1 = 1/2$ şi $\xi_1 = 0$, se regăsesc expresiile M_1, M_2 şi M_c date de relaţiile (b) şi (c). Secţiunile de moment încovoietor maxim se obţin prin condiţia $dM/d\xi_1 = 0$, care dă pentru cele două porţiuni

$$(1-c) \qquad \xi_m = -3/16\,\eta, \qquad (c-2) \qquad \xi_m = 3/16(2-\eta).$$

Anulînd parantezele din expresiile M_x, se găsesc şi secţiunile de moment încovoietor nul.

Pentru comparaţie, fie cazul cînd influenţa forţelor axiale asupra necunoscutei X_1 ar fi neglijabilă. Introducînd $\eta = 1$ în expresiile (d), rezultă

$$(1-c) \qquad M_x = pl^2\xi_1(3 + 8\,\xi_1)/32, \qquad (c-2) \qquad M_x = pl^2\xi_1(3 - 8\,\xi_1)/32.$$

Ţinînd seama de semnele variaţiei lui ξ_1, se constată că apare o diagramă de momente încovoietoare antisimetrică. Ordonatele maxime se găsesc în secţiunile definite de $\xi_m = -3/16$, respectiv $\xi_m = +3/16$ şi au mărimile

$$(1-c) \qquad M_{max} = -pl^2/114, \qquad (c-2) \qquad M_{max} = pl^2/114. \tag{e}$$

Secţiunile de anulare ale momentului încovoietor pe cele două porţiuni sînt definite de $\xi_0 = -3/8$, respectiv $\xi_0 = 3/8$; anularea mai intervine şi în secţiunea de la cheie ($\xi_1 = 0$). Cu aceste valori s-a trasat diagrama de momente încovoietoare din figura 173, *d* (linie plină).

Cînd se ţine seama şi de influenţa forţei axiale ($\eta < 1$), diagrama se corectează într-o anumită măsură. Expresiile stabilite permit să se aprecieze natura corecţiilor. Astfel, valoarea M_1 scade şi valoarea M_2 creşte, iar în secţiunea de la cheie apare un mic moment încovoietor pozitiv. Secţiunile de moment încovoietor maxim şi cele de anulare se deplasează puţin spre extremitatea din stînga. Diagrama corectată s-a indicat pe figură prin linie punctată.

3. Utilizarea concomitentă a două sisteme de bază

Cînd axa arcului este apropiată de forma de coincidenţă, în special în cazul sarcinilor permanente (fig. 174, *a*), este indicat şi la arcul dublu încastrat să se utilizeze sisteme de bază diferite pentru necunoscute şi pentru sarcini. Astfel, pentru necunoscute se va menţine sistemul de bază folosit în cele ce precedă, care are avantajul că prin transferarea necunoscutelor în centrul

elastic (fig. 174, *b*) se ajunge la ortogonalizarea diagramelor unitare. În schimb, pentru sarcini se va alege ca sistem de bază arcul cu trei articulații (fig. 174, *c*), la care starea de eforturi este mai apropiată de cea a arcului dublu încastrat. În aceste condiții, necunoscutele X_1^*, X_2^* și X_3^* dau *corecțiile* de diagrame de eforturi cînd se trece de la arcul cu trei articulații la arcul dublu încastrat.

Deoarece în sistemul de bază arc cu trei articulații ordonatele diagramei $M_{xs}^{(a)}$ sînt mici, la calculul termenilor liberi vor trebui menținuți și termenii

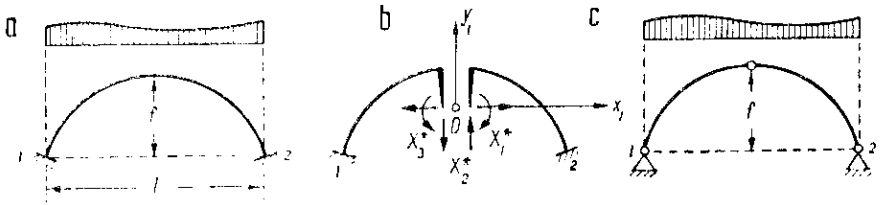


Fig. 174

ce introduc efectul forțelor axiale. Pentru aceasta se ține seama că în sistemul de bază din figura 174, *b*, $n_{x1} = -\cos\varphi$, $n_{x2} = \sin\varphi$ și $n_{x3} = 0$. Se obține

$$EI_c\Delta_{1s}' = \int M_{xs}^{(a)} m_{x1}\,d\omega + \int N_{xs}^{(a)} n_{x1}\,d\omega' = -\int M_{xs}^{(a)} y_1\,d\omega - \int N_{xs}^{(a)}\cos\varphi\,d\omega',$$

$$EI_c\Delta_{2s}' = \int M_{xs}^{(a)} m_{x2}\,d\omega + \int N_{xs}^{(a)} n_{x2}\,d\omega' = \int M_{xs}^{(a)} x_1\,d\omega + \int N_{xs}^{(a)}\sin\varphi\,d\omega',$$

$$EI_c\Delta_{3s}' = \int M_{xs}^{(a)} m_{x3}\,d\omega + \int N_{xs}^{(a)} m_{x3}\,d\omega' = \int M_{xs}^{(a)}\,d\omega.$$

În sistemul de bază arc cu trei articulații se poate scrie pentru cazul *sarcinilor verticale* $M_{xs}^{(a)} = m_{xs}^{(a)} - H_0$, unde $m_{xs}^{(a)}$ este segmentul cuprins între funicularul care trece prin cele trei articulații și arc. Totodată, cînd axa arcului este foarte apropiată de forma de coincidență, mărimea forțelor tăietoare devine neglijabilă, și deci $N_{xs}^{(a)}\cos\varphi = -H_0$, unde H_0 este împingerea arcului cu trei articulații. Se poate deci scrie

$$EI_c\Delta_{1s}' = -H_0\left[\int m_{xs}^{(a)} y_1\,d\omega - \int d\omega'\right],$$

$$EI_c\Delta_{2s}' = H_0\left[\int m_{xs}^{(a)} x_1\,d\omega - \int \operatorname{tg}\varphi\,d\omega'\right], \qquad EI_c\Delta_{3s}' = -H_0\int m_{xs}^{(a)}\,d\omega.$$

Cînd arcul este *simetric*, cel de-al doilea termen din expresia Δ_{2s}' dispare, și deci efectul forțelor axiale rămîne numai la numărătorul Δ_{1s}'. Expresiile necunoscutelor devin:

$$X_{1s}^* = -\frac{\Delta_{1s}}{\delta_{11}} = -H_0\,\frac{\int m_{xs}^{(a)} y_1\,d\omega - l\,i_\sigma^2}{\int y_1^2\,d\omega + l\,i_c^2} = -H_0\,\frac{\int m_{xs}^{(a)} y_1\,d\omega - l\,i_\sigma^2}{(1+\nu)\int y_1^2\,d\omega},$$

$$X_2^* = -\frac{\Delta_{2s}'}{\delta_{22}} = -H_0\,\frac{\int m_{xs}^{(a)} x_1\,d\omega}{\int x_1^2\,d\omega}; \qquad X_3^* = -\frac{\Delta_{3s}'}{\delta_{33}} = -H_0\,\frac{\int m_{xs}^{(a)}\,d\omega}{\int d\omega}, \qquad (11.49)$$

unde la numărătorul corecției X^* s-a admis pentru al doilea termen aceeași evaluare aproximativă ca și la arcul cu două articulații. În expresiile (11.49), toate necunoscutele sînt exprimate în funcție de împingerea H_0 a arcului cu trei articulații.

Cînd în sistemul de bază $M_{xs}^{(a)} = 0$, deci cînd axa arcului a fost aleasă astfel încît să reprezinte forma de coincidență pentru arcul cu trei articulații, $m_{xs}^{(a)} = m_x^0 - y = 0$, și deci primul termen din numărătorul lui X_1^* dispare. De asemenea, se anulează necunoscutele X_2^* și X_3^*, astfel că întreaga corecție a diagramelor de eforturi este dată numai de necunoscuta X_1^* din centrul elastic, care are expresia

$$X_1^* = \psi H_0, \quad \text{unde} \quad \psi = -\frac{I i_c^2}{\int_l y_1^2 \, d\omega + I i_c^2} = -\frac{\nu}{1+\nu} = -(1-\eta). \tag{11.50}$$

Reacțiunile și eforturile arcului dublu încastrat se obțin corectînd pe cele corespunzătoare arcului triplu articulat cu efectul lui X_1^*, stabilit în sistemul de bază din figura 174, *b*. Astfel, reacțiunile sînt

$$V_1 = V_1^0, \quad V_2 = V_2^0, \quad M_1 = M_2 = cX_1^* = c\psi H_0 = -cH_0(1-\eta), \tag{11.51}$$
$$H = H_0 + X_1^* = (1+\psi)H_0 = H_0/(1+\nu),$$

de unde se vede că efectul forțelor axiale (scurtarea arcului) *reduce* mărimea împingerii H. Momentul încovoietor în secțiunea curentă are expresia

$$M_x = M_{xs}^{(a)} - X_1^* y_1 = H_0 y_1 \cdot \nu/(1+\nu) = H_0 y_1 (1-\eta) \tag{11.52}$$

și este datorit numai efectului forțelor axiale. În secțiunea de la cheie

$$M_c = (f-c)H_0 \cdot \nu/(1+\nu) = H_0(f-c)(1-\eta).$$

Astfel, la un *arc parabolic simetric*, încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea, $H_0 = pl^2/8f$ și deci

$$H = \eta pl^2/8f, \quad M_x = (1-\eta)pl^2 y_1/8f, \quad M_1 = M_2 = -(1-\eta)pl^2/12,$$
$$M_c = (1-\eta)pl^2/24,$$

deoarece în secțiunile de la nașteri $y_1 = -2f/3$, iar în secțiunea de la cheie $y_1 = f/3$.

4. Curba de presiune

S-a arătat că, pentru fiecare tip de arc, curba de presiune este reprezentată de un funicular particular al sarcinilor aplicate, care se determină prin impunerea a trei condiții specifice tipului respectiv de arc. La arcul dublu articulat, două dintre condiții erau de natură geometrică (obligația de a trece prin articulațiile de la extremități) și numai una singură era legată de rezolvarea arcului static nedeterminat. La arcul dublu încastrat, toate cele trei condiții depind de rezolvarea arcului static nedeterminat și corespund celor trei nedeterminări statice ale acestuia.

Astfel, în cazul general al unui arc de formă oarecare, încărcat cu diferite sarcini, într-o secțiune i

$$M_i = R_i d_i = N_i e_i \quad \text{sau} \quad e_i = M_i/N_i,$$

unde R_i este rezultanta forțelor exterioare de la stînga secțiunii, care are ca suport latura corespunzătoare a funicularului. Eforturile M_i și N_i din secțiune se calculează pe baza relațiilor (11.41), folosind necunoscutele din centrul

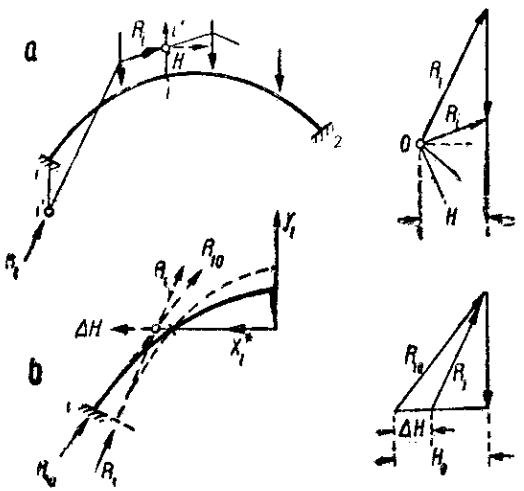


Fig. 175

elastic. Înseamnă că se poate calcula mărimea excentricității e_i, și deci poziția centrului de presiune C_i. Este suficient să se determine excentricitățile pentru trei secțiuni, de exemplu la nașteri și la cheia arcului, spre a obține trei puncte obligate prin care trebuie să treacă curba de presiune.

În cazul sarcinilor *verticale*, situația este arătată în figura 175, *a*, unde

$$M_i = R_i d_i = \overline{ii'} \cdot H, \quad \text{deci} \quad \overline{ii'} = M_i/H,$$

expresie care permite să se calculeze segmentele verticale dintre funicular și arc. Acestea determină diagrama de momente încovoietoare a arcului: suprafața cuprinsă între curba de presiune și axa arcului, cu ordonate măsurate pe verticală și multiplicate cu constanta H (împingerea orizontală a arcului). Zonele pozitive ale diagramei sînt cele unde curba de presiune trece deasupra arcului. Trasarea curbei de presiune necesită determinarea a trei segmente $\overline{ii'}$, de exemplu în secțiunile de la nașteri și cheie ($\overline{11'} = M_1/H$, $\overline{cc'} = M_c/H$, $\overline{22'} = M_2/H$); se construiește apoi funicularul sarcinilor date, care trece prin cele trei puncte i'.

Modul de determinare a curbei de presiune pentru arcul dublu încastrat, care se bazează de fapt pe mărimile celor trei necunoscute din centrul elastic, arată că forma axei și curba de presiune sînt *dependente*. O modificare a axei

arcului duce la corectarea mărimii necunoscutelor din centrul elastic, cum se vede din relațiile (11.40); în consecință se modifică și curba de presiune. Obținerea unei apropieri cît mai mari între axa arcului și curba de presiune nu poate fi realizată decît prin corecții succesive.

Așa cum s-a arătat și la arcul cu două articulații, se alege de obicei drept axă a arcului forma de coincidență corespunzătoare arcului cu trei articulații. Trecerea la arcul dublu încastrat corectează curba de presiune, astfel încît *forma de coincidență nu se mai menține* cît timp extremitățile rămîn fixe. Fenomenul a fost explicat la arcul cu două articulații și explicarea dată rămîne valabilă și aici. Corectarea curbei de presiune se vede în figura 175, *b*. Linia plină reprezintă axa arcului, care coincide cu funicularul ce trece prin cele trei articulații; linia punctată arată curba de presiune a arcului dublu încastrat. Ele se intersectează în punctele arcului situate pe axa Ox_1, deoarece în aceste secțiuni necunoscuta X_1^* (singura care se dezvoltă în centrul elastic pentru cazul $M_{xs}^{(a)}=0$) nu dă moment încovoietor. Momentele încovoietoare sînt proporționale cu ordonatele y_1 și sînt pozitive deasupra axei Ox_1, deoarece din relația (11.50) se vede că $\Delta H=X_1^*$ rezultă de sens contrar cu H_0. Suporturile reacțiunilor R_{10} (arc cu trei articulații) și R_1 (arc dublu încastrat) se intersectează într-un punct situat pe axa Ox_1; compunînd acolo pe R_{10} și ΔH, se obține R_1.

CAPITOLUL XII

METODA GENERALĂ A DEPLASĂRILOR

A. GENERALITĂȚI

1. Cadre cu noduri fixe, cadre cu noduri deplasabile

Este cunoscut că sub denumirea de „cadre" se înțeleg toate acele structuri a căror solicitare dominantă este încovoierea și la care legătura dintre bare în toate nodurile (sau numai într-o parte dintre ele) este *rigidă*. Datorită rigidității nodurilor, în timpul deformării cadrului unghiurile dintre tangentele duse în nod la axele deformate ale barelor rămîn aceleași, astfel că deplasările nodului — rotire și translație — sînt comune tuturor extremităților de bare ce se întîlnesc în acel nod. Înseamnă că *poziția deformată a cadrului poate fi definită prin deplasările suferite de noduri*.

Modul de alegere a acestor deplasări, astfel ca să poată fi considerate drept parametri independenți în definirea poziției deformate, depinde de ipoteza admisă privitor la deformabilitatea axială a barelor. În mod obișnuit, așa cum s-a făcut și în capitolele anterioare, la structurile solicitate dominant la încovoiere se neglijează variațiile de lungime ale barelor datorite deformării. Drept urmare, distanța dintre secțiunile de la extremitățile barei este admisă aceeași în poziția deformată ca și în poziția inițială. Această ipoteză simplificatoare are drept consecință reducerea numărului de necunoscute în metoda deplasărilor și este astfel general admisă cît timp aplicarea metodei urmează să se facă prin calcul manual.[1] Apare însă și o altă consecință, referitoare la posibilitățile de *translație* ale nodurilor, devenind necesar să se distingă două categorii de cadre: cadre cu noduri *fixe* și cadre cu noduri *deplasabile*.

La cadrele cu noduri *fixe*, deformarea este caracterizată prin faptul că *nodurile cadrului se pot roti, dar nu pot suferi translații*. Exemple de cadre cu noduri fixe sînt date în figurile 176, *a* și *c*. Pentru a se înțelege de ce nodurile acestor cadre nu pot avea translații, să considerăm suprimate toate încastrările existente în cadru, introducînd articulații în secțiunile *1*, *2* și *3* pentru primul caz, respectiv în secțiunile *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, . . . pentru al doilea; se obțin sistemele articulate reprezentate alăturat. Se constată că la acestea fiecare nod este legat prin cîte două bare de puncte care nu se pot deplasa, astfel încît le este asigurată invariabilitatea geometrică prin numărul minim de legături necesare. Sistemele articulate rezultă deci static determinate, îndeplinind condiția $d=b-2n=0$ cunoscută de la studiul grinzilor cu zăbrele. Înseamnă că, la cazurile considerate,

[1] Un alt mod de a privi această problemă va fi examinat în partea finală a capitolului următor, de pe poziția cerințelor automatizării calculelor.

numărul încastrărilor este egal cu numărul gradelor de nedeterminare statică: la primul caz sînt trei încastrări și trei nedeterminări, iar la al doilea (numai primele trei contururi) sînt $5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 9$ încastrări și $3 \cdot 3 = 9$ nedeterminări.

Din examinarea făcută rezultă: *cadrele cu noduri fixe se deformează numai prin rotirea nodurilor, poziția acestora rămînînd fixă. La aceste cadre, numărul de încastrări este egal cu gradul de nedeterminare statică, astfel că introducînd articulații în toate nodurile și în încastrările din rezemări se obțin sisteme static determinate.*

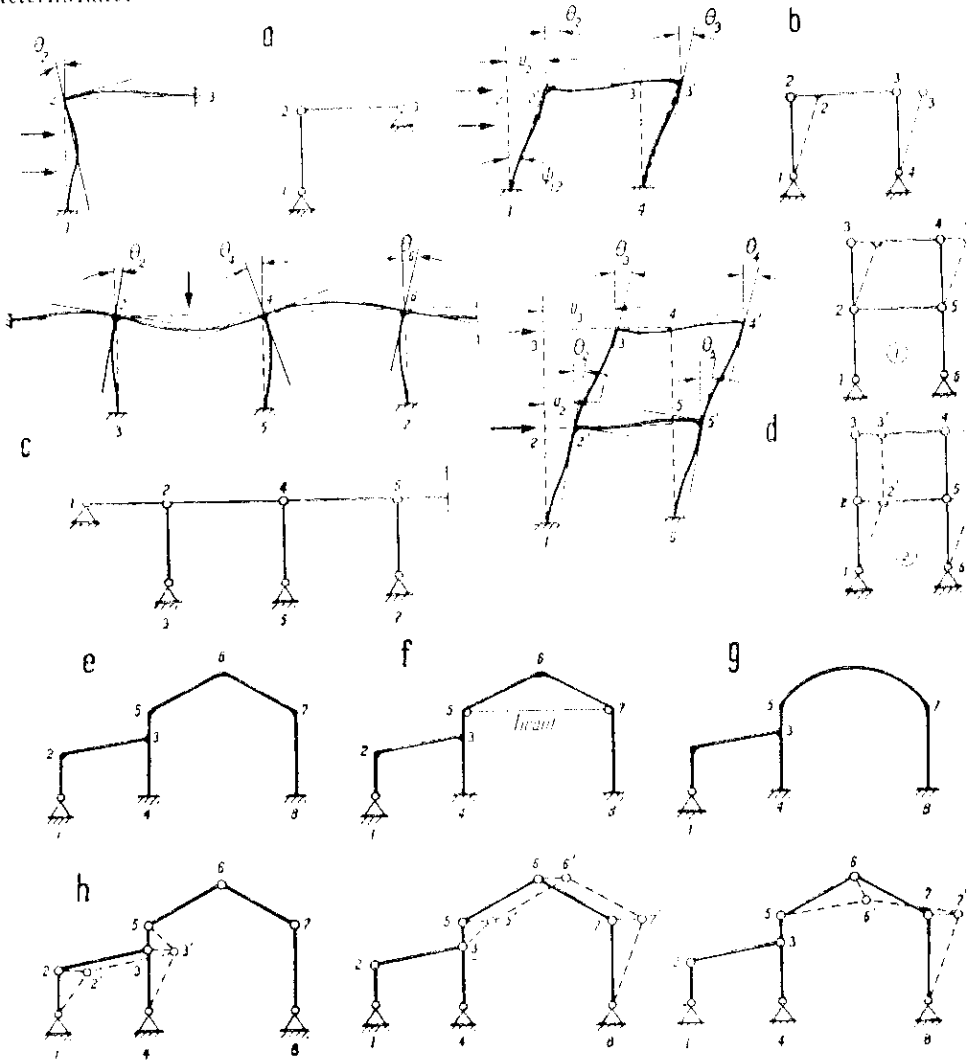


Fig. 176

La cadrele cu *noduri deplasabile*, deformarea este caracterizată prin faptul că *nodurile pot suferi atît roliri cît și translații*, aceasta deoarece poziția nodurilor nu este fixată printr-un număr suficient de bare. Astfel, pentru cadrul din figura 176, *b*, dacă se consideră suprimate toate încastrările existente prin introducerea de articulații în secțiunile *1*, *2*, *3* și *4*, se obține un mecanism care are un singur grad de libertate ($d=b-2n=3-2\cdot 2=-1$); acesta corespunde diferenței dintre numărul încastrărilor și numărul nedeterminărilor cadrului dat (4 față de 3).

Posibilitatea de deplasare cinematică a sistemului articulat este arătată punctat și ea explică modul de deformare a cadrului: introducerea încastrărilor dintre bare în noduri, cît și în rezemări, nu poate împiedica translațiile nodurilor, ci numai le limitează mărimea în funcție de deformabilitatea cadrului și de sarcinile aplicate. În cazul considerat, translațiile nodurilor depind de un singur parametru, care poate fi u_2 sau ψ_{12}. Comparînd schema formată de *axele barelor* (liniile care unesc nodurile) în poziția deformată elastic, cu deplasarea cinematică posibilă pentru sistemul articulat, se vede că ambele au aceeași configurație. Ceea ce le deosebește constă în faptul că la cadrul dat nodurile sînt rigide și barele deformabile, în timp ce sistemul articulat este format din bare rigide articulate între ele în noduri.

Asemănător, pentru cadrul din figura 176, *d*, admițînd suprimate toate încastrările prin introducerea de articulații în *1*, *2*, *3*, *4*, *5* și *6*, rezultă un mecanism care are *două* grade de libertate ($d=b-2n=6-2\cdot 4=-2$); acestea corespund diferenței dintre numărul încastrărilor și numărul nedeterminărilor cadrului dat (8 față de 6). Cele două grade de libertate din sistemul articulat reprezintă două posibilități distincte de deplasare cinematică, care se văd în figurile alăturate. Ele explică modul de deformare a cadrului, cu translații de noduri, de asemenea că mărimile translațiilor în cele două etaje ale cadrului reprezintă doi parametri diferiți ai problemei, care pot fi de exemplu u_2 și u_3.

Exemplificările date scot în evidență faptul că translațiile nodurilor unui cadru cu noduri deplasabile depind de un număr de parametri independenți, egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului cinematic obținut prin introducerea de articulații în noduri și în încastrările din rezemări. Prin analogie, acești parametri se numesc *grade de libertate elastică* ale cadrului dat și reprezintă o caracteristică a alcătuirii structurii.

Se ajunge astfel la concluzia: *cadrele cu noduri deplasabile sînt cele a căror deformare este caracterizată prin roliri și translații de noduri. La aceste cadre, numărul de încastrări este mai mare decît gradul de nedeterminare, astfel că introducînd articulații în noduri și în încastrările din rezemări se obțin mecanisme; surplusul de încastrări, respectiv numărul gradelor de libertate ale mecanismului corespunzător, definesc numărul gradelor de libertate elastică ale cadrului.*

Pe această bază se identifică cu ușurință gradele de libertate elastică ale oricărui cadru. Astfel, cadrul din figura 176, *e* are $6\cdot 1+1\cdot 2=8$ încastrări și $2\cdot 3-1=4$ nedeterminări, deci rezultă $8-5=3$ grade de libertate elastică. Trecînd la sistemul articulat (fig. 176, *h*), sînt puse în evidență cele trei grade de libertate cinematică ($d=b-2n=7-2\cdot 5=-3$), precum și semnificația lor: deplasări laterale ale porțiunilor *1-2-3-4-5* și *3-5-6-7-8*, precum și variație de

distanță între nodurile 5 și 7. Aceste semnificații se regăsesc la cei trei parametri independenți care caracterizează translațiile de noduri ce se produc la trecerea cadrului dat în poziția deformată.

În legătură cu stabilirea numărului gradelor de libertate elastică ale unui cadru, mai sînt necesare unele completări. Cînd în alcătuirea cadrului intervin *tiranți*, trebuie să se țină seama că aceștia preiau numai eforturi axiale (de întindere) și că alungirea lor nu mai poate fi neglijată. Înseamnă că prezența tirantului între nodurile 5 și 7 (fig. 176, *f*) nu împiedică complet variația de distanță între aceste noduri, ci numai o limitează, astfel că gradul de libertate respectiv nu este eliminat, cu toate că s-a introdus o legătură în plus. În consecință, la evaluarea numărului gradelor de libertate elastică ale unui cadru *tiranții nu trebuie consideraţi*.

Un alt caz special se referă la cadrele care au în alcătuirea lor *bare curbe* (fig. 176, *g*). Spre deosebire de barele drepte, care asigură invariabilitatea distanței dintre nodurile pe care le unesc, la o bară curbă — prin deformare — distanța dintre extremități poate varia, și deci nodurile respective pot avea translații diferite. Situația este similară cu la cadrul din figura 176, *e*, bara curbă 5—7 comportîndu-se asemănător cu perechea de bare 5—6—7. Înseamnă că *fiecare bară curbă aduce cadrului un grad de libertate elastică în plus*, peste numărul rezultat din diferența dintre numărul încastrărilor și cel al gradelor de nedeterminare statică. Astfel, cadrul din figura 176, *g* are trei grade de libertate elastică (7—5 | 1—3) și semnificația lor este: deplasări laterale ale porțiunilor *1-2-3-4* și *3-5-7-8*, de asemenea variația de distanță între nodurile 5 și 7.

Examinarea făcută arată că poziția deformată a unui cadru este determinată cînd se cunosc deplasările nodurilor (rotiri și translații). Mărimile rotirilor de noduri au caracter de variabile independente, în timp ce translațiile de noduri sînt interdependente prin intermediul gradelor de libertate. Rezultă că *numărul de parametri independenți, care definesc geometric poziția deformată, este egal cu numărul nodurilor și cel al gradelor de libertate elastică a cadrului*. Poziția deformată rămîne compatibilă cu legăturile și cu continuitatea barelor pentru orice mărimi date acestor parametri (în domeniul micilor deplasări), cum rezultă evident din figura 176. Cît timp mărimile reale ale parametrilor nu sînt cunoscute, înseamnă că poziția deformată este *geometric nedeterminată*.

2. Convenție de semne pentru rotiri și momente de capăt

În metoda deplasărilor, poziția deformată a unui cadru este caracterizată prin rotiri și translații de noduri. Mărimea translației unui nod poate fi exprimată prin rotirea axei uneia dintre barele care vin în nod (rotirea dreptei care unește capetele barei); de exemplu, translația u_2 a nodului *2* (fig. 176, *b*) poate fi definită prin rotirea $\psi_{12}=u_2/h_{12}$ a axei barei *1-2*, care trece în poziția *1-2'*. Înseamnă că poziția deformată a unui cadru poate fi caracterizată prin *rotiri de noduri și rotiri de bare*. Privitor la eforturile care se dezvoltă în cadru, se va vedea mai departe că în metoda deplasărilor intervin în primul rînd efor

turile din secțiunile de la extremitățile barelor; interesează în special momentele din aceste secțiuni, denumite *momente de capăt*.

Specificul metodei deplasărilor arată că este avantajos să se adopte, pentru rotiri și pentru momentele de capăt, convenții de semne care să concorde între ele. O asemenea convenție unitară, deosebit de simplă și ușor de aplicat, constă în *a considera pozitive atît rotirile, cît și momentele de capăt care au sens orar*.

Privitor la *rotiri*, convenția apare clară de la început; oricare ar fi rotirea considerată — rotirea unui nod, a secțiunii din extremitatea unei bare, sau a axei unei bare — aceasta se admite pozitivă cînd se produce în sens orar și negativă cînd se produce în sens antiorar. Astfel, în figura 177, *a* rotirea

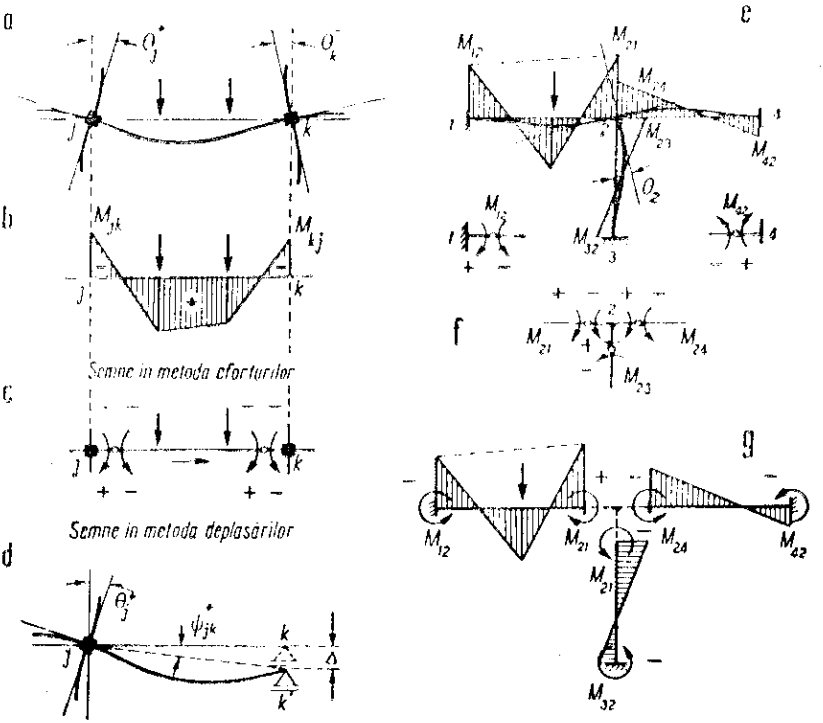


Fig. 177

θ_j a nodului j este pozitivă, în timp ce rotirea θ_k a nodului k este negativă; în figura 177, *d*, atît rotirea θ_j a nodului j, cît și rotirea $\psi_{jk} = \Delta / l_{jk}$ a axei barei j-k (ce trece în poziția j-k') sînt pozitive.

Privitor la *momentele de capăt* sînt necesare unele lămuriri. În metoda eforturilor s-a folosit pentru momentele din secțiuni convenția de semne a momentelor încovoietoare: *perechea* de momente egale și de sens contrar, care reprezintă efectul de continuitate din secțiune, are un *singur* semn rezultat din sensul de parcurgere stabilit inițial pentru acea bară. Astfel, pentru momentele încovoietoare din secțiunile de la extremitățile barei j-k (fig. 177, *a-b*), sen-

surile acestora s-au reprezentat în figura 177, *c*, indicîndu-se (deasupra) și semnele care corespund sensului de parcurgere ales. În noua convenție de semne, cele două momente ale unei perechi trebuie considerate *separat*, deoarece au *semne contrare* (fig. 177, *c*, jos).

Nu se mai consideră deci momentul încovoietor din secțiune, privit ca efort care are un anumit semn, ci *acțiunea reciprocă dintre bară și nod*. Înseamnă că pentru un moment de capăt vom distinge: *momentul aplicat pe bară și momentul aplicat pe nod;* cînd se trece de pe bară pe nod, *momentul de capăt își schimbă semnul*. Prin aceasta se revine de fapt la convenția de semne pentru momente folosită în Mecanică. Pentru claritate, în figura 177, *e* s-a reprezentat poziția deformată a unui cadru cu noduri fixe și diagrama de momente încovoietoare, desenată pe fiecare bară de partea fibrei întinse. În figura 177, *f* s-au indicat momentele de capăt corespunzătoare, cu semnele lor, pentru extremitățile *1* și *4*, precum și pentru barele din jurul nodului *2*.

Utilizarea momentelor de capăt, în cadrul noii convenții de semne, impune să se stabilească de la început cu care anume dintre momente se va lucra: cele aplicate pe bară sau cele aplicate pe nod. Desigur, alegerea poate fi făcută oricum și în literatura de specialitate se întîlnesc ambele alternative; esențial este numai faptul că o alegere trebuie făcută spre a se asigura ordinea în ceea ce privește semnele la stabilirea diferitelor expresii. În consecință, ținînd seama de anumite avantaje care vor apărea mai departe, *convenim de la început ca în tot cuprinsul studiului metodei deplasărilor să se lucreze cu momentele aplicate pe bare*. La stabilirea formulelor generale, momentele pe bară vor fi totdeauna considerate inițial ca pozitive; tot pozitive se vor admite inițial și rotirile de noduri sau bare.

La sfîrșitul calculului vor rezulta mărimile și semnele momentelor de capat, pentru diferite bare ale cadrului; cu ajutorul lor trebuie apoi trasată diagrama de momente încovoietoare. Trecerea de la semnul momentului de capăt (pe bară) la semnul momentului încovoietor rezultă imediat urmărind figura 177, *c;* pentru sensul de parcurgere stabilit pe bara respectivă, în extremitatea din stînga semnul rămîne același, iar în extremitatea din dreapta semnul trebuie inversat. În general, nu este însă necesar să se mai fixeze sensuri de parcurgere și să se stabilească semnele momentelor încovoietoare; este suficient *să se traseze diagrama M de partea fibrei întinse* pentru fiecare bară. Un exemplu este dat în figura 177, *g*. Pe baza semnelor momentelor de capăt s-au reprezentat sensurile acestor momente; fibra întinsă se identifică astfel imediat și de partea ei se ridică în ordonată mărimea momentului.

3. Sistem de bază, necunoscute și ecuații de condiție în metoda deplasărilor

Spre deosebire de metoda eforturilor, care se poate aplica oricărei structuri static nedeterminate, metoda deplasărilor este concepută pentru rezolvarea structurilor cu noduri rigide. S-a arătat că poziția deformată a unui cadru poate fi complet definită dacă se cunosc deplasările suferite de noduri (rotiri

și translații). Cunoscînd deplasările nodurilor, se pot afla momentele de capăt pentru fiecare bară și, în consecință, se poate determina diagrama de momente încovoietoare. Deplasările nodurilor pot constitui astfel elementul de bază la rezolvarea unui cadru.

Pentru înțelegerea specificului metodei deplasărilor, aceasta trebuie comparat cu cel al metodei eforturilor. Se pornește de la condițiile care caracterizează situația de echilibru elastic a unei structuri: condiția de echilibru static și condiția de compatibilitate (continuitate) a poziției deformate. Se ține totodată seama că pentru rezolvarea unei structuri static nedeterminate este necesar să se folosească un *sistem de bază*, care să aibă rezolvare cunoscută și pe care se va desfășura calculul.

În metoda *eforturilor* s-a ajuns la sistemul de bază prin *suprimarea* unui număr de legături, ceea ce reprezintă o abatere de la condiția de continuitate a structurii date. Numărul legăturilor suprimate se alege obișnuit astfel încît să se ajungă la un *sistem static determinat*, care este sistemul de bază specific metodei eforturilor. Forțele de legătură ce corespund legăturilor suprimate devin necunoscutele problemei. Încărcînd sistemul de bază numai cu sarcini, respectiv numai cu anumite necunoscute sau grupări de necunoscute, condiția de echilibru static corespunzătoare acestor încărcări este permanent respectată; în schimb, pe direcțiile legăturilor suprimate se pot produce deplasări elastice care — în structura dată — nu sînt permise de prezența acestor legături. Abaterea de la condiția de continuitate indică și criteriul de scriere a ecuațiilor suplimentare (de condiție). Considerînd sistemul de bază încărcat *concomitent* cu sarcini și necunoscute, trebuie să se regăsească poziția deformată a structurii date în situația de echilibru elastic; înseamnă că — pentru această încărcare — deplasările pe direcțiile legăturilor suprimate trebuie să fie nule. Se restabilește astfel condiția de continuitate.

În metoda *deplasărilor* se ajunge la sistemul de bază prin *adăugarea* unui număr de legături. Scopul introducerii acestor legături convenționale este de a împiedica deplasările nodurilor cadrului (rotiri și translații). Cînd legăturile astfel introduse blochează complet deplasările tuturor nodurilor, se ajunge la un *sistem geometric determinat* (cu legături complete), care este sistemul de bază specific metodei deplasărilor. În acest sistem, fiecare bară poate fi privită separat, deoarece apare ca perfect încastrată în nodurile de la extremități; înseamnă că rezolvarea barei este cunoscută.

Numărul legăturilor convenționale care se introduc trebuie să fie egal cu numărul deplasărilor *distincte* posibile pentru noduri, ce rezultă din alcătuirea cadrului dat. În primul rînd trebuie considerate rotirile de noduri, astfel că pentru fiecare nod devine necesară introducerea cîte unei legături. La cadrele cu noduri deplasabile sînt posibile și translații de noduri. S-a arătat anterior că aceste translații depind de un număr de parametri independenți, egal cu numărul gradelor de libertate elastică ale cadrului. Fiecărui grad de libertate îi corespunde o posibilitate distinctă de deplasare a unei porțiuni de cadru, care poate fi împiedicată prin introducerea unei singure legături, de exemplu împiedicînd translația unuia din nodurile porțiunii respective. Rezultă că *numărul legăturilor care trebuie introduse pentru obținerea sistemului de bază*

este egal cu numărul nodurilor cadrului, plus numărul gradelor sale de libertate elastică.

Caracterul convențional al legăturilor introduse permite să li se atribuie funcțiunile dorite; în toate cazurile se vor adopta numai *legături simple*, care împiedică deplasarea pe o singură direcție. Astfel, legătura specifică ce împiedică rotirea unui nod dintr-un cadru plan trebuie privită ca o blocare, în care se poate dezvolta numai o *reacțiune-moment*, având sens contrar tendinței de rotire a nodului; o astfel de legătură nu împiedică translația nodului. Legătura specifică ce împiedică manifestarea unui grad de libertate poate dezvolta numai

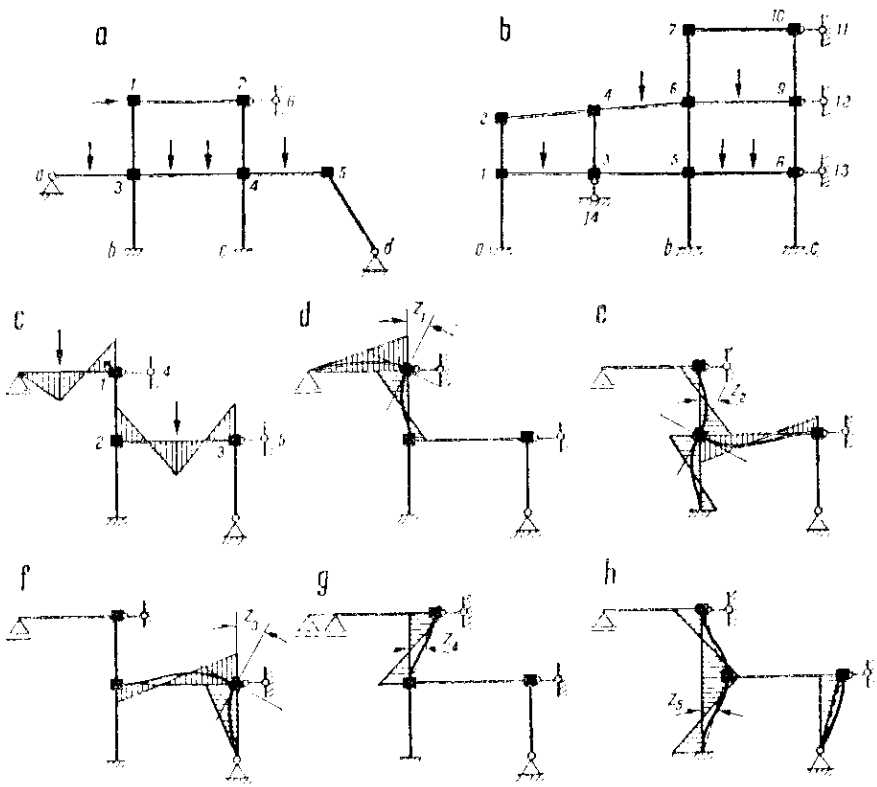


Fig. 178

o *reacțiune-forță*, având sens opus tendinței de deplasare liniară a nodului în care este aplicată; o astfel de legătură apare ca un reazem simplu (pendul). Modul de reprezentare a celor două tipuri de legături convenționale se vede în figura 178.

Pentru blocarea gradelor de libertate se stabilește mai întîi numărul acestora și se identifică porțiunile de structură care corespund fiecăruia dintre

ele, cum s-a arătat în legătură cu figura 176. Cercetarea posibilităților de deformare a structurii duce cu ușurință la stabilirea deplasărilor distincte, deoarece acestea sînt componente ale deformării totale. Pe măsura stabilirii lor, pentru fiecare deplasare distinctă se introduce legătura de blocare corespunzătoare: un reazem simplu (pendul) aplicat la unul din nodurile porțiunii respective, pe direcția tendinței de deplasare a acestuia.

În figurile 178, *a* și *b* sînt date exemple de sisteme de bază pentru metoda deplasărilor. Se blochează mai întîi fiecare nod în parte, apoi se trece la gradele de libertate. Cadrul din primul caz are un singur grad de libertate [încastrări — nedeterminări = 11 — (4.3 — 2) = 1], care este reprezentat de posibilitatea de translație a riglei superioare. Pentru blocare s-a introdus un reazem simplu orizontal în nodul *2*. Cadrul din al doilea caz are patru grade de libertate (22 — 6.3 = 4), dintre care trei sînt reprezentate de posibilitățile de deplasare laterală a celor trei etaje (rigle), iar al patrulea provine de la posibilitatea deplasării pe verticală a stîlpului *3-4*, care nu se continuă la nivelul inferior. În consecință, s-au introdus trei legături orizontale în nodurile *8*, *9*, *10* și o legătură verticală în nodul *3*.

Trecerea la sistemul de bază, prin introducerea legăturilor convenționale, scoate în evidență necunoscutele specifice metodei deplasărilor: *rotirile de noduri și parametrii care definesc deplasările corespunzătoare gradelor de libertate*. Sistemul de bază apare astfel ca rezultînd din cadrul dat, prin condiția ca *toate necunoscutele să fie nule*. Pentru regăsirea situației de echilibru elastic a cadrului în poziția deformată, sistemul de bază trebuie încărcat cu sarcini și cu necunoscute. Aplicarea sarcinilor reprezintă o încărcare de forțe, în timp ce *aplicarea necunoscutelor reprezintă o încărcare cu deplasări*.

Pentru orice încărcare aplicată pe sistemul de bază, condiția de compatibilitate este respectată, deoarece nu a fost suprimată nici o legătură și în consecință nu se poate produce nici o deplasare care ar fi împiedicată în cadrul dat. În același timp însă, încărcînd separat sistemul de bază cu sarcini, cu necunoscute sau cu grupări de necunoscute, în legăturile convenționale ce au fost introduse se dezvoltă reacțiuni care nu există în structura reală, ci reprezintă numai elemente auxiliare de calcul. Trecerea la sistemul de bază este deci caracterizată printr-o abatere de la condiția de echilibru static a cadrului dat, înțeleasă în sensul că se introduc în calcul și forțe fictive, alături de cele reale.

Abaterea de la condiția de echilibru static indică criteriul de scriere a ecuațiilor suplimentare (de condiție) specifice metodei deplasărilor. Considerînd sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcinile date și cu toate necunoscutele-deplasări, avînd mărimile lor reale, se regăsește cadrul în poziția sa deformată; aceasta este caracterizată prin situația de echilibru static dintre sarcini și eforturi, unde nu intervine nici un element convențional. Înseamnă că, sub acțiunea concomitentă a sarcinilor și a necunoscutelor, *reacțiunile totale din blocările de noduri și de grade de libertate trebuie să fie nule*. Se obține astfel un număr de ecuații de condiție, egal cu numărul necunoscutelor. De observat că aceste ecuații de condiție sînt *ecuații de echilibru static*, spre deosebire de

metoda eforturilor, unde ecuațiile de condiție exprimă restabilirea compatibilității poziției deformate.

Forma ecuațiilor de condiție rezultă urmărind informativ exemplele din figurile 178, *c-h*, care se referă la un cadru cu două grade de libertate (posibilitățile de translație ale celor două rigle). Sistemul de bază s-a obținut prin blocarea nodurilor *1*, *2*, *3* și prin împiedicarea deplasărilor laterale cu ajutorul reazemelor simple orizontale introduse la nodurile *1* și *3*. Sînt în total cinci necunoscute, dintre care trei rotiri de noduri Z_1, Z_2, Z_3, precum și parametrii Z_4 și Z_5 ai celor două grade de libertate (în acest caz s-au ales rotirile porțiunii superioare și, respectiv, ale porțiunii inferioare a stîlpului central). În figura 178, *c*, sistemul de bază este încărcat cu sarcinile date, care produc eforturi în barele încărcate și reacțiuni în blocări; astfel, în legătura convențională *j* se produce reacțiunea R_{js}. În figurile 178, *d-h*, sistemul de bază apare încărcat succesiv cu necunoscutele $Z_1,\ldots,Z_5$, indicîndu-se deformatele respective — care sînt componente ale deformatei totale — precum și diagramele de momente încovoietoare corespunzătoare.

În blocări se dezvoltă reacțiuni, care sînt proporționale cu mărimile necunoscutelor; astfel, aplicarea necunoscutei-deplasare Z_i dezvoltă în legătura convențională *j* reacțiunea $r_{ji}Z_i$. Considerînd sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini și cu necunoscute, reacțiunile totale din legăturile introduse trebuie să fie nule. Pentru legătura *j* se va scrie

$$r_{j1}Z_1 + \ldots + r_{ji}Z_i + \ldots + r_{jj}Z_j + \ldots + r_{jn}Z_n + \ldots + R_{js} = 0$$

care reprezintă forma generală a ecuației de condiție în metoda deplasărilor.

Se obține astfel un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute (unde n este gradul de nedeterminare geometrică a cadrului dat), de forma

$$\mathbf{r}\,\mathbf{Z} + \mathbf{R}_s = 0, \tag{12.1}$$

unde

$$\mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & & & \\ r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & & & & \\ r_{n1} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R}_s = \begin{vmatrix} R_{1s} \\ \vdots \\ R_{js} \\ \vdots \\ R_{ns} \end{vmatrix},$$

în care necunoscutele sînt deplasări, termenii liberi sînt reacțiuni, iar coeficienții necunoscutelor sînt *reacțiuni-unitare;* aceștia din urmă au caracter de coeficienți de influență, așa cum s-a arătat anterior în legătură cu relațiile (8.11), și satisfac relația de reciprocitate $r_{ji} = r_{ij}$.

În metoda deplasărilor se poate obține o sistematizare mai avansată decît în metoda eforturilor, în ceea ce privește evaluarea coeficienților și a termenilor liberi din ecuațiile de condiție, datorită specificului sistemului de bază folosit. Prin introducerea blocării nodurilor și a gradelor de libertate, sistemul de bază al unui cadru dat este *unic* și fiecare dintre bare se găsește în situații simple de legături la extremități. Cînd sistemul de bază se încarcă cu sarcini sau cu necunoscute, apar pentru bare cazuri tip de solicitare, care pot fi rezolvate sub formă generală. În consecință, este indicat să se înceapă cu examinarea acestor cazuri tip, stabilind expresiile ce vor fi folosite apoi la sistematizarea metodei.

4. Comparație între metoda eforturilor și metoda deplasărilor

Cele două metode generale de rezolvare a structurilor static nedeterminate au specific diferit în aplicarea concretă; de asemenea, și domeniile lor de aplicare avantajoasă sînt diferite. Este util să ne dăm seama de la început despre aceasta, căutînd care sînt aceste domenii. O primă delimitare rezultă din faptul că metoda eforturilor este adecvată rezolvării oricărei categorii de structuri static nedeterminate, în timp ce metoda deplasărilor este special concepută pentru structuri cu noduri rigide. Dar și în cazul cadrelor, diferitele tipuri de alcătuire fac să fie mai favorabilă pentru rezolvare una sau alta dintre metode.

Un criteriu de apreciere în acest sens poate rezulta din compararea numărului de necunoscute, care determină numărul ecuațiilor de condiție necesare. Pentru cadrul din figura 179, *a* este evident mai avantajoasă metoda eforturilor, care necesită o singură necunoscută, față de șapte necunoscute în metoda deplasărilor (patru rotiri de nod și trei grade de libertate). La cadrul din figura 179, *b*, metoda eforturilor conduce la 6.3—2—1=15 ecuații, astfel că trebuie preferată metoda deplasărilor care necesită numai șapte ecuații (cadrul are șase noduri și un singur grad de libertate). Cadrul din figura 179, *c* conduce la cîte patru necunoscute, atît în metoda eforturilor cît și în metoda deplasărilor, astfel că din acest punct de vedere nu apare o indicație de prefe-

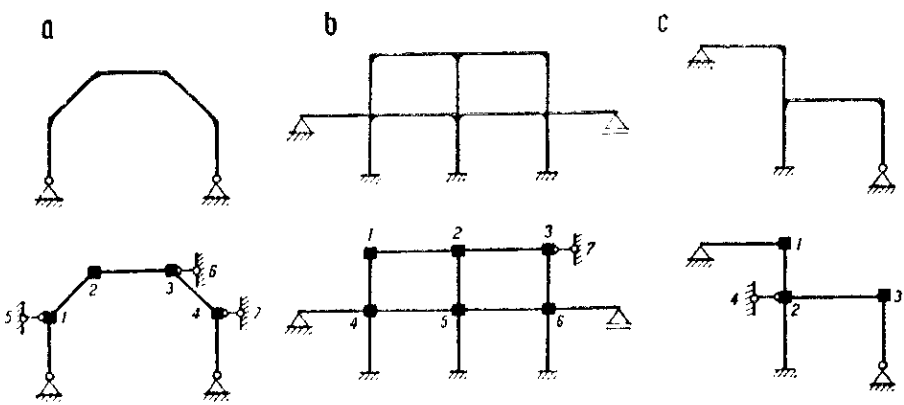


Fig. 179

rință în favoarea uneia dintre metode. Desigur că există și alte criterii de comparație, care vor rezulta după cunoașterea mai completă a specificului de aplicare a metodei deplasărilor.

În general, la cadre cu multe legături suplimentare, gradul de nedeterminare statică este ridicat și gradul de nedeterminare geometrică este redus, astfel că apare preferabilă metoda deplasărilor; la cadre cu puține legături suplimentare, situația este inversă și deci metoda eforturilor este mai avantajoasă.

B. CAZURI TIP DE SOLICITARE LA BARE DREPTE

1. Relații între eforturi și deplasări

Încărcînd succesiv sistemul de bază cu sarcinile date și cu fiecare dintre necunoscutele-deplasări, se ajunge la un număr limitat de situații în care se poate găsi o bară, ca mod de încărcare și condiții de rezemare. Astfel, în figura 180 (stînga) s-au reprezentat trei situații diferite de încărcare a unui sistem de bază: cazul *a* se referă la încărcare cu sarcini, în cazul *b* este impusă rotirea unui nod, iar în cazul *c* este impusă o deplasare pe direcția gradului de libertate. Prezența blocărilor face ca fiecare bară a sistemului să se găsească în situații simple.

Trebuie considerate două categorii de bare: *(a)* bare cuprinse între două noduri, care prin blocarea nodurilor devin încastrate perfect la capete; *(b)* bare cuprinse între un nod și o rezemare, care prin blocarea nodurilor devin perfect încastrate la extremitatea de la nod, dar își păstrează modul de rezemare de la extremitatea opusă. Aceste situații diferite pot fi totuși cuprinse într-un singur caz general, considerînd cazul barei perfect încastrate la un capăt (nod) și cu *încastrare elastică* ($\eta < 1$) la celălalt, urmînd să se facă apoi particularizările necesare. Aceasta va fi calea urmată în continuare pentru stabilirea expresiilor generale.

Privitor la diferitele tipuri de încărcare ale barei, acestea sînt indicate în figura 180 (dreapta): în cazul *d*, pe bară sînt aplicate sarcini, în cazul *e* s-a impus nodului j o rotire θ_j, iar în cazul *f* s-a impus axei barei o rotire $\psi_{jk} = -\Delta/l$. Pentru fiecare caz s-au reprezentat momentele de capăt (pe bară), cu sensurile care rezultă din modul de deformare. Aceste momente de capăt se pot exprima în funcție de cauza care acționează asupra barei, sub formă generală, folosind elementele specifice definite în cele ce urmează.

(1) *Încărcare cu sarcini* (fig. 180, *d*). Aplicînd sarcinile date pe o bară j-k a sistemului de bază, la care gradele de încastrare sînt $\eta_j = 1$ și $\eta_k \leqslant 1$, în extremități se dezvoltă momente de capăt $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$; conform convenției de semne din metoda deplasărilor, $\mathfrak{M}_{jk}$ rezultă negativ și $\mathfrak{M}_{kj}$ pozitiv. Aceste momente de capăt poartă numele de *momente de încastrare perfectă*. De reținut că denumirea trebuie înțeleasă într-o accepție mai generală, în sensul că se referă la situația barelor în sistemul de bază, care sînt perfect încastrate *în noduri*. La barele care leagă un nod de o rezemare, valorile $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$ corespund situației reale din acea rezemare și se vor calcula ca atare.

(2) *Încărcare cu rotire de nod* (fig. 180, *e*). Impunînd nodului j o rotire *pozitivă* θ_j, bara se deformează ca în figură și în extremități apar momentele de capăt M_{jk} și M_{kj}; ambele au sens orar, deci sînt pozitive. Pe baza legii pro-

porționalității, momentele de capăt sînt proporționale cu mărimea rotirii 0_j. În consecință, se poate scrie

$$M_{jk}=K_{jk}0_j \text{ și } M_{kj}=M_{jk}\mu_{jk}=K_{jk}\mu_{jk}0_j, \tag{12.2}$$

unde s-au introdus următoarele elemente caracteristice ale barei:

— factorul de proporționalitate K_{jk} poartă numele de *rigiditate a barei la rotire de nod în capătul j* și semnificația acestuia apare făcînd $0_j=1$ în prima relație. Rezultă $M_{jk}=K_{jk}$, și deci rigiditatea la rotire de nod în capătul j se măsoară prin *momentul care se naște în această extremitate cînd se produce acolo o rotire egală cu unitatea;*

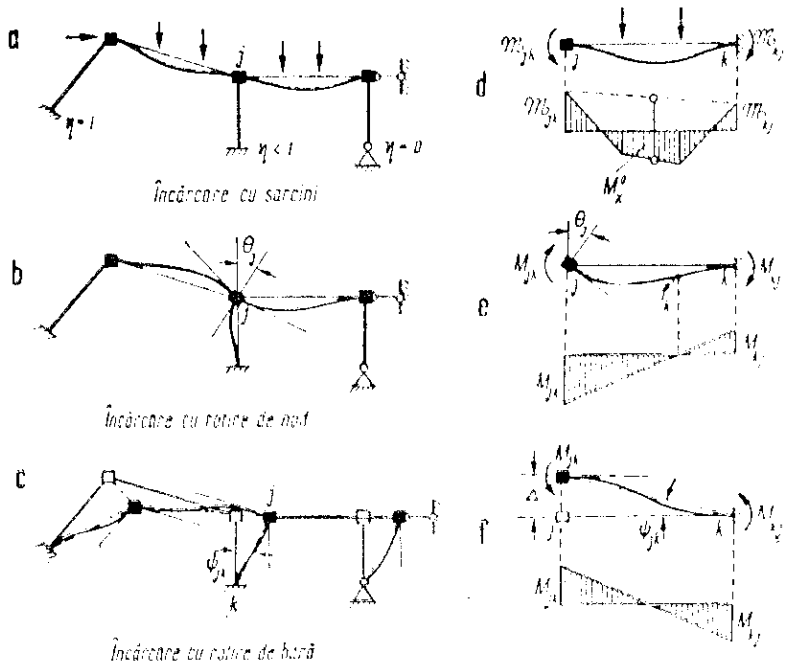


Fig. 180

— factorul μ_{jk} poartă numele de *factor de transmitere al momentului de capăt:* momentul M_{jk} ce se dezvoltă în extremitatea j „transmite" în extremitatea k un moment $M_{kj}=\mu_{jk}M_{jk}$, deci $\mu_{jk}=M_{kj}/M_{jk}$.

În vederea unor simplificări ulterioare se introduce notația

$$K_{jk}=4E\rho_{jk} \text{ sau } \rho_{jk}=K_{jk}/4E, \tag{12.3}$$

unde ρ_{jk} va fi numit *coeficient de rigiditate la rotire de nod în capătul j.* Cu această notație, relațiile (12.2) iau forma următoare, care va fi utilizată în cele ce urmează

$$M_{jk}=4E\rho_{jk}0_j \text{ și } M_{kj}=4E\rho_{jk}\mu_{jk}0_j. \tag{12.4}$$

Dacă nodul care se rotește ar fi la capătul k și încastrarea parțială la capătul j

$$M_{jk}=4E\rho_{kj}\mu_{kj}\theta_k \text{ și } M_{kj}=4E\rho_{kj}\theta_k,$$

unde ρ_{kj} și μ_{kj} au semnificații similare, corespunzînd capătului k al barei.

(3) *Încărcare cu rotire de bară* (fig. 180, *f*). Impunînd nodului j deplasarea Δ normală pe axa barei, linia care unește extremitățile capătă o rotire $\psi_{jk}=-\Delta/l$ și bara se deformează ca în figură. Se spune în acest caz că s-a dat barei o rotire ψ_{jk}. Pentru o rotire ψ_{jk} *pozitivă*, momentele de capăt M_{jk} și M_{kj} au sens antiorar, și deci sînt ambele *negative*. Exprimînd și aici proporționalitatea dintre momentele de capăt și rotirea barei, se scrie (pentru diferențiere se folosesc simboluri barate)

$$M_{jk}=-\bar{K}_{jk}\psi_{jk} \text{ și } M_{kj}=-\bar{K}_{kj}\psi_{jk}, \tag{12.5}$$

unde factorii de proporționalitate $\bar{K}_{jk}$ și $\bar{K}_{kj}$ poartă numele de *rigidități la rotire de bară pentru capătul j, respectiv k*. Admițînd $\psi_{jk}=1$, rezultă $M_{jk}=-\bar{K}_{jk}$ și $M_{kj}=-\bar{K}_{kj}$, deci rigiditatea la rotire de bară într-o extremitate se măsoară prin momentul care se naște în acea extremitate cînd bara capătă o rotire egală cu unitatea.

Introducînd și în acest caz notații similare cu notația (12.3), anume

$$K_{jk}=4E\bar{\rho}_{jk} \text{ și } \bar{K}_{kj}=4E\bar{\rho}_{kj} \text{ sau } \bar{\rho}_{jk}=\bar{K}_{jk}/4E \text{ și } \bar{\rho}_{kj}=\bar{K}_{kj}/4E \tag{12.6}$$

unde $\bar{\rho}_{jk}$ și $\bar{\rho}_{kj}$ sînt *coeficienții de rigiditate* la rotire de bară pentru extremitățile j și k, relațiile (12.5) devin

$$M_{jk}=-4E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk} \text{ și } M_{kj}=-4E\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk}, \tag{12.7}$$

exprimînd momentele de capăt în funcție de rotirea ψ_{jk} a barei.

Pe baza relațiilor stabilite pentru cazurile *1*, *2* și *3*, se pot scrie expresiile generale ale momentelor de capăt la o bară încărcată cu sarcini, cu rotiri de nod și cu rotire de bară:

— cînd bara j-k leagă două noduri j și k

$$\begin{aligned} M_{jk}&=4E(\rho_{jk}\theta_j+\rho_{kj}\mu_{kj}\theta_k-\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk})+\mathfrak{M}_{jk},\\ M_{kj}&=4E(\rho_{jk}\mu_{jk}\theta_j+\rho_{kj}\theta_k-\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk})+\mathfrak{M}_{kj}, \end{aligned} \tag{12.8}$$

— cînd bara j-k leagă un nod j de o rezemare k, unde $r_k\leqslant 1$

$$\begin{aligned} M_{jk}&=4E(\rho_{jk}\theta_j-\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk})+\mathfrak{M}_{jk},\\ M_{kj}&=4E(\rho_{jk}\mu_{jk}\theta_j-\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk})+\mathfrak{M}_{kj}. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Expresiile generale (12.8) și (12.9) sînt aplicabile oricărei bare drepte dintr-o structură cu noduri rigide. Caracteristicile barei intervin în mărimile coeficienților de rigiditate și ale factorilor de transmitere, care diferă de la un caz la altul în funcție de lungimea și secțiunea barei (constantă sau variabilă), cît și de natura rezemării de la extremitate. Se realizează astfel o exprimare concentrată și generală, în care apar cu claritate și în termeni diferiți efectele încărcării barei cu deplasări și cu sarcini, ceea ce va ușura sistematizările ulterioare.

2. Coeficienți de rigiditate, factori de transmitere, momente de încastrare perfectă

Aplicarea practică a relațiilor (12.8) și (12.9) necesită stabilirea expresiilor elementelor care intervin. Pentru aceasta, trebuie rezolvate prin *metoda eforturilor* cele două cazuri de bare static nedeterminate considerate, tratînd separat încărcarea cu deplasări și încărcarea dată de sarcini. Pe această cale se vor obține pentru momentele de capăt expresii analoage cu (12.8) și (12.9), dar concretizate de data aceasta prin prezența datelor caracteristice ale barei. Din confruntarea termen cu termen vor rezulta toate elementele care interesează.

a. **Încărcare cu deplasări.** Cele două cazuri de bare se văd în figura 181, *a* și *b*. Cazul *a* se referă la o bară cuprinsă între două noduri, cărcia i se impun rotirile de nod θ_j și θ_k, precum și rotirea de axă ψ_{jk}; în cazul *b* se vede o bară cuprinsă între un nod *j* și o rezemare cu încastrare elastică ($\eta_k \leqslant 1$), cărcia i se impune rotirea de nod θ_j și rotirea de bară ψ_{jk}. Ambele cazuri se pot reduce la o grindă dublu încastrată încărcată cu cedări de reazeme. Ca sistem de bază se consideră grinda simplu rezemată, astfel că momentele de capăt M_{jk} și M_{kj} devin necunoscute suplimentare (fig. 181, *c*). Se va ține seama că,

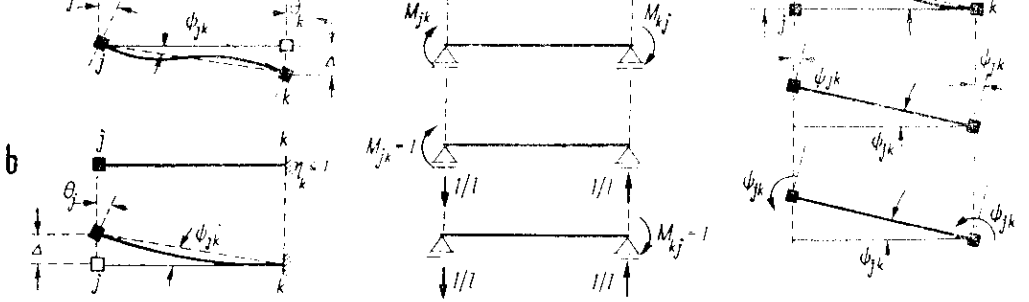


Fig. 181

admițînd pentru momentele de capăt convenția de semne din metoda deplasărilor, diagramele unitare rezultă de semne contrare, și deci coeficienții secundari din ecuațiile de condiție vor fi *negativi*.

Pentru încărcare cu deplasări, termenii liberi au forma cunoscută $-\Sigma \bar{R}_i \Delta_r$. Se va considera cazul general al barei cu secțiune variabilă, particularizînd apoi rezultatele și pentru bară cu secțiune constantă. Totodată, se introduc notațiile simplificate

$$\text{secțiune const.} \quad i = I/l, \quad \text{secțiune variabilă} \quad i_0 = I_0/l, \tag{12.10}$$

folosite curent în metoda deplasărilor.

(1) *Bară cuprinsă între două noduri.* Considerînd cedările de rezemări din figura 181, *a*, se obțin următoarele ecuații de condiție

$$2c'M_{jk}+cM_{kj}-6Ei_0(\theta_j-\psi_{jk})=0 \text{ și } -cM_{jk}+2c''M_{kj}-6Ei_0(\theta_k-\psi_{jk})=0,$$

din rezolvarea cărora rezultă

$$M_{jk}=\frac{6Ei_0}{z}[2c''\theta_j+c\theta_k-(2c''+c)\psi_{jk}],$$
$$M_{kj}=\frac{6Ei_0}{z}[c\theta_j+2c'\theta_k-(2c'+c)\psi_{jk}], \tag{12.11}$$

unde s-a notat $z=4c'c''-c^2$. Pentru bare cu secțiune constantă, relațiile devin

$$M_{jk}=2Ei(2\theta_j+\theta_k-3\psi_{jk}) \text{ și } M_{kj}=2Ei(\theta_j+2\theta_k-3\psi_{jk}). \tag{12.12}$$

(2) *Bară cuprinsă între un nod j și o încastrare elastică* ($\eta_k\leqslant 1$). Pentru cedările de rezemări din figura 181, *b* se ajunge la ecuațiile de condiție

$$2c'M_{jk}-cM_{kj}-6Ei_0(\theta_j-\psi_{jk})=0 \text{ și } -cM_{jk}+2c''M_{kj}\eta_k+6Ei_0\psi_{jk}=0,$$

din care rezultă momentele de capăt

$$M_{jk}=\frac{6Ei_0}{z''}[2c''\theta_j-(2c''+c\eta_k)\psi_{jk}],$$
$$M_{kj}=\frac{6Ei_0}{z''}\eta_k[c\theta_j-(2c'+c)\psi_{jk}], \tag{12.13}$$

unde s-a notat $z''=4c'c''-c^2\eta_k$. Pentru bare cu secțiune constantă, relațiile devin

$$M_{jk}=\frac{6Ei}{4-\eta_k}[2\theta_j-(2+\eta_k)\psi_{jk}] \quad \text{și} \quad M_{kj}=\frac{6Ei}{4-\eta_k}\eta_k(\theta_j-3\psi_{jk}). \tag{12.13'}$$

Confruntînd termen cu termen expresiile stabilite pentru momentele de capăt, cu expresiile generale (12.8) și (12.9), se obțin mărimile coeficienților de rigiditate și ale factorilor de transmitere pentru diferite cazuri. Expresiile coeficienților de rigiditate pot fi puse sub forma generală

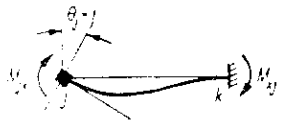
$$\rho=\alpha I/l=\alpha i, \quad \text{respectiv} \quad \rho=\alpha I_0/l=\alpha i_0, \tag{12.14}$$

unde coeficientul α cuprinde atît efectul modului de alcătuire al barei (secțiune constantă sau variabilă), cît și efectul naturii rezemării de la extremitatea opusă nodului considerat. În tabela 8 sînt indicate expresiile coeficienților de rigiditate și ale factorilor de transmitere în diverse situații; pentru ușurință de aplicare, s-au dat în paralel cazurile cînd nodul se află la unul sau altul dintre capetele barei. Coloanele corespunzătoare gradului de încastrare $\eta_k=1$ se referă atît la cazul barei cuprinse între două noduri, cît și la acel al barei care leagă un nod de o rezemare perfect încastrată.

În legătură cu expresiile stabilite, sînt de făcut unele observații:

(*a*) Este util să se rețină expresiile momentelor de capăt pentru cazurile

Coeficienți de rigiditate și factori de transmitere la bare drepte

Caz	Tipul de solicitare		Bare cu secțiune constantă			Bare cu secțiune variabilă		
			Gradul de încastrare la capătul opus nodului					
			$\eta_i=1$	$\eta_i<1$	$\eta_i=0$	$\eta_i=1$	$\eta_i<1$	$\eta_i=0$
1		ρ_{jk}	i	$\frac{3}{4-\eta_{jk}}\,i$	$\frac{3}{4}\,i$	$\frac{3\,c''}{z}\,i_0$	$\frac{3\,c''}{z''}\,i_0$	$\frac{3}{4\,c'}\,i_0$
		μ_{jk}	$\frac{1}{2}$	$\frac{\eta_{jk}}{2}$	0	$\frac{c}{2\,c''}$	$\eta_{jk}\cdot\frac{c}{2\,c''}$	0
2		ρ_{kj}	i	$\frac{3}{4-\eta_j}\,i$	$\frac{3}{4}\,i$	$\frac{3\,c'}{z}\,i_0$	$\frac{3\,c'}{z'}\,i_0$	$\frac{3}{4\,c''}\,i_0$
		μ_{kj}	$\frac{1}{2}$	$\frac{\eta_j}{2}$	0	$\frac{c}{2\,c'}$	$\eta_j\cdot\frac{c}{2\,c'}$	0
3		$\bar{\rho}_{jk}$	$\frac{3}{2}\,i$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2+\eta_{jk}}{4-\eta_{jk}}\,i$	$\frac{3}{4}\,i$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\,c''+c}{z}\,i_0$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\,c''+c\,\eta_{jk}}{z''}\,i_0$	$\frac{3}{4\,c'}\,i_0$
		$\bar{\rho}_{kj}$	$\frac{3}{2}\,i$	$\frac{9}{2}\cdot\frac{\eta_{jk}}{4-\eta_{jk}}\,i$	0	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\,c'+c}{z}\,i_0$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta_{jk}(2\,c'+c)}{z''}\,i_0$	0
4		$\bar{\rho}_{jk}$	$\frac{3}{2}\,i$	$\frac{9}{2}\cdot\frac{\eta_j}{4-\eta_j}\,i$	0	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\,c''+c}{z}\,i_0$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta_j(2\,c''+c)}{z'}\,i_0$	0
		$\bar{\rho}_{kj}$	$\frac{3}{2}\,i$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2+\eta_j}{4-\eta_j}\,i$	$\frac{3}{2}\,i$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\,c'+c}{z}\,i_0$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\,c'+c\,\eta_j}{z'}\,i_0$	$\frac{3}{4\,c''}\,i_0$

$i=I/l, \qquad i_0=I_0/l, \qquad z=4\,c'c''-c^2, \quad z'=4\,c'c'-c^2\eta_j, \quad z''=4\,c'c''+c^2\eta_k$

curente, deoarece sînt foarte simple. Astfel, la o bară cu secțiune *constantă* care leagă două noduri, s-au găsit valorile

$$\rho_{jk}=\rho_{kj}=i,\quad \mu_{jk}=\mu_{kj}=1/2,\quad \bar{\rho}_{jk}=\bar{\rho}_{kj}=3\,i/2,$$

deci momentele de capăt care se dezvoltă datorită rotirii unuia din noduri, de exemplu nodul j, au mărimile

$$M_{jk}=4\,E\rho_{jk}\,\theta_j=4\,Ei\,\theta_j \quad \text{și} \quad M_{kj}=4\,E\rho_{jk}\,\mu_{jk}\,\theta_j=2\,Ei\,\theta_j. \tag{12.15}$$

iar momentele de capăt produse de rotirea axei barei sînt

$$M_{jk}=M_{kj}=-4\,E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk}=-4\,E\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk}=-6\,Ei\,\psi_{jk}. \tag{12.16}$$

Pentru o bară cuprinsă între un nod j și o extremitate k simplu rezemată sau articulată, s-au găsit $\rho_{jk}=\bar{\rho}_{jk}=3\,i/4$ și $\mu_{jk}=0$, astfel că momentele de capăt produse de rotirea nodului, respectiv de rotirea barei, sînt

$$M_{jk}=4\,E\rho_{jk}\theta_j=3\,Ei\,\theta_j, \quad M_{jk}=-4\,E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk}=-3\,Ei\,\psi_{jk}. \tag{12.17}$$

(*b*) La bare cu secțiune *variabilă*, care unesc două noduri, coeficienții de rigiditate și factorii de transmitere au *mărimi diferite*, după cum nodul care se rotește este la un capăt sau la celălalt al barei. Pentru o astfel de bară sînt doi coeficienți de rigiditate și doi factori de transmitere, între care există relația

$$\rho_{jk}\,\mu_{jk}=\rho_{kj}\,\mu_{kj}, \tag{12.18}$$

care derivă din reciprocitatea reacțiunilor unitare: momentul ce apare în extremitatea k, cînd capătului j i se impune o rotire-unitate, este egal cu momentul care apare în extremitatea j, cînd capătului k i se impune o rotire-unitate. Numai la bare cu secțiune constantă, sau la bare cu variație de secțiune simetrică ($c'=c''$),

$$\rho_{jk}=\rho_{kj} \quad \text{și} \quad \mu_{jk}=\mu_{kj}.$$

(*c*) Coeficientul de rigiditate $\bar{\rho}_{jk}$ pentru rotire de bară poate fi exprimat în funcție de mărimile ρ_{jk} și μ_{jk} corespunzătoare rotirii de nod. Aceasta, deoarece poziția deformată care rezultă prin rotirea barei poate fi obținută și prin rotiri de nod, cum se arată în figura 181, *d*: se rotește bara împreună cu nodurile (ca un corp rigid) cu unghiul ψ_{jk} (figura din mijloc), apoi se dau nodurilor rotirile antiorare $\theta_j=\theta_k=-\psi_{jk}$ (figura inferioară). În prima etapă nu se dezvoltă eforturi, iar în a doua apar momente de capăt numai datorită rotirii nodurilor; se poate deci scrie pe baza relațiilor (12.4)

$$M_{jk}=4\,E\rho_{jk}\,\theta_j+4\,E\rho_{kj}\,\mu_{kj}\,\theta_k=-4\,E\rho_{jk}(1+\mu_{jk})\psi_{jk},$$

$$M_{kj}=4\,E\rho_{jk}\,\mu_{jk}\,\theta_j+4\,E\rho_{kj}\,\theta_k=-4\,E\rho_{kj}(1+\mu_{kj})\psi_{jk},$$

unde s-a ținut seama de relația (12.18). Deoarece pentru acest caz corespund relațiile (12.7), anume $M_{jk}=-4\,E\bar{\rho}_{jk}\psi_{kj}$ și $M_{kj}=-4\,E\rho_{kj}\psi_{jk}$, rezultă

$$\bar{\rho}_{jk}=\rho_{jk}(1+\mu_{jk}) \quad \text{și} \quad \bar{\rho}_{kj}=\rho_{kj}(1+\mu_{kj}), \tag{12.19}$$

care sînt relațiile de legătură căutate.

Aceeași corelație se poate regăsi și pentru o bară cuprinsă între un nod și o rezemare.

b. **Încărcare cu sarcini.** În acest caz trebuie determinate momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$. Se pot folosi expresiile (10.21) stabilite anterior pentru cazul general, cînd bara ar avea încastrări parțiale la ambele extremități. Particularizăm pentru bara din figura 180, *d*, unde în *j* este un nod blocat și în *k* o încastrare elastică ($\eta_k \leqslant 1$). Se va ține seama de noua convenție de semne pentru momentele de capăt.

La bare cu *secțiune constantă*:

— încastrare perfectă în extremitatea *k*

$$\mathfrak{M}_{jk} = -(2m_j - m_k)/3, \quad \mathfrak{M}_{kj} = +(2m_k - m_j)/3; \tag{12.20}$$

— încastrare elastică în extremitatea *k*

$$\mathfrak{M}_{jk} = -\frac{2m_j - \eta_k m_k}{4 - \eta_k}; \qquad \mathfrak{M}_{kj} = +\eta_k \frac{2m_k - m_j}{4 - \eta_k}; \tag{12.21}$$

— reazem simplu în extremitatea *k*

$$\mathfrak{M}_{jk} = -m_j/2, \quad \mathfrak{M}_{kj} = 0. \tag{12.22}$$

La bare cu *secțiune variabilă*:

— încastrare perfectă în extremitatea *k*, cu notația $z = 4c'c'' - c^2$

$$\mathfrak{M}_{jk} = -(2c''s'm_j - cs''m_k)/z, \qquad \mathfrak{M}_{kj} = +(2c's''m_k - cs'm_j)/z; \tag{12.23}$$

— încastrare parțială în extremitatea *k*, cu notația $z'' = 4c'c'' - c^2\eta_k$

$$\mathfrak{M}_{jk} = -(2c''s'm_j - \eta_k cs''m_k)/z'', \quad \mathfrak{M}_{kj} = +\eta_k(2c's''m_k - cs'm_j)/z''; \tag{12.24}$$

— reazem simplu sau articulație în extremitatea *k*

$$\mathfrak{M}_{jk} = -s'm_j/2c', \qquad \mathfrak{M}_{kj} = 0. \tag{12.25}$$

Cazul încastrării perfecte în extremitatea *k* este cel mai răspîndit, deoarece se aplică atît barelor cuprinse între două noduri blocate ale sistemului de bază, cît și barelor care unesc un nod blocat cu o încastrare perfectă.

C. CADRE CU NODURI FIXE

1. Cadre cu un singur nod

Este cazul cel mai simplu pentru rezolvare prin metoda deplasărilor, deoarece intervine o singură necunoscută (rotirea nodului), și deci o singură ecuație de condiție. Un asemenea cadru este alcătuit dintr-un număr de bare, care pleacă toate din același nod și au la cealaltă extremitate rezemări dispuse astfel încît translația nodului este împiedicată pe orice direcție. Oricare ar fi alcătuirea cadrului, rezolvarea se poate face sub formă generală și conduce la rezultate sistematizate.

Pentru cadrul cu un singur nod din figura 182, *a*, sistemul de bază se obține blocînd nodul *j* contra rotirii. Se încarcă apoi succesiv acest sistem cu sarcinile date, precum și cu necunoscuta $Z_j=0_j$. Pentru fiecare dintre încărcări, în blocare se nasc reacțiuni-moment, anume R_{js} în cazul aplicării sarcinilor și $r_{jj}Z_j$ cînd se impune rotirea Z_j. Admițînd aplicarea concomitentă a ambelor încărcări, se regăsește situația de echilibru a cadrului în poziția deformată, caracterizată prin echilibrul nodului *j liber*. Reacțiunea totală din blocare trebuie deci să fie nulă, așa cum rezultă din ecuația generală (12.1), care devine în acest caz

$$r_{jj}Z_j+R_{js}=0, \text{ deci } Z_j=0_j=-R_{js}/r_{jj}, \tag{12.26}$$

astfel că necunoscuta problemei este determinată. Calculul reacțiunilor R_{js} și r_{jj} se face considerînd separat cele două încărcări.

Cînd sistemul de bază se încarcă cu *sarcini* (fig. 182, *b*), pe capetele de lîngă nod ale barelor se dezvoltă momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ (indicele k referindu-se la oricare dintre extremități); acestea se pot calcula folosind expresiile (12.20)—(12.25), după caz. Trecînd *pe nod* (fig. 182, *d*), semnele momentelor se inversează, iar suma lor este $\bar{M}_j=-\Sigma\mathfrak{M}_{jk}$; această sumă poartă numele de *moment neechilibrat* în nodul *j* și reprezintă efectul rezultant

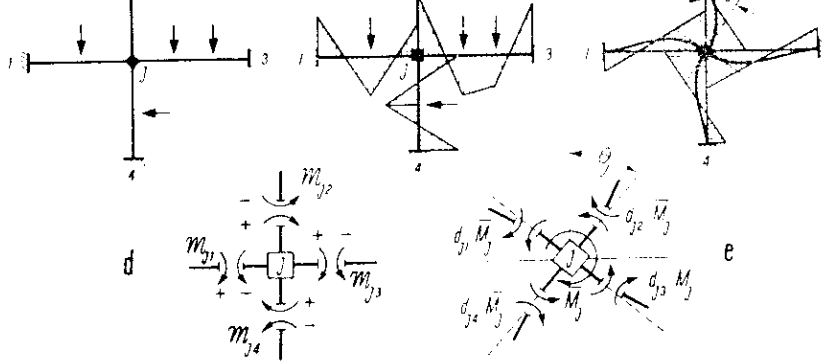


Fig. 182

al acțiunii barelor asupra nodului. Momentul neechilibrat tinde să rotească nodul, dar blocarea se opune acestei rotiri dezvoltînd o reacțiune-moment

$$R_{js}=-\bar{M}_j=\Sigma\,\mathfrak{M}_{jk}, \tag{12.27}$$

care asigură echilibrul. Reacțiunea R_{js} se obține deci făcînd suma momentelor de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$, considerate pe *capetele barelor*. La extremitățile opuse (în rezemări) se dezvoltă momentele $\mathfrak{M}_{kj}$.

Cînd sistemul de bază se încarcă cu *necunoscuta-unitate* (fig. 182, *c*), impunînd nodului rotirea $0_j=1$, cadrul se deformează și este menținut în această poziție prin blocarea nodului rotit. Momentele care se nasc pe capetele de lîngă nod ale barelor au mărimea $K_{jk}=4E\rho_{jk}$, iar cele din extremitățile opuse au mărimea $4E\rho_{jk}\mu_{jk}$, așa cum rezultă din relațiile (12.4); coeficienții de rigiditate ρ_{jk} și factorii de transmitere μ_{jk} se calculează folosind tabela 8. Reacțiunea unitară care se dezvoltă în blocare este egală cu suma momentelor de pe capetele de lîngă nod ale barelor

$$r_{jj}=\sum_j K_{jk}=4E\sum_j \rho_{jk}=4E\rho_j, \tag{12.28}$$

deci cu suma rigidităților corespunzătoare capetelor din nodul j. S-a notat cu $\rho_j=\sum_j \rho_{jk}$ coeficientul de rigiditate al nodului j.

Introducînd reacțiunile R_{js} și r_{jj} în expresia (12.26), rezultă

$$Z_j=0_j=-\frac{R_{js}}{r_{jj}}=-\frac{\overline{M}_j}{4E\sum_j \rho_{jk}}=-\frac{\overline{M}_j}{4E\rho_j}, \tag{12.29}$$

care dă rotirea efectivă a nodului în poziția deformată a cadrului.

Momentele totale de la extremitățile barelor sînt

$$M_{jk}=4E\rho_{jk}0_j+\mathfrak{M}_{jk} \text{ și } M_{kj}=4E\rho_{jk}\mu_{jk}0_j+\mathfrak{M}_{kj},$$

în care, introducînd expresia rotirii 0_j dată de (12.29), se obține

$$M_{jk}=d_{jk}\bar{M}_j+\mathfrak{M}_{jk} \text{ și } M_{kj}=d_{jk}\mu_{jk}\bar{M}_j+\mathfrak{M}_{kj}, \tag{12.30}$$

unde s-a folosit notația

$$d_{jk}=\rho_{jk}/\sum_j \rho_{jk}=\rho_{jk}/\rho_j. \tag{12.31}$$

Acest raport poartă numele de *factor de distribuție* al momentului necchilibrat pentru capătul j al barei j-k și este proporțional cu coeficientul de rigiditate ρ_{jk}. Cantitățile $d_{jk}\bar{M}_j$ se numesc *momente distribuite* și reprezintă corecțiile de moment datorite rotirii nodului, care se suprapun peste momentele inițiale de încastrare perfectă, așa cum rezultă din prima relație (12.30). Înseamnă că *momentul necchilibrat se distribuie barelor din jurul nodului proporțional cu coeficienții de rigiditate ai acestora.* Suma factorilor de distribuție corespunzători capetelor de bare care vin la nod *este egală cu unitatea.* Momentul distribuit $d_{jk}\bar{M}_j$ se transmite prin intermediul factorului de transmitere μ_{jk} în extremitatea opusă a barei, dînd acolo corecția de moment $d_{jk}\mu_{jk}\bar{M}_j$, care apare în a doua relație (12.30).

Expresiile (12.30) arată că, pentru rezolvarea sistematizată a unui cadru cu un singur nod, se calculează mai întîi coeficienții de rigiditate ρ_{jk} și factori de transmitere μ_{jk} pentru fiecare bară, precum și factorii de distribuție d_{jk}. Se calculează de asemenea momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$, precum și momentul necchilibrat $\bar{M}_j=-\sum\mathfrak{M}_{jk}$. Momentul necchilibrat se distribuie

capetelor de bare din jurul nodului, iar momentele distribuite se transmit la capetele opuse ale barelor. Aceste momente se suprapun peste momentele inițiale de încastrare perfectă, obținînd momentele totale ce servesc la construirea diagramei M.

Semnificația fizică a distribuirii momentului neechilibrat este arătată în figura 182, *e*. Considerînd sistemul de bază încărcat cu sarcini, acțiunea acestora asupra nodului blocat este reprezentată de momentul neechilibrat $\bar{M}_j$. Ridicînd blocarea, nodul se rotește provocînd deformarea barelor, care exercită asupra nodului momente de opunere la rotire, proporționale cu rigiditatea lor. Pe măsură ce rotirea nodului crește, aceste momente cresc proporțional, pînă cînd suma lor ajunge să echilibreze pe $\bar{M}_j$; în această situație, cadrul se găsește în poziția de echilibru. Momentele produse de rotirea nodului sînt momentele distribuite; aplicate pe nod, ele sînt de semn contrar cu momentul neechilibrat, dar trecute pe capetele barelor devin *de același* semn, așa cum rezultă și din relația (12.31), care arată că *factorii de distribuție sînt pozitivi*.

La calculul factorilor de distribuție se pot obține simplificări folosind cantități proporționale pentru coeficienții de rigiditate. Aceștia au forma $\rho = \alpha I/l = \alpha i$, în care intervin momentele de inerție ale barelor, ce nu sînt inițial cunoscute. O apreciere corectă a momentelor de inerție este dificilă; mult mai ușor se pot aprecia *rapoarte* de momente de inerție. În consecință, se multiplică coeficienții de rigiditate cu o cantitate arbitrară I_c/I_c, rezultînd valorile adimensionale

$$\rho'_{jk} = \rho_{jk} \frac{I_c}{I_c} = \alpha \frac{I}{I_c} \frac{I_c}{l}, \quad \text{și deci } d_{jk} = \frac{\rho_{jk}}{\sum \rho_{jk}} = \frac{\rho'_{jk}}{\sum \rho'_{jk}} = \frac{\rho'_{jk}}{\rho'_j}. \qquad (12.32)$$

Alegînd convenabil raportul I_c/I_c, se pot obține coeficienții de rigiditate corectați sub formă de numere simple.

Rămîn de făcut unele observații:

— Cînd cadrul ar avea în nod și o *consolă*, aceasta se consideră îndepărtată și înlocuită cu efectul său asupra nodului. Deoarece momentul dat de consolă este aplicat *pe nod*, el intră cu *semnul său* la calculul momentului neechilibrat.

— În sistematizarea dată s-a admis că se lucrează cu momentele de pe capetele barelor. Se poate conduce calculul și considerînd momentele de pe nod. Dacă se calculează în acest mod momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$, atunci momentul neechilibrat se obține sub forma $\bar{M}_j = \Sigma \mathfrak{M}_{jk}$, în schimb factorii de distribuție d_{jk} din relațiile (12.30) rezultă *negativi*, cum se vede direct din figura 182, *e*.

2. Cadre cu mai multe noduri

a. **Cadre de formă oarecare.** La un cadru cu noduri fixe (fig. 183, a), în metoda deplasărilor necunoscute sînt rotirile de nod, și deci numărul necunoscutelor este egal cu numărul nodurilor.

Sistemul de bază se obține admițînd blocate toate nodurile contra rotirii (necunoscute egale cu zero). Se încarcă apoi succesiv acest sistem cu sarcinile

date și cu necunoscutele $Z_j=0_j$. Pentru fiecare dintre aceste încărcări, în blocarea dintr-un nod oarecare j se nasc reacțiuni-moment; R_{js} în cazul aplicării sarcinilor, $r_{jj}0_j$ cînd se impune chiar nodului j rotirea θ_j, $r_{jk}\theta_k$ cînd se impune rotirea 0_k unui alt nod k. Considerînd sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini și necunoscute, se regăsește situația de echilibru a cadrului în poziția deformată, în care echilibrul nodurilor este asigurat fără intervenția unor forțe fictive. Reacțiunile totale din blocări trebuie deci să fie nule, astfel că pentru fiecare nod se scrie o ecuație de condiție de forma (12.1)

$$r_{j1}Z_1+r_{j2}Z_2+\ldots+r_{jj}Z_j+\ldots+r_{jn}Z_n+R_{js}=0.$$

Calculul coeficienților și al termenilor liberi se face încărcînd separat sistemul de bază cu sarcinile date și cu fiecare dintre necunoscutele-unitate $Z_j=0_j=1$. Datorită dublei schimbări de semn, reacțiunile din blocări sînt date de sumele momentelor de pe capetele barelor din jurul nodurilor, pentru cazul de încărcare considerat. Cînd sistemul de bază se încarcă cu sarcini (fig. 183, *b*), sau cu rotirea de nod $0_j=1$ (fig. 183, *c*), situația este aceeași ca în cazul cadrelor cu un singur nod j, astfel că mărimile reacțiunilor R_{js} și r_{jj} sînt cele date de relațiile (12.27) și (12.28). Pentru încărcarea cu rotirea $0_k=1$ a unui nod vecin k (fig. 183, *d*), reacțiunea din blocarea j este egală cu momentul transmis $4E\rho_{kj}\mu_{kj}$ în extremitatea j a barei j-k.

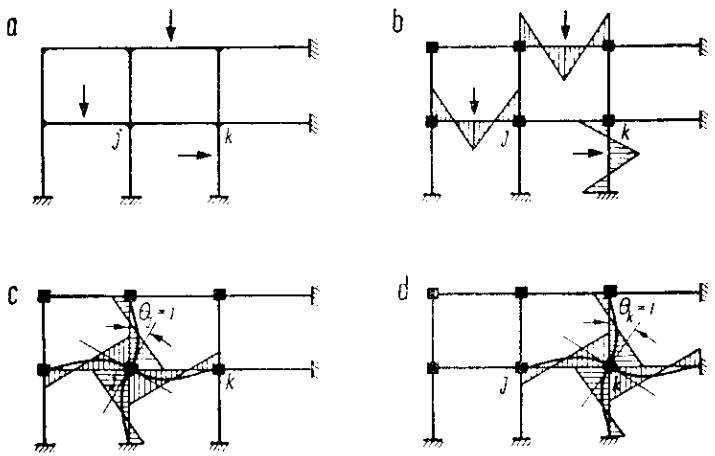


Fig. 183

Rezultă deci că, oricare ar fi forma cadrului, se pot scrie direct următoarele expresii

$$r_{jj}=4E\sum_j\rho_{jk}=4E\rho_j,\quad r_{jk}=4E\rho_{kj}\mu_{kj},\quad R_{js}=-\bar{M}_j=\sum_j\mathfrak{M}_{jk},\quad (12.33)$$

care sînt expresiile generale ale coeficienților și termenilor liberi din ecuațiile de condiție. Privitor la coeficienții secundari, trebuie reținut că aceștia sînt diferiți de zero numai cînd cei doi indici se referă la două noduri vecine (legate

printr-o bară). Matricea coeficienților cuprinde astfel numeroși coeficienți secundari nuli, ceea ce ușurează rezolvarea.

Rezolvînd sistemul ecuațiilor de condiție, se obțin mărimile rotirilor de noduri. Se pot acum calcula momentele din extremitățile tuturor barelor folosind relațiile (12.8) și (12.9):

- bară cuprinsă între două noduri j și k

$$M_{jk}=4E(\rho_{jk}\theta_j+\rho_{kj}\mu_{kj}\theta_k)+\mathfrak{M}_{jk} \quad \text{și} \quad M_{kj}=4E(\rho_{kj}\theta_k+\rho_{jk}\mu_{jk}\theta_j)+\mathfrak{M}_{kj};$$

- bară cuprinsă între un nod j și o rezemare k ($r_{jk}\leqslant 1$)

$$M_{jk}=4E\rho_{jk}\theta_j+\mathfrak{M}_{jk} \quad \text{și} \quad M_{kj}=4E\rho_{jk}\mu_{jk}\theta_j+\mathfrak{M}_{kj}.$$

Utilizarea practică a ecuațiilor de condiție sub forma (12.33) nu este recomandabilă, deoarece s-ar lucra cu coeficienți foarte mari (datorită lui E), în timp ce mărimile necunoscutelor — rotiri de nod — sînt foarte mici. O simplificare substanțială rezultă folosind mărimi corectate atît pentru necunoscutele θ, cît și pentru coeficienții de rigiditate ρ, definite prin relațiile

$$\theta'=4E\frac{I_c}{I_c}\theta \qquad \text{și} \qquad \rho'=\frac{I_c}{I_c}\rho, \tag{12.34}$$

unde raportul I_c/I_c se alege în mod convenabil, astfel ca pentru valorile ρ' să rezulte *numere* simple. Se poate scrie $M=4E\rho\theta=\rho'\theta'$, de unde se vede că rotirile corectate θ' au *dimensiune de moment*. Coeficienții de rigiditate au forma $\rho=\alpha I/l=\alpha i$, unde α depinde de natura rezemării de la capătul opus al barei și de faptul dacă aceasta are secțiune constantă sau variabilă (v. tabela 8). Coeficienții de rigiditate corectați sînt deci

$$\rho'=\alpha i', \quad \text{unde} \quad i'=i\frac{I_c}{I_c}=\frac{I}{l}\frac{l_c}{I_c},$$

astfel că valorile i' nu au dimensiune.

Cu aceste notații, coeficienții și termenii liberi dați de relațiile (12.33) sînt

$$r_{jj}=\sum_j \rho'_{jk}=\rho'_j, \quad r_{jk}=\rho'_{kj}\mu_{kj}, \quad R_{js}=-\overline{M}_j=\sum_j \mathfrak{M}_{jk}. \tag{12.35}$$

Totodată se simplifică și expresiile momentelor totale, care se calculează sub forma:

- bară cuprinsă între două noduri j și k

$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j+\rho'_{kj}\mu_{kj}\theta'_k+\mathfrak{M}_{jk} \quad \text{și} \quad M_{kj}=\rho'_{kj}\theta'_k+\rho'_{jk}\mu_{jk}\theta'_j+\mathfrak{M}_{kj}; \tag{12.36}$$

- bară cuprinsă între un nod j și o rezemare k ($r_{jk}\leqslant 1$)

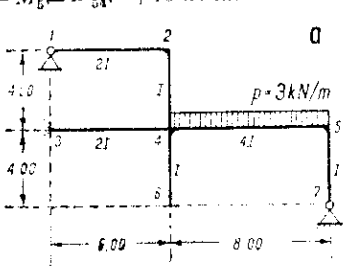
$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j+\mathfrak{M}_{jk} \text{ și } M_{kj}=\rho'_{jk}\mu_{jk}\theta'_j+\mathfrak{M}_{kj}.$$

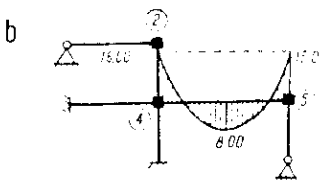
Dacă la sfîrșitul calculului este necesar să se cunoască și mărimile efective ale rotirilor de noduri, acestea se pot obține din valorile calculate θ' cu ajutorul primei relații (12.34).

După aflarea momentelor totale din extremitățile barelor este necesar să se facă o verificare a rezultatelor, controlînd echilibrul nodurilor în poziția

deformată: suma momentelor obținute pentru barele din jurul fiecărui nod trebuie să fie egală cu zero.

Pentru exemplificare, fie cadrul din figura 184, *a*, având bare de secțiune constantă. Coeficienții de rigiditate ai barelor sînt calculați în figura 184, *c*, pe baza datelor din tabela 8. Factorii de transmitere pe barele *2-4* și *4-5* sînt egali cu 0,5. Sistemul de bază se vede în figura 184, *b*, unde s-a trasat și diagrama de momente încovoietoare dată de sarcini: momente de încastrare perfectă apar numai pe bara *4-5* și au mărimea $\mathfrak{M}_{45} = -\mathfrak{M}_{54} = -3 \cdot 8^2/12 = -16$ kNm. Înseamnă că termenii liberi din ecuațiile de condiție sînt $-\bar{M}_4 = \mathfrak{M}_{45} = -16$ kNm și $-\bar{M}_5 = \mathfrak{M}_{54} = +16$ kNm.





c

Bara	1-2	2-4	3-4	4-5	4-6	5-7
i	$I/3$	$I/4$	$I/3$	$I/2$	$I/4$	$I/4$
ρ	$I/4$	$I/4$	$I/3$	$I/2$	$I/4$	$3I/16$
ρ'	3	3	4	6	3	2.25

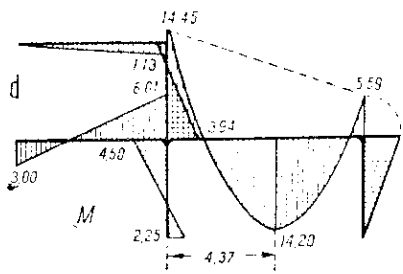


Fig. 184

Coeficienții necunoscutelor se obțin folosind expresiile (12.35), anume

$$r_{22} = \sum_{2} \rho'_{2k} = 6, \quad r_{44} = \sum_{4} \rho'_{4k} = 16, \quad r_{55} = \sum_{5} \rho'_{5k} = 8{,}25,$$

$$r_{24} = r_{42} = \rho'_{24}\mu_{24} = 1{,}5, \qquad r_{45} = r_{54} = \rho'_{45}\mu_{45} = 3,$$

și deci sistemul ecuațiilor de condiție este

$$\begin{aligned} \text{nod } 2 \qquad & 6\,\theta'_2 + 1.5\,\theta'_4 = 0, \\ \text{nod } 4 \qquad & 1.5\,\theta'_2 + 16\,\theta'_4 + 3\,\theta'_5 - 16 = 0, \\ \text{nod } 5 \qquad & 3\,\theta'_4 + 8{,}25\,\theta'_5 + 16 = 0, \end{aligned}$$

care dă soluțiile $\theta'_2 = -0{,}375$, $\theta'_4 = +1{,}501$ și $\theta'_5 = -2{,}485$.

Momentele totale din extremitățile barelor rezultă din expresiile (12.35):

$$\begin{aligned} M_{24} &= 3(-0{,}375) + 3 \cdot 1{,}501 \cdot 0{,}5 = +1.125, \\ M_{42} &= 3 \cdot 1{,}501 + 3(-0{,}375) \cdot 0{,}5 = +3{,}94, \\ M_{45} &= -16 + 6 \cdot 1{,}501 + 6(-2{,}485) \cdot 0{,}5 = -14{,}45, \\ M_{54} &= +16 + 6 \cdot 1{,}501 \cdot 0{,}5 + 6(-2{,}485) = +5{,}59, \\ M_{43} &= 1 \cdot 1{,}501 = +6{,}01, \qquad M_{46} = 1 \cdot 1{,}501 \cdot 0{,}5 = +3{,}00, \\ M_{40} &= 3 \cdot 1{,}501 = +4{,}50, \qquad M_{64} = 3 \cdot 1{,}501 \cdot 0{,}5 = +2{,}25, \\ M_{21} &= 3(-0{,}375) = -1{,}125, \qquad M_{57} = 2{,}25(-2{,}485) = -5{,}59, \end{aligned}$$

cu ajutorul cărora s-a trasat diagrama de momente încovoietoare din figura 184, *d*. Comparînd cu diagrama din figura 184, *b*, se poate aprecia efectul rotirii nodurilor cadrului.

b. **Simplificări la structuri simetrice.** În acest caz trebuie ținut seamă că perechile de bare dispuse simetric, în raport cu axa de simetrie a cadrului, au aceiași coeficienți de rigiditate și factori de transmitere. Sistemul de bază, obținut prin blocarea nodurilor, rezultă simetric; simplificări în sistemul ecuațiilor de condiție se pot obține numai dacă și încărcarea dată de necunoscute are caracter simetric sau antisimetric.

Rotirea unui nod de pe axa de simetrie conduce la o deformată antisimetrică. În ceea ce privește perechile de noduri dispuse simetric, în general rotirile lor sînt inegale ca mărime. Se pot însă face totdeauna grupări de necunoscute, în sensul că în locul rotirilor θ_j și θ_k cu poziție simetrică, să se utilizeze rotirile-perechi $Z'=(\theta_j+\theta_k)/2$ și $Z''=(\theta_j-\theta_k)/2$, unde Z' este reprezentată de perechea simetrică θ'_j și $\theta'_k=-\theta'_j$, iar Z'' — de perechea antisimetrică θ''_j și $\theta''_k=\theta''_j$. Înseamnă că, oricare ar fi cadrul simetric cu noduri fixe, se poate lucra numai cu necunoscute simetrice și antisimetrice.

Prin aceasta se ajunge implicit la separarea în două a sistemului ecuațiilor de condiție: un grup de ecuații care conține numai necunoscutele simetrice și un alt grup care conține numai necunoscutele antisimetrice. Separarea în două a sistemului ecuațiilor de condiție se poate justifica în mod cu totul similar ca la metoda eforturilor, așa cum s-a arătat în legătură cu relațiile (9.52)—(9.53).

Sarcinile se pot de asemenea descompune într-o componentă simetrică și o componentă antisimetrică. Componentei simetrice a încărcării îi corespunde o deformată simetrică și deci numai necunoscutele simetrice sînt diferite de zero, în timp ce pentru componenta antisimetrică rezultă o deformată antisimetrică caracterizată de necunoscute antisimetrice. Rezolvarea pentru sarcinile date se poate deci împărți în două rezolvări distincte și anume: o rezolvare pentru componenta simertică a încărcării folosind grupul de ecuații cu necunoscute simetrice, și o rezolvare pentru componenta antisimetrică a încărcării cu ajutorul grupului de ecuații conținînd necunoscutele antisimetrice. Se creează astfel posibilitatea de a conduce calculul pe o jumătate de structură, utilizînd și aici *procedeul semistructurilor*.

Din acest punct de vedere, pot fi considerate două categorii de cadre, după cum axa de simetrie trece printr-un stîlp central, sau prin mijlocul unei deschideri centrale. Se regăsesc situațiile discutate în legătură cu figura 147, urmînd să se stabilească elementele specifice metodei deplasărilor.

(1) *Cadre cu stîlp central*. Asemenea cadre au un număr par de deschideri și conțin atît noduri pe axa de simetrie, cît și perechi de noduri dispuse simetric în rest.

Pentru *încărcări simetrice*, poziția deformată și diagrama M sînt simetrice (fig. 185, *a* și *b*). Datorită simetriei, nodurile de pe axa de simetrie nu se pot roti și stîlpul central nu se încovoaie. Cadrul se comportă ca și cum cele două jumătăți ar fi perfect încastrate în nodurile de pe axa de simetrie. În consecință, se poate considera semistructura din figura 185, *c*, rezolvînd-o pentru sarcinile care-i revin; pe a doua jumătate de structură diagrama M va fi simetrică.

Pentru *încărcare antisimetrică*, poziția deformată și diagrama M rezultă antisimetrice (fig. 185, *e* și *f*). Aici nodurile de pe axa de simetrie se rotesc și stîlpul central se deformează, deci trebuie să apară și în semistructură. Privind comparativ pentru o încărcare antisimetrică cele două semistructuri (fig. 185, *d*), față de cazul structurii întregi (fig. 185, *f*) și ținînd seama că în ansamblu diagrama M trebuie să fie aceeași, rezultă că pe stîlpul central diagrama din cazul structurii date trebuie să se împartă în două diagrame egale

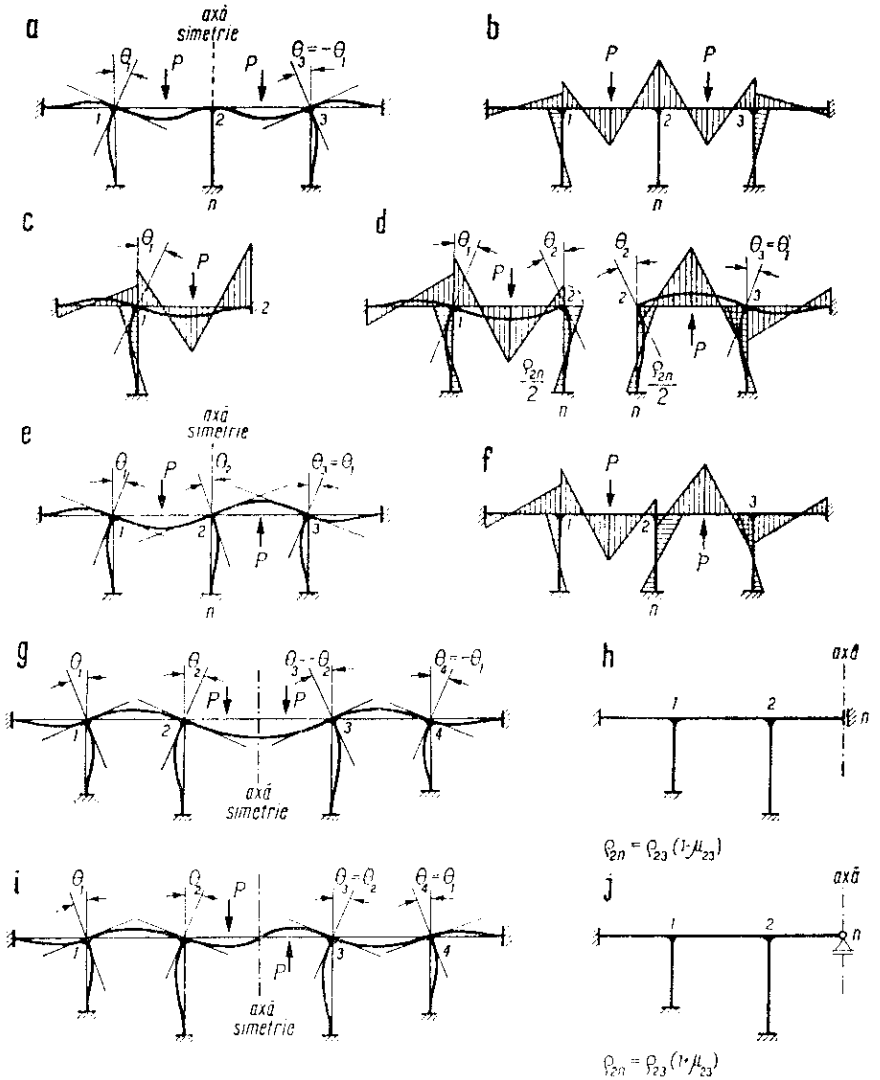


Fig. 185

în cele două semistructuri. Înseamnă că pe stîlpul 2-n din semistructură diagrama M apare cu ordonate reduse la jumătate. Pentru o aceeași rotire a nodului 2 ca în structura dată, aceasta este posibil în semistructură numai dacă stîlpul 2-n are aici o rigiditate redusă la jumătate față de stîlpul real. Se prevede deci pentru acest stîlp în semistructură un moment de inerție $I/2$.

Prin trecerea la semistructuri, numărul necunoscutelor se reduce la fiecare dintre cele două rezolvări. Astfel, pentru încărcare simetrică numărul necunoscutelor este egal cu numărul perechilor de noduri simetrice, iar pentru încărcare antisimetrică — cu numărul perechilor de noduri simetrice, la care se adaugă numărul nodurilor de pe axa de simetrie.

(2) *Cadre cu deschidere centrală*. Aceste cadre au un număr impar de deschideri și conțin numai perechi de noduri dispuse simetric. Trecînd la efectuarea calculului pe semistructuri, numărul necunoscutelor se reduce la jumătate. Ținînd seama de caracterul deformării în cele două situații (fig. 185, *g* și *i*), se ajunge la semistructurile din figura 185, *h* și *j*, unde în axa de simetrie s-au introdus convențional legături adecvate, analog ca în figura 147, *c* și *f*: încastrare glisantă pe verticală în cazul încărcării simetrice (secțiunea de mijloc se deplasează pe verticală, dar nu se poate roti), respectiv reazem simplu pentru încărcarea antisimetrică (secțiunea de mijloc nu se deplasează pe verticală și are moment încovoietor și forță axială nule).

Rămîne să se determine coeficienții de rigiditate corespunzători barei convenționale 2-n în cele două situații, utilizînd condiția că aceștia trebuie să fie egali cu cei din situația reală, anume cînd bara centrală *2-3* este încărcată cu *perechi* de rotiri simetrice sau antisimetrice:

— Pentru încărcare *simetrică* (fig. 185, *g*), $\theta_3 = -\theta_2$ și deci

$$M_{23} = \rho'_{23}\theta'_2 + \rho'_{32}\mu_{32}\theta'_3 = \rho'_{23}(1-\mu_{23})\theta'_2, \text{ sau } \rho^{(s)}_{2n} = \rho'_{23}(1-\mu_{23}), \tag{12.37}$$

— Pentru încărcare *antisimetrică* (fig. 185, *i*), $\theta_3 = \theta_2$ și deci

$$M_{23} = \rho'_{23}\theta'_2 + \rho'_{32}\mu_{32}\theta'_3 = \rho'_{23}(1+\mu_{23})\theta'_2, \text{ sau } \rho^{(a)}_{2n} = \rho'_{23}(1+\mu_{23}). \tag{12.38}$$

Din expresiile (12.37) și (12.38) rezultă că bara centrală a cadrului apare mai rigidă pentru încărcarea antisimetrică, decît pentru încărcarea simetrică. Aceasta se explică prin efectul rotirii nodurilor de la extremități: în cazul încărcării simetrice, ambele noduri tind să deformeze bara în același sens, pe cînd în cazul încărcării antisimetrice, rotirile celor două noduri tind să deformeze bara în sensuri contrare.

D. CADRE CU NODURI DEPLASABILE

1. Caracteristici

La cadre cu noduri deplasabile, trecerea în poziția deformată este caracterizată atît prin rotiri, cît și prin translații de noduri. Sistemul de bază se obține blocînd mai întîi nodurile contra rotirii, apoi introducînd blocări pentru

fiecare grad de libertate, cum s-a arătat în figura 178. Introducerea blocărilor pune în evidență necunoscutele problemei: rotirile nodurilor și parametrii care definesc deplasările corespunzătoare gradelor de libertate. S-a arătat că aceștia din urmă se aleg obișnuit sub formă de rotiri de bare (rotirea uneia dintre barele care participă la deplasarea respectivă). Numărul necunoscutelor este deci egal cu numărul nodurilor, plus numărul gradelor de libertate elastică ale cadrului.

Ecuațiile de condiție, care au forma generală (12.1), exprimă că — pentru sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcinile date și necunoscutele $Z_1,\ldots,Z_n$ — reacțiunile totale din blocările de noduri și de grade de libertate trebuie să fie nule. Notînd cu $Z_1,\ldots,Z_p$ necunoscutele-rotiri de nod și cu $Z_q,\ldots,Z_n$ necunoscutele-rotiri de bare, sistemul ecuațiilor de condiție are forma

$$\begin{array}{l} \\ (1) \\ \\ \\ \\ (2) \\ \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} r_{11} & \cdots & r_{1p} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ r_{p1} & \cdots & r_{pp} \\ \hline r_{q1} & \cdots & r_{qp} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ r_{n1} & \cdots & r_{np} \end{array}\right.}^{A} \quad \overbrace{\left.\begin{array}{ccc} r_{1q} & \cdots & r_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ r_{pq} & \cdots & r_{pn} \\ \hline r_{qq} & \cdots & r_{qn} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ r_{nq} & \cdots & r_{nn} \end{array}\right]}^{B} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{C} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{D} \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_p \\ \hline Z_q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} R_{1s} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{ps} \\ \hline R_{qs} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{ns} \end{array}\right] = [0] \,. \qquad (12.39)$$

Coeficienții necunoscutelor sînt reacțiuni-unitare: un coeficient oarecare r_{jk} reprezintă reacțiunea produsă în blocarea j, cînd sistemul de bază este încărcat cu necunoscuta-unitate $Z_k=1$. Termenul liber R_{js} reprezintă reacțiunea produsă în blocarea j, cînd pe sistemul de bază se aplică sarcinile date. Pe baza semnificației lor, care nu este aceeași la toate, se pot distinge în sistem două categorii de ecuații: (1) *ecuațiile de nod*, care exprimă că reacțiunea-moment din blocarea corespunzătoare necunoscutei principale este nulă și (2) *ecuațiile de grad de libertate*, care exprimă că reacțiunea-forță din blocarea gradului de libertate corespunzător necunoscutei principale este nulă.

S-a arătat anterior că ecuațiile din sistemul (12.39) sînt ecuații de *echilibru static*, și deci scrierea lor se poate face folosind fie ecuațiile de proiecții și momente, fie aplicînd principiul deplasărilor virtuale. Pentru ecuațiile de nod se pune condiția că suma momentelor totale de capăt din jurul nodului trebuie să fie nulă; la un nod j rezultă deci $R_j=\Sigma\,\mathfrak{M}_{jk}=0$. Aceste ecuații sînt asemănătoare celor de la cadre cu noduri fixe, cu deosebirea că intervin și necunoscutele corespunzătoare gradelor de libertate. Pentru ecuațiile de grad de libertate pot fi folosite două modalități de a exprima condiția de anulare a reacțiunilor-forță (numite și *forțe de fixare*) din blocările respective, de exemplu condiția $R_i=0$ pentru gradul de libertate i.

(1) *Utilizarea ecuațiilor de proiecții.* Este avantajoasă la cadre etajate cu stîlpi verticali (fig. 186, *a*). Fiecare etaj conține un grad de libertate elastică,

deoarece riglele care îl încadrează pot avea deplasări laterale diferite. Drept parametru pentru gradul de libertate al unui etaj oarecare i se alege obișnuit rotirea axei stîlpilor etajului $\psi_i=(\Delta_{sup}-\Delta_{inf})/h_e$, unde $\Delta_i=\Delta_{sup}-\Delta_{inf}$ reprezintă diferența de deplasare laterală a nodurilor de pe cele două rigle, iar h_e — înălțimea etajului. De observat că, pentru încărcarea sistemului de bază cu $\psi_i=1$, pe direcția blocării gradului de libertate i rezultă o deplasare

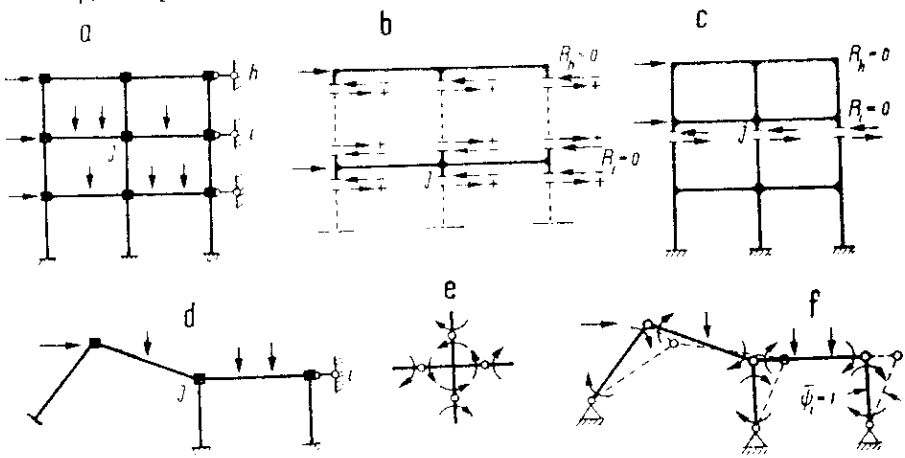


Fig. 186

$\Delta_i=\psi_i h_e=1\cdot h_e$. Va trebui să se țină seama de aceasta la controlul reciprocității reacțiunilor unitare $r_{ji}=r_{ij}$, unde j se referă la un nod și i la un grad de libertate.

Calculul forțelor de fixare R_i, date de încărcarea cu sarcini sau cu deplasări, se obține izolînd riglele cadrului prin secționarea stîlpilor imediat lîngă noduri (fig. 186, *b*) și exprimînd echilibrul acestora prin ecuații de proiecție pe orizontală. În punctele de secționare s-au pus în evidență numai forțele tăietoare, deoarece acestea intervin în ecuații. La forțe tăietoare vom proceda la fel ca pentru momente de capăt, deosebind forța de pe capătul barei și cea de pe nod, care sînt de sensuri contrare și deci vor fi afectate de semne diferite. Convenim să considerăm ca *pozitive* forțele tăietoare orizontale dirijate *de la stînga spre dreapta*, cum se vede în figura 186, *b*. Se va lucra cu forțele aplicate *pe bare;* trecerea pe nod se obține prin inversarea semnului.

Forța de fixare R_i echilibrează celelalte forțe orizontale aplicate asupra riglei izolate; în expresia lui R_i aceste forțe intervin deci cu semne inversate. Este același lucru cu a considera forțele tăietoare de pe *capetele barelor* (luate cu semnele lor), inversarea de semn intervenind numai la componentele orizontale ale sarcinilor. Deci

$$R_i=\sum_{sup} T_{inf}+\sum_{inf} T_{sup}-\sum P=0,$$

unde prima sumă se referă la forțele din extremitățile inferioare ale stîlpilor teajului superior, iar a doua — la forțele din extremitățile superioare ale stîl-

pilor etajului inferior. O simplificare, pentru riglele intermediare, se obține folosind secționarea arătată în figura 186, *c*, imediat sub rigla *i*, care izolează întreaga porțiune superioară a cadrului. Din condiția de echilibru rezultă

$$\sum R_i = \sum_{inf} T_{sup} - \sum P = 0, \tag{12.40}$$

unde prima și ultima sumă se referă la toate riglele cuprinse în porțiunea izolată. În loc de a pune condiția că fiecare forță de fixare este nulă, relația (12.40) conduce la sumarea succesivă a ecuațiilor de grad de libertate, exprimînd că sînt nule: prima forță de fixare, suma primelor două forțe de fixare, suma primelor trei etc.

(2) *Utilizarea deplasărilor virtuale.* La cadre de formă oarecare, scrierea prin proiecții a ecuațiilor de grad de libertate nu mai este aplicabilă (prin izolarea unor porțiuni de cadru, în ecuații ar interveni atît forțe tăietoare, cît și forțe axiale). Este deci necesar să se adopte cealaltă cale, anume aplicînd principiul deplasărilor virtuale.

În acest scop, se consideră cadrul în situația de echilibru, cînd se dezvoltă momentele totale de capăt M_{jk} și reacțiunile din blocări sînt nule. În extremitățile barelor de lîngă noduri, cît și în încastrările din rezemări, se admit introduse articulații; perechile de momente M_{jk} se aplică drept acțiuni exterioare. Sistemul astfel obținut este în echilibru sub acțiunea sarcinilor și a tuturor acestor momente. Situația de la un nod se vede în figura 186, *e*. Momentele aplicate *pe nod* își fac echilibru, iar condiția că suma lor trebuie să fie egală cu zero este echivalentă cu ecuația de nod din sistemul (12.39). Nodul apare ca un corp rigid, deci oricum s-ar roti el în cadrul unei deplasări virtuale, lucrul mecanic virtual dat de momentele de pe nod este nul și, în consecință, aceste momente pot fi eliminate. Rămîn deci numai momentele aplicate pe capetele barelor. Deși suma lor în jurul nodului este de asemenea egală cu zero, situația este deosebită deoarece barele pe care sînt aplicate au rotiri diferite cînd se dă o deplasare virtuală.

Schema articulată a cadrului se poate deci simplifica, admițînd introduse articulații chiar în noduri (fig. 186, *f*). Pe extremitățile barelor se aplică momentele totale de capăt M_{jk}, care împreună cu sarcinile asigură echilibrul sistemului. Acesta are un număr de grade de libertate cinematică egal cu numărul gradelor de libertate elastică ale cadrului dat, cum s-a arătat în legătură cu figura 176. Fiecare grad de libertate cinematică corespunde uneia dintre blocările introduse în sistemul de bază, astfel că se pot da atîtea deplasări virtuale distincte, cîte ecuații de grad de libertate figurează în sistemul (12.39).

Deoarece în situația de echilibru reacțiunile R_i sînt nule, în condiția de lucru virtual nul vor intra numai momentele de capăt M_{jk} și sarcinile. Pentru o deplasare virtuală *i*, condiția are forma

$$L_M^{(i)} + L_s^{(i)} = 0,$$

unde $L_M^{(i)}$ reprezintă lucrul mecanic virtual dat de toate momentele de capăt M_{jk}, iar $L_s^{(i)}$ este lucrul mecanic virtual dat de sarcini. În expresiile momentelor totale M_{jk} intervin necunoscutele (rotiri de nod și parametri de grad

de libertate), astfel că prin explicitarea primului termen se obține o serie de termeni, fiecare conținînd cîte o necunoscută. Se ajunge astfel la forma (12.39) a ecuației de grad de libertate; semnificația ecuației și a termenilor săi se schimbă însă, reprezentînd acum lucru mecanic virtual.

Este necesară o precizare. Ecuația de grad de libertate trebuie să reprezinte în esență condiția $R_i=0$. Pentru a ajunge la această interpretare, în cazul folosirii deplasărilor virtuale, se consideră situația de echilibru a sistemului articulat încărcat cu momentele totale de capăt, cu sarcini și cu reacțiunile R_i. Pentru deplasarea cinematică i, numai reacțiunea corespunzătoare acestui grad de libertate va parcurge o deplasare, deci va da lucru mecanic virtual. Condiția de echilibru are forma

$$L_M^{(i)}+L_s^{(i)}+L_{R_i}^{(i)}=0, \text{ de unde } L_{R_i}^{(i)}=-[L_M^{(i)}+L_s^{(i)}].$$

Deoarece în situația finală considerată $R_i=0$, rezultă $L_{R_i}^{(i)}=0$, și deci ecuația de grad de libertate este

$$-[L_M^{(i)}+L_s^{(i)}]=0. \tag{12.41}$$

Semnul general „minus" care apare în ecuație nu prezintă importanță asupra ecuației însăși, deoarece conduce numai la o inversare a semnelor tuturor termenilor. Introducerea acestui semn este totuși necesară pentru a controla în sistemul de ecuații reciprocitatea $r_{ji}=r_{ij}$.

2. Cadre etajate

Aceste cadre au particularitatea că stîlpii lor sînt verticali, astfel că la scrierea ecuațiilor de grad de libertate se poate utiliza modalitatea arătată în figura 186, *c*, folosind proiecții pe orizontală. Încărcarea sistemului de bază cu sarcini și cu necunoscute se vede în figurile 187, *a-d*: cazul *a* se referă la încărcare cu sarcini, cazul *b* corespunde încărcării cu o rotire-unitate dată unui nod oarecare *j*, iar în cazurile *c* și *d* s-a impus cîte o rotire-unitate stîlpilor de la două dintre etaje, corespunzătoare gradelor de libertate *h* și *i*. Din cercetarea acestor situații de încărcare rezultă:

(1) Pentru încărcare cu *rotire de nod* (fig. 187, *c*), momentele de capăt sînt

$$M_j=4E\rho_{jk}\theta_j=\rho'_{jk}\theta'_j \text{ și } M_k=4E\rho_{jk}\mu_{jk}\theta_j=\rho'_{jk}\mu_{jk}\theta'_j,$$

unde s-au introdus coeficienții de rigiditate corectați ρ' și rotirile corectate θ', conform definirilor date prin relațiile (12.34). Pentru forțele tăietoare pe bară rezultă

$$T_{jk}=-T_{kj}=-\frac{\rho'_{jk}(1+\mu_{jk})}{h_e}\theta'_j, \tag{a}$$

unde s-a notat cu h_e înălțimea comună a stîlpilor etajului considerat.

(2) Pentru încărcare cu *rotire de bară* (fig. 187, *f*), momentele de capăt sînt

$$M_{jk}=-4E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk}=-\bar{\rho}'_{jk}\psi'_{jk} \text{ și } M_{kj}=-4E\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk}=-\bar{\rho}'_{kj}\psi'_{jk},$$

unde s-au introdus similar cantităţile corectate $\bar{\rho}'_{jk}=\bar{\rho}_{jk}\cdot I_c/I_c$ și $\psi'_{jk}=\psi_{jk}\cdot 4EI_c/l_c$. Mărimile forţelor tăietoare pe bară rezultă

$$T_{jk}=-T_{kj}=\frac{(\bar{\rho}'_{jk}+\bar{\rho}'_{kj})}{h_c}\psi'_{jk} \qquad (b)$$

care au sensuri opuse celor din cazul precedent.

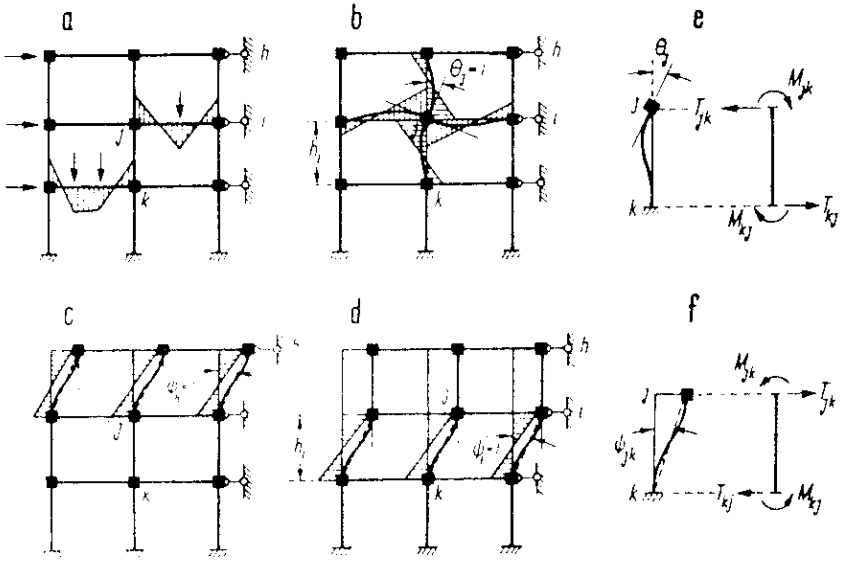


Fig. 187

(3) Pentru încărcare cu *sarcini orizontale* aplicate numai în noduri (caz uzual în proiectare, unde sarcinile date de vînt, cutremur etc. se concentrează la nivelul riglelor cadrului), în sistemul de bază stîlpii nu au forţă tăietoare.

Cu ajutorul acestor elemente se pot stabili expresiile coeficienţilor și ale termenilor liberi din ecuaţiile de condiţie de forma (12.39), unde se vor folosi drept necunoscute rotirile corectate θ' și ψ', astfel că sistemul de bază se consideră încărcat cu deplasări-unitate de forma $Z_j=\theta'_j=1$ și $Z_i=\psi'_i=1$.

(a) Ecuaţii de nod. Pentru un nod oarecare *j*, reacţiunea din blocare va fi egală cu suma momentelor de pe capetele de bare din jurul său. Admiţînd sistemul de bază încărcat succesiv cu rotirea $\theta'_j=1$ a nodului *j* (fig. 187, *b*), cu rotirea $\theta'_k=1$ a unui nod vecin *k*, cu rotirea $\psi'_i=1$ a stîlpilor din etajul *i* (fig. 187, *c*) și cu sarcini (fig. 187, *a*), rezultă următoarele mărimi de reacţiuni în blocarea *j*

$$r_{jj}=\sum_j\rho'_{jk}=\rho'_j,\quad r_{jk}=-\rho'_{kj}(\mu_{kj}),\quad r_{ji}=-\bar{\rho}'_{jk},\quad R_{js}=-\bar{M}_j=\sum_j\mathfrak{M}_{jk}. \qquad (12.42)$$

Ecuația de nod va avea deci forma

$$\rho'_j \theta'_j + \sum \rho'_{kj} \mu_{jk} \theta'_k - \sum_j \rho'_{jk} \psi'_i - \bar{M}_j = 0, \tag{12.43}$$

unde prima sumă cuprinde termenii ecuației corespunzători rotirilor de noduri legate prin bare de nodul j, iar a doua sumă cuprinde numai doi termeni care provin de la rotirile axelor stîlpilor ce se întîlnesc în nodul j (stîlpul din etajul superior și cel din etajul inferior).

Pentru fiecare nod se scrie o ecuație (12.43). Comparînd cu forma generală (12.39), se constată că numeroși coeficienți sînt nuli; cei de forma r_{jk}, unde nodul k nu este legat prin bară de nodul j, de asemenea cei de forma r_{ji}, unde etajul i nu este alăturat riglei pe care se află nodul j.

(b) Ecuații de etaj. Pentru un etaj oarecare i, de înălțime h_i, condiția de anulare a reacțiunii din blocarea i se va scrie sub forma (12.40), secționînd stîlpii acestui etaj la partea superioară și exprimînd printr-o ecuație de proiecții pe orizontală echilibrul porțiunii de cadru rămase deasupra secționării (fig. 186, *c*). În ecuații se introduc forțele tăietoare aplicate *pe bare*, care au același sens cu reacțiunea din blocare.

Forțe tăietoare în stîlpii etajului i produc numai rotirile nodurilor de pe cele două rigle care delimitează etajul, cît și rotirile axelor acestor stîlpi. Pentru stîlpul curent j-k din etaj, încărcînd în sistemul de bază nodul superior cu rotirea $\theta'_j = 1$ (fig. 187, *b*), respectiv încărcînd nodul inferior cu rotirea $\theta'_k = 1$, se obțin următoarele reacțiuni în blocarea i

$$r_{ij} = -\rho'_{jk}(1 + \mu_{jk})/h_i = -\bar{\rho}'_{jk}/h_i \quad \text{și} \quad r_{ik} = -\rho'_{kj}(1 + \mu_{kj})/h_i = -\bar{\rho}'_{kj}/h_i, \tag{c}$$

care sînt date de forțele tăietoare ce apar în extremitatea superioară a stîlpului j-k pentru aceste două cazuri de încărcare; în expresiile (c) s-a ținut seama și de relațiile (12.19). Cînd sistemul de bază este încărcat cu rotirea $\psi'_i = 1$ a axei stîlpilor etajului i (fig. 187, *d*), reacțiunea este dată de suma forțelor tăietoare din extremitățile superioare ale tuturor stîlpilor din etaj și are mărimea

$$r_{ii} = \sum_c (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj})/h_i. \tag{d}$$

Acesta este coeficientul principal al ecuației. De menționat că rotirea $\psi'_k = 1$ a axei stîlpilor *altui* etaj (fig. 187, *c*) nu dă forțe tăietoare în stîlpii etajului i, și deci *coeficienții secundari de forma r_{ik} sînt nuli*; aceasta reprezintă o particularitate caracteristică a cadrelor etajate.

Pentru încărcarea sistemului de bază cu sarcini orizontale aplicate în noduri, reacțiunea din blocarea i are mărimea

$$R_{is} = -T_e = -\sum P = -M_e/h_i, \tag{e}$$

unde suma se referă la toate riglele de deasupra secționării. Cantitatea $T_e = -\sum P$ poartă numele de *forță tăietoare de etaj* la nivelul secționării făcute, iar $M_e = h_i T_e$ este *momentul de etaj* corespunzător.

Deoarece în expresiile (c)—(e) intervine peste tot la numitor înălțimea h_i a etajului, la scrierea ecuației de etaj este indicat să se multiplice toți termenii cu h_i; se obține

$$-\sum_e \bar{\rho}'_{jk}\theta'_j-\sum_e \bar{\rho}'_{kj}\theta'_k+\sum_e(\bar{\rho}'_{jk}+\bar{\rho}'_{kj})\cdot\psi'_i-M_e=0, \tag{12.44}$$

unde primele două sume cuprind termenii ecuației care se referă la nodurile de pe cele două rigle ce delimitează etajul i, iar suma din coeficientul principal cuprinde toți stîlpii etajului. Se constată că și în ecuația de etaj numeroși coeficienți sînt nuli: cei de forma r_{ij}, unde nodul j nu se găsește pe riglele ce încadrează nodul i, de asemenea toți coeficienții de forma r_{ih}. Fiecare ecuație de etaj cuprinde numai cîte o singură necunoscută-grad de libertate, care este necunoscuta principală a ecuației.

După alcătuirea și rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție, devin cunoscute rotirile nodurilor și parametrii gradelor de libertate elastică. Se poate deci trece la calculul momentelor finale din extremitățile barelor, folosind următoarele relații care derivă din (12.8) și (12.9):

— bară cuprinsă între două noduri (la rigle $\psi=0$)

$$\begin{aligned} M_{jk}&=\rho'_{jk}\theta'_j+\rho'_{kj}\mu_{kj}\theta'_k-\bar{\rho}'_{jk}\psi'_i+\mathfrak{M}_{jk},\\ M_{kj}&=\rho'_{jk}\mu_{jk}\theta'_j+\rho'_{kj}\theta'_k-\bar{\rho}'_{kj}\psi'_i+\mathfrak{M}_{kj}; \end{aligned} \tag{12.45}$$

— stîlp din etajul inferior al cadrului

$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j-\bar{\rho}'_{jk}\psi'_i+\mathfrak{M}_{jk},\qquad M_{kj}=\rho'_{jk}\mu_{jk}\theta'_j-\bar{\rho}'_{kj}\psi'_i+\mathfrak{M}_{kj},$$

unde coeficienții de rigiditate și factorii de transmitere se iau din tabela 8.

3. Cadre de formă oarecare

Se consideră cazul general al cadrelor cu noduri deplasabile. Fie cadrul din figura 188, *a*, la care sistemul geometric determinat de bază s-a obținut prin blocarea nodurilor și a gradelor de libertate (fig. 188, *b*); acest sistem se încarcă succesiv cu sarcini și cu necunoscute. În figura 188, *b* este arătată încărcarea cu sarcini, iar în figura 188, *c* și *d* se văd două cazuri de încărcare cu necunoscute-rotiri de nod, anume cu: $Z_j=\theta'_j=1$ și $Z_k=\theta'_k=1$; în figura 188, *e* și *f* sistemul de bază este încărcat cu necunoscutele-rotiri de bară $Z_h=\psi'_h=1$ și $Z_i=\psi'_i=1$, care corespund celor două grade de libertate elastică a cadrului.

Cînd sistemul de bază se încarcă cu necunoscuta-unitate pe direcția unui grad de libertate, se produce deformarea elastică a unei porțiuni de structură, ale cărei noduri rămîn blocate la rotire, dar suferă translații și deci axele barelor se rotesc. Rotirea axei uneia dintre bare este considerată parametru-unitate (de exemplu $\psi'_i=1$), în funcție de care se determină și rotirile axelor celorlalte bare ale porțiunii. Cum s-a arătat în legătură cu figura 176, corelația dintre rotirile axelor barelor în deformata elastică este aceeași ca pentru schema arti-

culată a structurii[1], cînd i se dă o deplasare cinematică pe direcția gradului de libertate respectiv, cum se vede comparînd figura 188, *e* și *g* cu figura 188, *f* și *h*.

Deși pentru același grad de libertate deplasarea elastică și deplasarea cinematică au aceeași configurație (*axele* barelor au aceleași rotiri), ele au semnificații esențial diferite:

— deplasarea *elastică*, la care barele se deformează și nodurile sînt blocate contra rotirii, este *o componentă a deformatei reale a cadrului*, datorită încărcării sistemului de bază cu necunoscuta-unitate respectivă;

— deplasarea *cinematică*, la care nodurile sînt admise articulate și barele sînt considerate rigide, este un *instrument* pentru exprimarea condiției de echilibru static, cum s-a arătat în legătură cu figura 186, *f*.

În figura 188, pentru fiecare caz de încărcare s-au indicat valorile momentelor de capăt ce apar în extremitățile barei curente *j-k*. S-a admis că se utilizează coeficienții de rigiditate corectați ρ' sau $\bar{\rho}'$, precum și necunoscutele corectate $Z'=Z\cdot 4EI_c/l_c$. Cu ajutorul acestor elemente se pot scrie expresiile coeficienților și a termenilor liberi din ecuațiile de condiție (12.39).

(a) *Ecuații de nod.* Ecuația corespunzătoare unui nod oarecare *j* exprimă condiția $R_j=0$, pentru sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini și cu necunoscute, deci are forma generală

$$R_j=r_{j1}Z_1+\ldots+r_{jj}Z_j+r_{jk}Z_k+\ldots+r_{ji}Z_i+\ldots+r_{jn}Z_n+R_{js}=0,$$

unde s-au pus în evidență cele trei categorii de coeficienți, anume r_{jj}, r_{jk} și r_{ji}, care reprezintă reacțiunile unitare din blocarea nodului *j* cînd sistemul de bază este încărcat respectiv cu: o rotire-unitate dată chiar nodului *j*, rotire-unitate dată unui nod vecin *k*, precum și necunoscuta-unitate corespunzătoare gradului de libertate elastică *i*.

Pentru fiecare caz, reacțiunea din blocare rezultă sumînd momentele de capăt (pe bară) din extremitățile barelor ce vin în nodul *j*, produse de încărcarea considerată. Cu datele din figura 188, *b-f*, se obțin:

— coeficientul principal r_{jj} (încărcare cu rotirea de nod $Z_j=\theta'_j=1$)

$$r_{jj}=\sum_j \rho'_{jk}=\rho'_j; \tag{12.46}$$

— coeficientul secundar r_{jk} (încărcare cu rotirea de nod $Z_k=\theta'_k=1$)

$$r_{jk}=\rho'_{kj}\mu_{kj}=\rho'_{jk}\mu_{jk}=r_{kj}; \tag{12.47}$$

— coeficientul secundar r_{ji} (încărcare cu parametrul $Z_i=\psi'_i=1$)

$$r_{ji}=-\sum_j \rho'_{jk}\psi^{(i)}_{jk}, \tag{12.48}$$

unde în sumă intră barele din jurul nodului *j* la care $\psi^{(i)}_{jk}\neq 0$;

— termenul liber R_{js} provenit din încărcare cu sarcini

$$R_{js}=-\overline{M}_j=\sum_j \mathfrak{M}_{jk}. \tag{12.49}$$

[1] Pentru diferențiere, rotirile de bară în schema articulată s-au notat cu simboluri barate, deși sînt aceleași cu rotirile barelor din deformata elastică cînd parametrul-unitate este același.

Se cunosc astfel toți coeficienții și termenii liberi din ecuația de nod. Coeficienții de forma r_{jj} și r_{jk}, precum și termenii liberi R_{js}, au aceleași expresii ca la cadre cu noduri fixe, situațiile de încărcare ale sistemului de bază din care provin fiind aceleași.

(b) *Ecuații de grad de libertate.* Vor fi scrise sub forma (12.41), utilizînd deplasările cinematice din figura 188, *g* și *h* pentru exprimarea echilibrului schemei

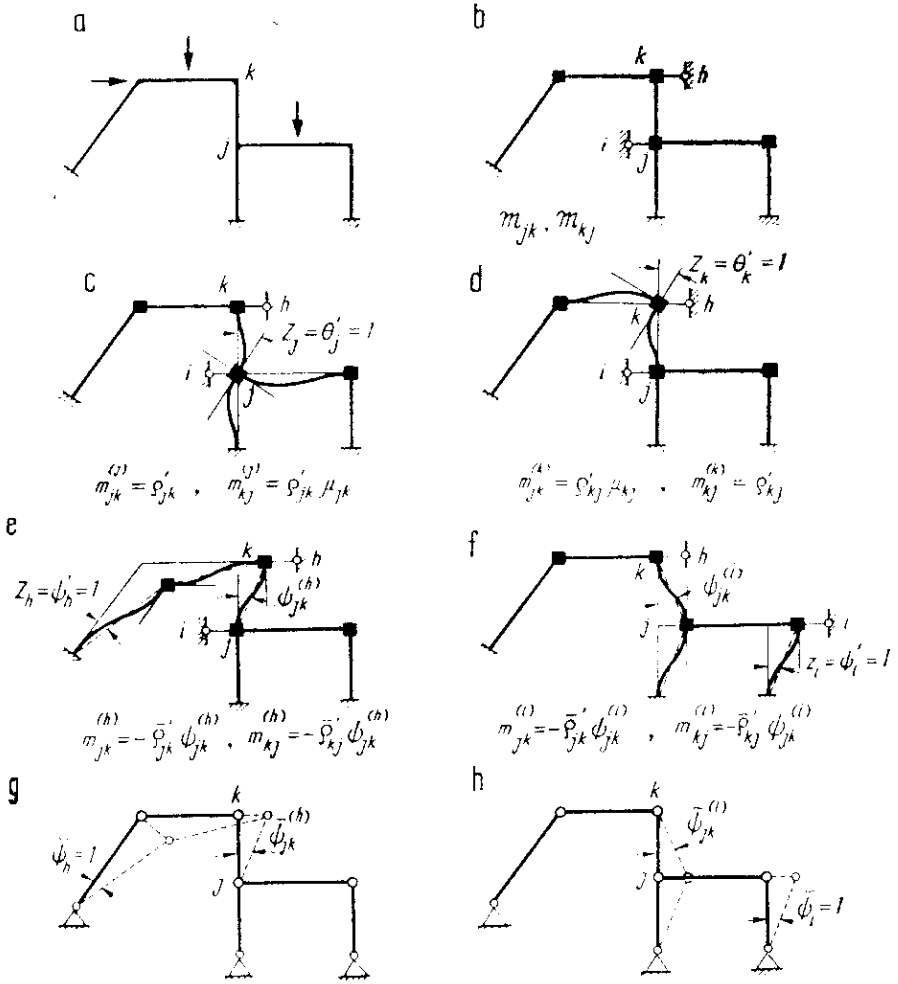


Fig. 188

articulate a cadrului, încărcată cu sarcini și cu momentele totale de capăt. Un moment total M_{jk} are drept componente momentele de capăt produse în sistemul de bază de încărcarea cu sarcini și cu necunoscute, sub forma

$$M_{jk} = \mathfrak{M}_{jk} + m^{(1)}_{jk} Z_1 + \ldots + m^{(n)}_{jk} Z_n,$$

unde $m_{jk}^{(1)}, \ldots, m_{jk}^{(n)}$ sînt momentele de capăt produse de încărcarea succesivă cu necunoscutele-unitate (fig. 188, *c-f*). Introducînd în condiția generală (12.41), primul termen al acesteia devine o sumă de termeni în care apare succesiunea necunoscutelor, sub forma

$$r_{i1}Z_1 + \ldots + r_{ij}Z_j + \ldots + r_{ii}Z_i + r_{ih}Z_h + \ldots + r_{in}Z_n + R_{is} = 0,$$

acești termeni avînd acum semnificația de *lucru mecanic virtual.*

Un termen oarecare $r_{iq}Z_q$ reprezintă lucrul mecanic virtual dat de momentele de capăt produse în sistemul de bază de încărcarea cu necunoscuta Z_q (rotire de nod sau rotire de bară), parcurgînd deplasarea cinematică $\overline{\psi}_i = 1$. Se obține astfel semnificația generală a coeficienților și termenilor liberi:

(a) Un coeficient oarecare r_{iq} reprezintă lucrul mecanic virtual, prin deplasarea cinematică $\overline{\psi}_i = 1$, dat de momentele de capăt produse în sistemul de bază de încărcarea cu necunoscuta-unitate $Z_q = 1$ (deplasarea elastică $Z_q = 1$)[1].

(b) Termenul liber R_{is} reprezintă lucrul mecanic virtual, prin deplasarea cinematică $\overline{\psi}_i = 1$, dat de sarcini și de momentele de încastrare perfectă corespunzătoare acestora.

Pe această bază se pot stabili expresiile coeficienților și termenilor liberi din ecuația gradului de libertate i, ținînd seama de mărimile momentelor de capăt date în figura 188, *b-f* pentru fiecare caz de încărcare a sistemului de bază, de asemenea de rotirile barei curente *j-k* în cazurile respective. Peste tot intervine deplasarea cinematică corespunzătoare parametrului $\overline{\psi}_i = 1$; totodată, se operează și schimbarea generală de semn indicată de relația (12.41):

— coeficient secundar r_{ij} (încărcare cu rotirea de nod $Z_j = 0'_j = 1$)

$$r_{ij} = -\sum_j \rho'_{jk}(1 + \mu_{jk})\overline{\psi}_{jk}^{(i)} = -\sum_j \bar{\rho}'_{jk}\overline{\psi}_{jk}^{(i)}, \tag{12.50}$$

unde suma se referă la barele din jurul nodului j la care $\overline{\psi}_{jk}^{(i)} \neq 0$;

— coeficient principal r_{ii} (încărcare cu parametrul $Z_i = \psi'_i = 1$)

$$r_{ii} = \sum_i (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj})\psi'^{(i)}_{jk}\,\overline{\psi}_{jk}^{(i)}, \tag{12.51}$$

unde suma cuprinde barele care se rotesc cînd intervine gradul de libertate i;

— coeficient secundar r_{ih} (încărcare cu parametrul $Z_h = \psi'_h = 1$)

$$r_{ih} = \sum_{i,h} (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj})\psi'^{(h)}_{jk}\,\overline{\psi}_{jk}^{(i)}, \tag{12.52}$$

unde suma se referă la barele care au rotire atît în deplasarea elastică $Z_h = 1$, cît și în deplasarea cinematică i;

— termen liber R_{is} provenit din încărcarea cu sarcini pe sistemul de bază

$$R_{is} = -\sum_i (\mathfrak{M}_{jk} + \mathfrak{M}_{kj})\overline{\psi}_{jk}^{(i)} - L_s^{(i)}, \tag{12.53}$$

unde apar doi termeni: primul corespunde momentelor de încastrare perfectă din figura 188, *b* și suma cuprinde barele care se rotesc în deplasarea cinema-

[1] Să se rețină că la notația r_{iq} *primul* indice se referă la deplasarea *cinematică* utilizată pentru exprimarea condiției de echilibru static, iar *al doilea* indice — la deplasarea elastică cu care se încarcă sistemul de bază.

tică i; al doilea reprezintă lucrul mecanic virtual dat de sarcini, cînd punctele lor de aplicație parcurg deplasările ce rezultă din deplasarea cinematică i.

Se cunosc astfel toți coeficienții și termenii liberi din ecuația de grad de libertate.

Rămîn de făcut unele observații:

(1) Matricea coeficienților din sistemul ecuațiilor de condiție (12.39), care are forma $\mathbf{rZ}+\mathbf{R}_s=0$, este simetrică față de diagonala principală; această situație trebuie să apară și din expresiile obținute pentru coeficienții respectivi. Urmează deci să se compare expresiile (12.48) și (12.50) pentru reciprocitatea $r_{ji}=r_{ij}$, să se examineze relația (12.52) pentru reciprocitatea $r_{ih}=r_{hi}$, care împreună cu reciprocitatea $r_{jk}=r_{kj}$ dată de relația (12.47) asigură simetria întregii matrice. Aceste trei cazuri de reciprocitate se referă la submatricele **A**, **B**, **C** și **D** în care se poate partiționa matricea generală **r**, cum se arată în relația (12.39): condițiile $r_{jk}=r_{kj}$ și $r_{ih}=r_{hi}$ se referă la reciprocitatea coeficienților secundari din submatricele **A** respectiv **D**, în timp ce condiția $r_{ji}=r_{ij}$ exprimă reciprocitatea coeficienților din matricele **B** și **C**, dispuși simetric față de diagonala principală a matricei **r**.

Cercetarea expresiilor menționate arată că în expresia lui r_{ji} rotirile de bare $\psi'^{(i)}_{jk}$ provin de la deplasarea elastică $Z_i=1$, în timp ce în expresia lui r_{ij} rotirile de bare $\overline{\psi}^{(i)}_{jk}$ provin de la deplasarea cinematică $\overline{\psi}_i=1$. Asemănător, în expresia lui r_{ih} rotirile de bare $\overline{\psi}'^{(h)}_{jk}$ provin de la deplasarea elastică $Z_h=1$ și rotirile de bare $\overline{\psi}^{(i)}_{jk}$ — de la deplasarea cinematică $\overline{\psi}_i=1$, în timp ce în expresia coeficientului r_{hi} aceste două grupe de rotiri se inversează. Înseamnă că reciprocitatea coeficienților secundari este îndeplinită cînd, pentru același grad de libertate, *deplasarea elastică și deplasarea cinematică au aceeași configurație*.

(2) După rezolvarea ecuațiilor de condiție, momentele totale din extremitățile barelor se calculează cu relațiile (12.45), care efectuiază trecerea de la necunoscutele-deplasări aflate prin rezolvarea ecuațiilor de condiție, la ordonatele diagramei de momente încovoietoare.

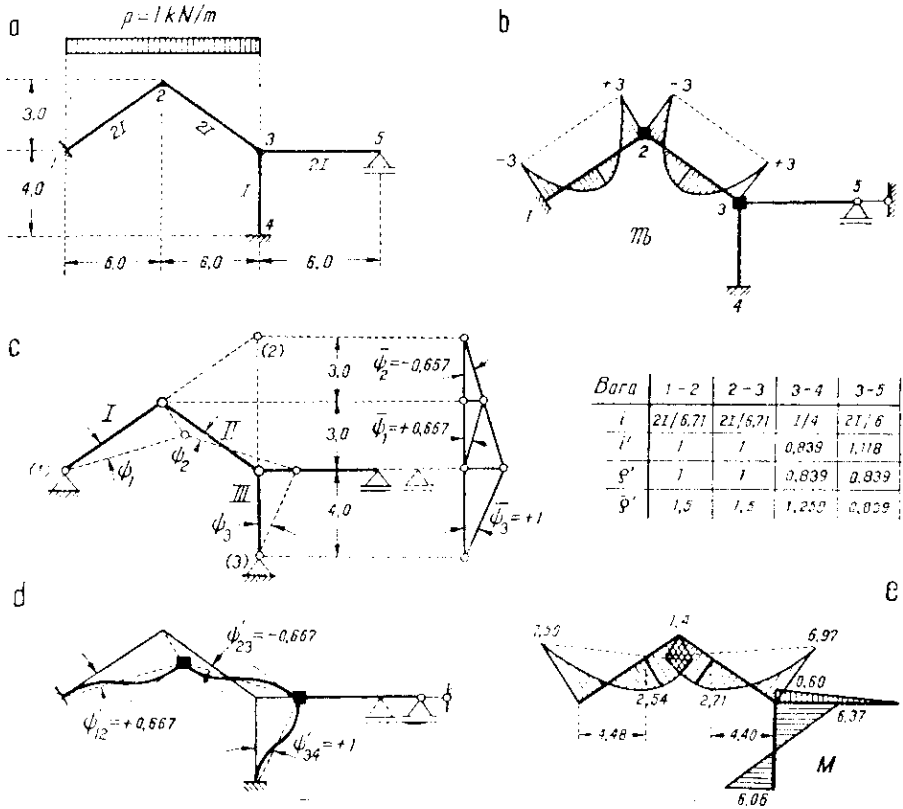
(3) Pentru verificarea rezultatelor trebuie folosită condiția ce a fost încălcată prin trecerea la sistemul de bază. Utilizînd ca necunoscute rotirile de nod și parametrii gradelor de libertate, în tot cursul rezolvării condiția de compatibilitate este respectată; înseamnă că pentru verificare trebuie recurs la condiția de echilibru static. Pe baza diagramei totale de momente încovoietoare se controlează mai întîi echilibrul nodurilor, apoi echilibrul unor porțiuni de cadru, sau a cadrului în ansamblu, utilizînd deplasări virtuale. În acest scop, se admit introduse articulații în anumite extremități de bare, pînă se obțin sisteme cu cîte un grad de libertate, al căror echilibru se controlează sub acțiunea sarcinilor și a momentelor totale de capăt din secțiunile respective.

Pentru exemplificare, se consideră cadrul din figura 189, *a*, care are un singur grad de libertate elastică. În metoda deplasărilor trebuie considerate trei necunoscute: $Z_2=0'_2$, $Z_3=0'_3$ și $Z_i=\psi'_{34}$. Valorile ρ' și ρ' ale barelor sînt date în tabela din figură, unde $l_{12}=l_{23}=6{,}71$ m, iar

$I_c/I_c=6{,}71\ /2I$. Sistemul de bază încărcat cu sarcinile date se vede în figura 189, *b*; momentele de încastrare perfectă sînt[1]

$$\mathfrak{M}_{12}=-\mathfrak{M}_{21}=\mathfrak{M}_{23}=-\mathfrak{M}_{32}=-pl^2/12=-1\cdot 6^2/12=-3\ \text{kNm}.$$

Încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta-unitate $Z_i=\psi'_{34}=1$ conduce la deplasarea elastică din figura 189, *d*. Mărimile rotirilor de bare se determină din configurația deplasării cinematice dată schemei articulate (fig. 189, *c*), folosind centrele instantanee și diagrama de deplasări pe orizontală; rezultă $\overline{\psi}_{12}=0{,}667$, $\overline{\psi}_{23}=-0{,}667$ și $\overline{\psi}_{34}=1$.



Bara	1-2	2-3	3-4	3-5
i	$2I/6{,}71$	$2I/6{,}71$	$I/4$	$2I/6$
i'	I	I	$0{,}839$	$1{,}118$
φ'	1	1	$0{,}839$	$0{,}839$
$\bar{\varphi}'$	$1{,}5$	$1{,}5$	$1{,}259$	$0{,}839$

Fig. 189

Pentru calculul coeficienților și termenilor liberi se utilizează expresiile (12.46)—(12.53); se obține:

$$r_{22}=\sum_2\rho'_{2k}=1+1=2,\qquad r_{33}=\sum_3\rho'_{3k}=1+2\cdot 0{,}839=2{,}68,$$

$$r_{23}=r_{32}=\rho'_{23}\mu_{23}=1\cdot 0{,}5=0{,}5,$$

$$r_{ii}=\sum_i(\rho'_{jk}+\bar{\rho}'_{kj})\psi'^{(i)}_{jk}\psi^{(i)}_{jk}=2\cdot 2\cdot 1{,}5\cdot 0{,}667^2+2\cdot 1{,}259\cdot 1^2=5{,}19$$

[1] Deoarece caracteristicile de încărcare sînt aceleași, momentele de încastrare perfectă la o bară înclinată pot fi calculate pentru proiecția barei pe direcția normală sarcinilor.

$$r_{2i}=r_{i2}=-\sum_{2}\rho'_{2k}\psi'^{(i)}_{2k}=-1{,}5(+0{,}667-0{,}667)=0$$

$$r_{3i}=r_{i3}=-\sum_{3}\rho'_{3k}\psi'^{(i)}_{3k}=-[1{,}5\cdot(-0{,}667)+1{,}259\cdot(+1)]=-0{,}26$$

$$R_{2s}=(\mathfrak{M}_{21}+\mathfrak{M}_{23})=0,\qquad R_{3s}=\mathfrak{M}_{32}=3\ \text{kNm}$$

$$R_{is}=-\sum_{i}(\mathfrak{M}_{ik}+\mathfrak{M}_{ki})\psi^{(i)}_{ik}-L^{(i)}_{s}=2\cdot1\cdot6\cdot3\cdot0{,}667=-24\ \text{kNm}.$$

Rezultă următorul sistem al ecuațiilor de condiție

$$\begin{aligned}2\,Z_2+0{,}5\,Z_3&=0\\0{,}5\,Z_2+2{,}68\,Z_3-0{,}26\,Z_i+3&=0\\-0{,}26\,Z_3+5{,}19\,Z_i-24&=0,\end{aligned}$$

care rezolvat dă soluțiile $Z_2=0'_2=0{,}176$, $Z_3=0'_3=-0{,}706$ și $Z_i=\psi'_{34}=4{,}59$.

Momentele de capăt totale se calculează cu ajutorul relațiilor (12.53), introducînd $\psi'_{12}=0{,}667\cdot4{,}59=3{,}06$, $\psi'_{23}=-0{,}667\cdot4{,}59=-3{,}06$ și $\psi'_{34}=4{,}59$; se găsesc următoarele valori exprimate în kNm:

$$\begin{aligned}M_{12}&=-3+1\cdot0{,}5\cdot0{,}176-1{,}5\cdot3{,}06=-7{,}50,\\M_{21}&=+3+1\cdot0{,}176-1{,}5\cdot3{,}06=-1{,}41,\\M_{23}&=-3+1\cdot0{,}176+1\cdot0{,}5\cdot(-0{,}706)-1{,}5\cdot(-3{,}06)=+1{,}41,\\M_{32}&=+3+1\cdot0{,}5\cdot0{,}176+1\cdot(-0{,}706)-1{,}5\cdot(-3{,}06)=+6{,}97,\\M_{34}&=0{,}839\cdot(-0{,}706)-1{,}259\cdot4{,}59=-6{,}37,\\M_{43}&=0{,}839\cdot0{,}5\cdot(-0{,}706)-1{,}259\cdot4{,}59=-6{,}06,\\M_{35}&=0{,}839\cdot(-0{,}706)=-0{,}60.\end{aligned}$$

Cu aceste valori s-a trasat diagrama de momente încovoietoare din figura 189, *c*.

O verificare a diagramei se obține pe baza condiției de echilibru static, considerînd situația de echilibru a schemei articulate încărcată cu sarcini și cu momentele totale de pe capetele barelor. Utilizînd de exemplu deplasarea virtuală din figura 189, *c*, rezultă

$$\begin{aligned}L^{(i)}_{M}+L^{(i)}_{s}=&(-7{,}50-1{,}41)\cdot0{,}667+(1{,}41+6{,}97)\cdot(-0{,}667)+(-6{,}37-6{,}06)\cdot1+\\&+2\cdot6\cdot3\cdot0{,}667=-23{,}98+24{,}01\simeq0.\end{aligned}$$

Este de asemenea îndeplinită și condiția de echilibru a celor două noduri.

4. Simplificări la structuri simetrice

Procedeul semistructurilor poate fi aplicat și la cadre simetrice cu noduri deplasabile, descompunînd încărcarea dată într-o componentă simetrică și una antisimetrică. Se ajunge la aceasta utilizînd numai necunoscute simetrice sau antisimetrice.

Privitor la necunoscutele-rotiri de nod, situația este similară celei întîlnite la cadrele cu noduri fixe. Rotirile nodurilor de pe axa de simetrie au caracter de necunoscute antisimetrice, în timp ce pentru perechile de noduri dispuse simetric față de axă rotirile respective trebuie grupate într-o pereche de rotiri simetrică și o pereche antisimetrică.

În ceea ce privește gradele de libertate elastică ale cadrului cu noduri deplasabile, se utilizează același procedeu, anume acestea trebuie grupate astfel

înclt să conducă la deplasări elastice simetrice şi antisimetrice; în acelaşi mod trebuie procedat şi pentru deplasările cinematice, folosind aceleaşi configuraţii. Astfel, fiecare dintre cadrele din figura 190 are cîte trei grade de libertate elastică, cum rezultă din compararea numărului de încastrări cu numărul de nedeterminări statice ($i=11$ şi $n=8$ în primul caz, respectiv $i=8$ şi $n=5$ în al doilea caz). Aceste grade de libertate pot fi considerate grupat, spre a conduce la cîte o

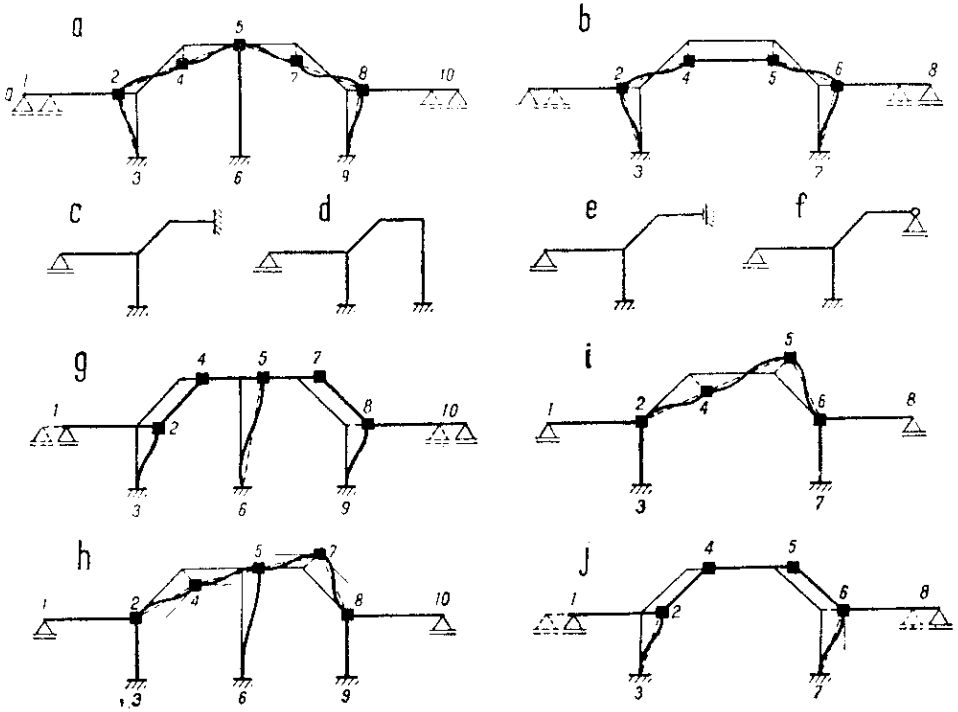


Fig. 190

deplasare elastică simetrică şi două deplasări elastice antisimetrice, cum se vede în figurile 190, *a*, *g* şi *h* pentru primul cadru şi în figurile 190, *b*, *i* şi *j* pentru al doilea.

La acelaşi rezultat se ajunge considerînd semistructurile din figurile 190, *c* sau *e* pentru componenta simetrică a încărcării, respectiv din figura 190, *d* sau *f* pentru componenta antisimetrică. Prin particularizările introduse în axa de simetrie, precizate anterior în legătură cu figura 185, aceste semistructuri păstrează numai gradele de libertate care corespund caracterului încărcării pentru care au fost alcătuite (simetric sau antisimetric). Astfel, semistructurile din figurile 190, *c* şi *e* au cîte un singur grad de libertate, iar semistructurile din figurile 190, *d* şi *f* au cîte două grade de libertate. Numărul total de grade de libertate ale cadrului iniţial se regăseşte la cele două semistructuri ce-i corespund;

rezolvarea este însă simplificată, deoarece semistructurile se rezolvă separat, urmînd ca la sfîrșit să se suprapună rezultatele pentru obținerea diagramelor de eforturi ce corespund sarcinilor date.

5. Efectul variațiilor de temperatură și al cedărilor de rezemări

Variațiile de temperatură sau cedările de rezemări reprezintă pentru structură încărcări de mărimi cunoscute. Acestea se aplică asupra sistemului de bază și efectul lor intervine în ecuațiile de condiție prin intermediul unor termeni liberi de forma R_{it} sau R_{ic}, analogi termenilor liberi R_{is} din cazul încărcării cu sarcini. Coeficienții necunoscutelor depind numai de alcătuirea cadrului dat, astfel că rămîn aceiași ca la încărcarea cu sarcini.

a. **Variații de temperatură**. Se ține seama că variațiile de temperatură, față de temperatura de montaj a structurii, pot interveni asupra barelor cadrului sub două forme: (1) variația $t°$ a temperaturii în axă, care produce variația de lungime a barei; (2) diferența de temperatură $\Delta t° = t_1° - t_2°$ care se creează între cele două fețe și care conduce la curbarea barei spre partea cu temperatura mai ridicată. Deoarece sistemul de bază în metoda deplasărilor este multiplu static nedeterminat, încărcarea cu variații de temperatură produce dezvoltare de eforturi, astfel că în extremitățile barelor apar momente de capăt, analoage momentelor de încastrare perfectă din cazul încărcării cu sarcini. În continuare sînt prezentate separat cele două forme.

(1) *Încărcare cu t°*. Variațiile de lungime ale barelor au mărimea $\Delta l_{jk} = \alpha t° l_{jk}$ și conduc la deplasarea nodurilor. Datorită legăturilor suplimentare, în sistemul de bază apar forțe axiale care produc o deformare elastică a barelor, astfel că în realitate variația de lungime se corectează. Pentru simplificare, se admite și aici aproximația de a neglija deformările produse de forțe axiale. Aceasta revine la a considera că *lungimea barelor variază liber sub acțiunea temperaturii*. Determinarea poziției în care se deplasează nodurile poate fi deci făcută cercetînd configurația pe care o capătă schema articulată a cadrului, cînd lungimile barelor variază cu Δl_{jk}.

La cadre cu noduri fixe, introducerea de articulații în noduri și încastrări conduce la un sistem static determinat, astfel că pentru variații de lungime date ale barelor rezultă poziții bine definite pentru noduri. La cadre cu noduri deplasabile, schema articulată a cadrului are grade de libertate cinematică. Dacă se mențin însă blocările de grade de libertate introduse în sistemul de bază, în concordanță cu faptul că acesta este sistemul care se încarcă cu variații de temperatură, se regăsește o situație de determinare statică, astfel că și în acest caz noile poziții ale nodurilor rezultă bine definite.

Unele exemplificări sînt date în figura 191. Cadrul din figura 191, *a* are noduri fixe și este supus la o creștere de temperatură de $t°$; toate barele se dilată proporțional cu lungimea lor. Schema articulată a cadrului capătă configurația arătată punctat, unde noile poziții ale nodurilor sînt definite succesiv prin intermediul a cîte două bare. Pe baza elementelor geometrice care caracterizează această configurație, se pot stabili rotirile axelor barelor sub forma $\psi_{jk} = \Delta_{jk}/l_{jk}$,

unde Δ_{jk} reprezintă deplasarea relativă a extremităților pe normala la axă. La cadre simetrice, variația uniformă de temperatură reprezintă o încărcare simetrică, astfel că elementele situate în axa de simetrie (noduri, secțiuni de mijloc la bare centrale) se pot deplasa numai în lungul acestei axe. Astfel, la cadrul din figura 191, *c*, noile poziții ale nodurilor rezultă bine definite dacă se ține seama că secțiunea barei din axa de simetrie se deplasează vertical cu o

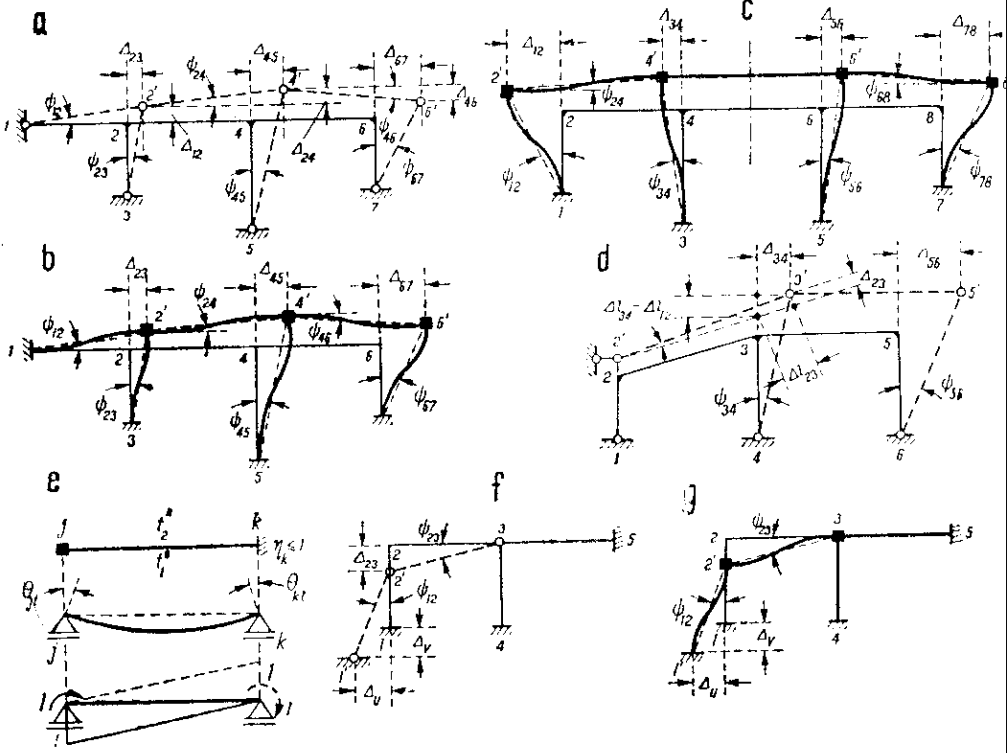


Fig. 191

cantitate egală cu dilatarea stîlpilor alăturați barei. Rezolvarea se poate face numai pentru o jumătate de structură. Cadrul din figura 191, *d* are un grad de libertate, care este blocat prin legătura suplimentară orizontală introdusă în nodul 2. Bara *1-2* se dilată deci fără rotire, nodul 2 trecînd în poziția 2'. Noile poziții ale nodurilor rezultă definite și aici prin intermediul a cîte două bare, cum se vede în figură.

Determinarea rotirilor $\psi_{jk} = \Delta_{jk}/l_{jk}$ ale axelor barelor se face de obicei prin simple corelații geometrice pe configurația deplasată a schemei articulate, pornind de la deplasările Δ_{jk}. La cadre cu stîlpi verticali și rigle orizontale, aceste deplasări rezultă imediat, ca în figurile 191, *b* sau *c*. Cînd sînt și bare înclinate, se

pot de asemenea face determinări geometrice simple. Astfel, pentru cadrul din figura 191, *d*, deplasările Δ_{23} și Δ_{34} se obțin prin proiecții din patrulaterul care are drept laturi pe $(\Delta l_{34} - \Delta l_{12})$, Δl_{23}, Δ_{23} și Δ_{34}.

O dată cunoscute noile poziții ale nodurilor și rotirile axelor barelor, în cadrul aproximației variației libere de lungime sub acțiunea temperaturii, se revine la sistemul de bază, considerînd că trecerea cadrului în noua poziție se face cu *noduri blocate contra rotirii*, așa cum se arată în figurile 191, *b* și *c*. Barele se deformează corespunzător rotirilor ψ_{jk} suferite de axele lor; în extremități se nasc momente de capăt, ale căror mărimi sînt

$$M^t_{jk} = -4 E \bar{\varrho}_{jk} \psi_{jk}, \quad M^t_{kj} = -4 E \bar{\varrho}_{kj} \psi_{jk}. \tag{12.54}$$

Aceste momente de capăt intervin în termenii liberi R_{it}.

(2) *Încărcare cu* Δt°. Cînd bara *j-k* din sistemul de bază este acționată de o *diferență* de temperatură $\Delta t^\circ = t_1^0 - t_2^0$, lungimea barei rămîne neschimbată; nodurile își păstrează poziția și deci barele pot fi privite lucrînd independent. Momentele de capăt se determină aplicînd *metoda eforturilor* cazului din figura 191, *e*. Folosind expresia (8.20), se obțin rotirile din extremitățile barei simplu rezemate

$$\theta_{jt} = -\theta_{kt} = \frac{\alpha \Delta t^\circ}{d_{jk}} \int m_{xj} \, \mathrm{d}x = \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{2 d_{jk}},$$

care sînt termenii liberi din ecuațiile de condiție. Pentru bare cu secțiune *constantă*, aceste ecuații sînt de forma

$$2 M_j - M_k - 6 Ei_{jk} \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{2 d_{jk}} = 0 \quad \text{și} \quad -M_j + 2 M_k \tau_{ik} - 6 Ei_{jk} \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{2 d_{jk}} = 0,$$

unde s-a ținut seama de convențiile de semne din metoda deplasărilor, asemănător ca la stabilirea expresiilor (12.12) și (12.13). Din rezolvarea ecuațiilor se obțin momentele de capăt

$$M^{\Delta t}_{jk} = -3 Ei_{jk} \frac{2 - \tau_{ik}}{4 - \tau_{ik}} \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{d_{jk}} \quad \text{și} \quad M^{\Delta t}_{kj} = -3 Ei_{jk} \frac{\tau_{ik}}{4 - \tau_{ik}} \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{d_{jk}}, \tag{12.55}$$

care pentru cazurile curente $\tau_{ik} = 1$ (bară cuprinsă între două noduri, sau între un nod și o extremitate încastrată perfect) și $\tau_{ik} = 0$ (bară cuprinsă între un nod și o extremitate articulată), devin

$$(\tau_{ik} = 1) \quad M^{\Delta t}_{jk} = -M^{\Delta t}_{kj} = -Ei_{jk} \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{d_{jk}},$$

$$(\tau_{ik} = 0) \quad M^{\Delta t}_{jk} = -\frac{3}{2} Ei_{jk} \alpha \Delta t^\circ \frac{l_{jk}}{d_{jk}}. \tag{12.56}$$

Raportînd la figura 191, *e*, semnele obținute arată că diagrama M produsă de o variație de temperatură Δt° este de partea feței cu *temperatura mai scăzută*.

Se poate acum trece la stabilirea expresiilor termenilor liberi din ecuațiile de nod și de grad de libertate. Pentru ecuația de nod

$$R_{jl} = -\bar{M}_j = \sum_j \left(M^l_{jk} + M^{\Delta l}_{jk}\right), \tag{12.57}$$

iar pentru ecuația de grad de libertate rezultă, similar cu expresia (12.53),

$$R_{il} = -\sum_i \left(M^l_{jk} + M^l_{kj} + M^{\Delta l}_{jk} + M^{\Delta l}_{kj}\right) \psi^{(i)}_{jk} \tag{12.58}$$

b. **Cedare de rezemări.** Introducerea în ecuațiile de condiție a efectului cedărilor de rezemări se face asemănător ca pentru variațiile de lungime ale barelor datorite temperaturii. De data aceasta lungimea barelor rămîne neschimbată, deplasările de noduri provenind de la cedări. Noile poziții ale nodurilor pot fi determinate și în acest caz utilizînd schema articulată a cadrului; pentru cadre cu noduri deplasabile se mențin blocările de grade de libertate introduse în sistemul de bază. Schema articulată rezultă astfel static determinată și aplicarea cedărilor conduce la poziții bine definite ale nodurilor. Rotirile barelor se determină sub forma $\psi_{jk} = \Delta_{jk} / l_{jk}$, folosind deplasările relative Δ_{jk} dintre extremități după normala la axă, stabilite prin corelații geometrice (fig. 191, *f*). Se revine apoi la sistemul de bază, considerînd că trecerea cadrului în noua poziție se face cu noduri blocate contra rotirii (fig. 191, *g*). Momentele de capăt M^c_{jk} și M^c_{kj} produse de rotirea axei barei sînt date de relații similare cu (12.51), iar termenii liberi din ecuațiile de condiție se calculează cu expresiile

$$R_{jc} = -M_j = \sum_j M^c_{jk} \text{ și } R_{ic} = -\sum_i \left(M^c_{jk} + M^c_{kj}\right) \psi^{(i)}_{jk}, \tag{12.59}$$

prima referindu-se la ecuațiile de nod, iar a doua la ecuațiile de grad de libertate.

E. ALTE ASPECTE PRIVITOARE LA METODA DEPLASĂRILOR

1. Cadre cu bare curbe

a. **Caracteristici.** Prezența unor bare curbe în alcătuirea cadrului nu modifică forma generală de aplicare a metodei deplasărilor; trebuie examinate numai unele deosebiri specifice acestor cadre. Aceste deosebiri provin atît de la elementele caracteristice ale barei curbe, ca atare, pentru încărcarea cu sarcini și cu deplasări (alte expresii pentru coeficienți de rigiditate, factori de transmitere etc.), cît și de la faptul că barele curbe modifică numărul gradelor de libertate ale cadrului. Într-adevăr, la bare curbe este caracteristic faptul că intervine o nouă posibilitate de deplasare, anume variația de distanță dintre nodurile de la extremități.

Privitor la numărul gradelor de libertate, s-a arătat în legătură cu figura 176, *g* că posibilitatea variației de distanță dintre extremitățile barei curbe introduce un grad de libertate. În sistemul de bază trebuie deci prevăzută

cîte o blocare în plus pentru fiecare bară curbă, căreia îi corespunde o necunoscută în plus, cît și ecuația de condiție respectivă. Încărcarea sistemului de bază cu o astfel de necunoscută conduce la o deplasare elastică în care intervine variația deschiderii barei curbe.

Cadrul din figura 192, *a* are două grade de libertate: un grad de libertate rezultă prin diferența dintre numărul încastrărilor și al nedeterminărilor ($d = 8 - 7 = 1$), iar al doilea provine de la bara curbă. Se introduc deci blocări contra rotirii în cele trei noduri, de asemenea blocările de grade de libertate h și i. Alegînd pentru acestea din urmă ca parametri rotirile ψ_h și ψ_i ale axelor stîlpilor centrali, rezultă deplasările elastice din figurile 192, *b* și *c*. Ele cuprind atît tendința generală de deplasare laterală a cadrului, cît și cea de variație a deschiderii barei curbe. Aceste două componente ale poziției deformate finale pot fi separate, sub forma a două grade de libertate distincte, utilizînd gruparea de necunoscute. Astfel, admițînd că axele celor doi stîlpi au rotiri egale, de mărime ψ_h, se obține deplasarea elastică din figura 192, *d*, care caracterizează deplasarea laterală a cadrului și în care bara curbă rămîne nedeformată, deoarece deschiderea sa nu variază. Această nouă deplasare elastică reprezintă o grupare a deplasărilor elastice inițiale și poate înlocui pe una dintre ele, anume pe cea din figura 192, *c*. Deplasarea elastică arătată în figura 192, *b*, care caracterizează variația de deschidere a barei curbe, rămîne drept cea de-a doua deplasare distinctă; bineînțeles, mărimea parametrului ψ_i este acum alta.

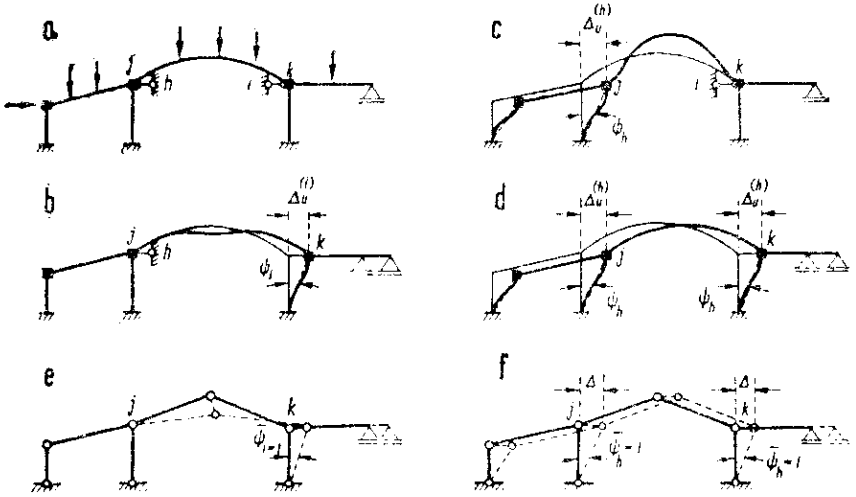


Fig. 192

Corespunzător deplasărilor elastice de grade de libertate, sînt necesare deplasări cinematice pentru exprimarea condiției de echilibru static prin lucru mecanic virtual. Introducerea de articulații în noduri și încastrări, ca la cadre cu bare drepte, conduce la un sistem articulat în care gradul de libertate corespunzător variației deschiderii barei curbe nu are corespondent (aici bara

curbă intervine ca un corp rigid). Mai trebuie deci introdusă o articulaţie, anume pe bara curbă şi de preferinţă la cheie, astfel ca în sistemul articulat să se creeze şi acest grad de libertate. Bara curbă rezultă împărţită în două porţiuni rigide, articulate între ele la cheie; pentru stabilirea corelaţiei dintre rotirile barelor, porţiunile pot fi înlocuite cu bare drepte, ca în figurile 192, *e* şi *f*. Configuraţiile deplasărilor cinematice se aleg aceleaşi ca ale deplasărilor elastice corespunzătoare, ca la cadrele cu bare drepte.

b. Relaţii între eforturi şi deplasări. S-a arătat că la bare curbe pot interveni trei categorii de deplasări: rotiri de nod, rotirea axei barei şi variaţie de distanţă între extremităţi (fig. 193, *a-d*). Vom reţine numai cazul *barelor simetrice*, cuprinse între două noduri ale cadrului sau între un nod şi o extremitate încastrată, deoarece acest caz se întîlneşte în structurile uzuale. Spre deosebire de bara dreaptă dublu încastrată, la care cunoaşterea momentelor de capăt este suficientă pentru trasarea diagramelor de eforturi, la bara curbă dublu încastrată este necesar să se cunoască *trei* eforturi: două dintre acestea vor fi momentele de capăt, iar pentru al treilea se poate folosi fie împingerea *H*, fie momentul de la cheie. Aici se va *considera momentul de la cheie drept cel de-al treilea efort;* această alternativă este mai avantajoasă, deoarece calculul se conduce unitar, numai cu momente.

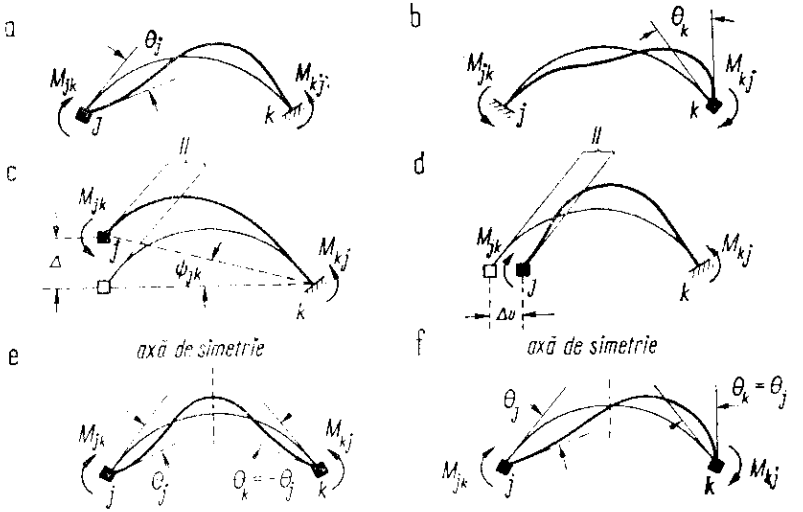


Fig. 193

Pentru sistematizare, se utilizează coeficienţi de rigiditate şi factori de transmitere, în aceeaşi formă ca la barele drepte, asigurînd astfel unitatea de folosire ulterioară în calcul. Rigiditatea barei, la un anumit mod de solicitare, se măsoară în toate cazurile prin efortul care se produce pentru încărcarea cu deplasarea-unitate respectivă. Dacă rigiditatea se pune sub forma $K = 4E\rho$, coeficientul de rigiditate ρ reprezintă efortul datorit încărcării cu o depla-

sare de mărime $1/4\,E$. Rigiditatea şi respectiv coeficientul de rigiditate sînt *cantităţi pozitive;* semnul efortului produs de o deplasare pozitivă trebuie să rezulte din expresia care stabileşte corelaţia lor, sau direct din configuraţia poziţiei deformate corespunzătoare. Factorul de transmitere are *semnul său.*

Cînd o bară curbă *j-k* a sistemului de bază este încărcată *cu sarcini*, se dezvoltă momentele de capăt $\mathfrak{M}_{jk}$ şi $\mathfrak{M}_{kj}$, precum şi momentul la cheie $\mathfrak{M}_c$, pe care le numim *eforturi de încastrare perfectă*. Acestea se calculează ca pentru arcul dublu încastrat, aşa cum s-a arătat în capitolul XI. Pentru încărcare *cu deplasări* trebuie considerate separat cele trei cazuri menţionate mai sus.

(1) *Încărcare cu rotiri de nod*. Impunînd o rotire pozitivă θ_j nodului *j*, respectiv o rotire pozitivă θ_k nodului *k*, rezultă poziţiile deformate din figurile 193, *a* şi *b*, unde s-au indicat sensurile momentelor de capăt. Aceste momente se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} &(\text{nod } j) \quad M_{jk} = 4\,E\rho_{jk}\,\theta_j, \qquad M_{kj} = 4\,E\rho_{jk}\mu_{jk}\,\theta_j, \\ &(\text{nod } k) \quad M_{jk} = 4\,E\rho_{kj}\mu_{kj}\,\theta_k, \quad M_{kj} = 4\,E\rho_{kj}\theta_k, \end{aligned} \tag{12.60}$$

unde este valabilă relaţia de reciprocitate $\rho_{jk}\mu_{jk} = \rho_{kj}\mu_{kj}$, analoagă cu relaţia (12.18). Sensurile momentelor de capăt arată că *la bare curbe factorii de transmitere* μ_{jk} şi μ_{kj} *sînt negativi*, spre deosebire de barele drepte unde sînt pozitivi (v. fig. 180, *e*). Datorită simetriei barei, $\rho_{jk} = \rho_{kj}$ şi $\mu_{jk} = \mu_{kj}$.

Momentul de la cheie poate fi exprimat în funcţie de momentul de capăt de lîngă nodul care se roteşte, folosind un factor de transmitere special

$$(\text{nod } j) \quad M_c = \mu_{jc} M_{jk}, \qquad (\text{nod } k) \quad M_c = \mu_{kc} M_{kj}. \tag{12.61}$$

(2) *Încărcare cu rotire de bară*. Această încărcare intervine rar în aplicaţiile practice, deoarece în alcătuirea cadrelor barele curbe sînt aşezate de obicei pe stîlpi verticali. Admiţînd o rotire pozitivă ψ_{jk} a liniei nodurilor *j-k*, se obţine poziţia deformată din figura 193, *c*, care produce momente de capăt negative. Pentru o bară cuprinsă între două noduri blocate, sau între un nod blocat şi o rezemare încastrată, deformata este antisimetrică şi poate fi obţinută rotind mai întîi bara împreună cu nodurile (ca un corp rigid), apoi impunînd extremităţilor rotirile antiorare $\theta_j = \theta_k = -\psi_{jk}$. Datorită antisimetriei, $M_c = 0$. Momentele de capăt se pot scrie sub forma

$$M_{jk} = -4\,E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk} \quad \text{şi} \quad M_{kj} = -4\,E\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk}, \tag{12.62}$$

unde $\bar{\rho}_{jk} = \bar{\rho}_{kj}$ datorită simetriei barei şi prezenţei încastrărilor perfecte la ambele extremităţi.

(3) *Încărcare cu variaţia deschiderii*. Admiţînd o variaţie pozitivă Δ_u (micşorare de deschidere), rezultă poziţia deformată din figura 193, *d* şi sensurile momentelor de capăt indicate acolo. Folosind şi aici exprimarea cu ajutorul coeficienţilor de rigiditate şi a factorilor de transmitere (notaţi pentru diferenţiere cu simboluri stelate), se poate scrie

$$M_{jk} = 4\,E\rho^*_{jk}\Delta_u, \quad M_{kj} = -4\,E\rho^*_{kj}\Delta_u, \quad M_c = \mu^*_{jc} M_{jk}, \tag{12.63}$$

unde datorită simetriei barei şi a încărcării rezultă $\rho^*_{jk} = \rho^*_{kj}$.

Pe baza cazurilor examinate se pot stabili expresiile generale ale eforturilor M_{jk}, M_{kj} și M_c, considerînd că asupra barei curbe se aplică concomitent încărcarea cu deplasări și cu sarcini. Pentru o bară cuprinsă între două noduri rezultă

$$\begin{aligned} M_{jk} &= 4E(\rho_{jk}\theta_j + \rho_{kj}\mu_{kj}\theta_k - \bar{\rho}_{jk}\psi_{jk} + \rho^*_{jk}\Delta_u) + \mathfrak{M}_{jk}, \\ M_{kj} &= 4E(\rho_{jk}\mu_{jk}\theta_j + \rho_{kj}\theta_k - \bar{\rho}_{kj}\psi_{jk} - \rho^*_{kj}\Delta_u) + \mathfrak{M}_{kj}, \\ M_c &= 4E(\rho_{jk}\mu_{jc}\theta_j + \rho_{kj}\mu_{kc}\theta_k + \rho^*_{jk}\mu^*_{jc}\Delta_u) + \mathfrak{M}_c. \end{aligned} \tag{12.64}$$

Aceste expresii se pot folosi și pentru bare care leagă un nod de o rezemare încastrată, eliminînd termenii care conțin rotirea θ corespunzătoare capătului încastrat.

c. Coeficienți de rigiditate și factori de transmitere. Se procedează în același mod ca pentru barele drepte, rezolvînd prin metoda eforturilor bara curbă simetrică dublu încastrată pentru încărcare cu deplasări, după care se confruntă termen cu termen expresiile rezultate din această rezolvare pentru M_{jk}, M_{kj} și M_c, cu expresiile generale (12.64). Nu este prezentat aici acest studiu, ci sînt date numai rezultatele pentru cazul particular al barei *parabolice* simetrice, spre a putea fi utilizate în aplicații.[1] Notînd $i_c = I_c / l$ (I_c — momentul de inerție la cheie), se obține:

— încărcare cu rotiri de nod

$$\rho_{jk} = \rho_{kj} = 2{,}25\, i_c, \quad \mu_{jk} = \mu_{kj} = -0{,}333, \quad \mu_{jc} = -\mu_{kc} = -0.167;$$

— încărcare cu rotire de bară

$$\bar{\rho}_{jk} = \rho_{kj} = 1{,}5\, i_c; \tag{12.65}$$

— încărcare cu variația deschiderii

$$\rho^*_{jk} = \rho^*_{kj} \quad 1{,}875\, i_c/l, \quad \mu^*_{jc} = -0{,}5.$$

Să se remarce deosebirile dintre aceste valori și cele corespunzătoare barelor drepte.

La cadre cu un număr impar de deschideri, cînd axa de simetrie taie la cheie o bară curbă, în semistructură trebuie utilizați pentru această bară coeficienți de rigiditate și factori de transmitere corectați, analogi celor definiți prin relațiile (12.37) și (12.38) de la bare drepte. Pentru aceasta se consideră cazurile din figurile 193, *e* și *f*, unde bara curbă este încărcată cu *perechi* de rotiri simetrice și antisimetrice date nodurilor de la extremități. Se obține pentru bara parabolică simetrică:

— cînd nodurile se rotesc *simetric* (fig. 193, *e*), $\theta_k = -\theta_j$ și

$$M_{jk} = -M_{kj} = 4E\rho_{jk}(1-\mu_{jk})\theta_j = 4E\rho^s_{jk}\theta_j,$$

$$M_c = 4E\rho_{jk}(\mu_{jc}\theta_j + \mu_{kc}\theta_k) = 8E\rho_{jk}\mu_{jc}\theta_j = 4E\rho^s_{jk}\mu^s_{jc}\theta_j,$$

deci

$$\rho^s_{jk} = 3\, i_c \quad \text{și} \quad \mu^s_{jc} = -0{,}25. \tag{12.66}$$

[1] Pentru studiul complet al barei curbe încărcate cu deplasări, v. S.C-2 (p. 506 — 515).

— cînd nodurile se rotesc *antisimetric* (fig. 193, *f*), $\theta_k = \theta_j$ și

$$M_{jk} = M_{kj} = 4E\rho_{jk}(1+\mu_{jk})\theta_j = 4E\rho^a_{jk}\theta_j, \quad M_c = 0,$$

deci

$$\rho^a_{jk} = 1{,}5\, i_c \quad \text{și} \quad \mu^a_{jc} = 0. \tag{12.67}$$

De remarcat că la bare curbe situația este *inversă* ca la bare drepte, bara apărînd mai rigidă cînd nodurile se rotesc simetric decît atunci cînd se rotesc antisimetric; explicația constă și aici în configurația poziției deformate.

2. Formulare matriceală a metodei deplasărilor

Se urmează o cale similară celei utilizate la formularea matriceală a metodei eforturilor, admițînd că proiectantul preia efectuarea anumitor operații pregătitoare și anume determinarea eforturilor și a deplasărilor din sistemul de bază geometric determinat, cînd acesta este încărcat succesiv cu sarcini și cu fiecare dintre necunoscutele-unitate. În consecință, algoritmul de calcul se va referi la restul rezolvării: calculul coeficienților și al termenilor liberi, formarea și rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție, precum și determinarea momentelor totale de capăt, pe baza cărora se trasează diagrama M a cadrului dat.

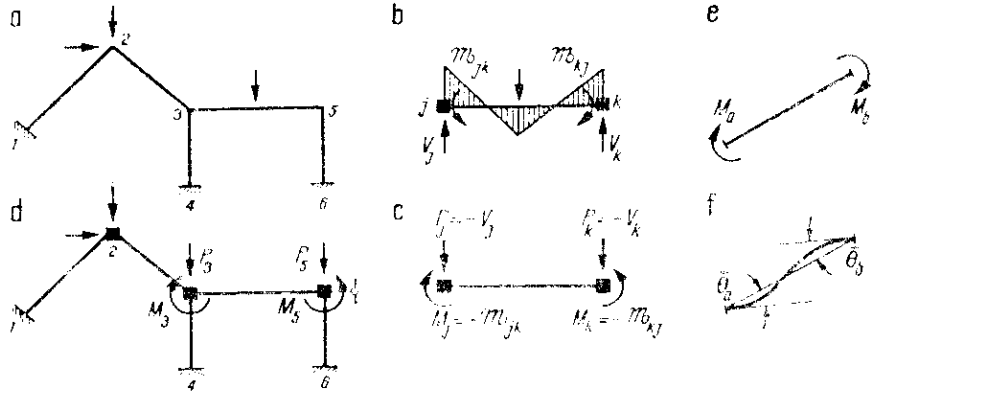


Fig. 194

Pentru simplificare, sarcinile care acționează în cursul barelor structurii se reduc *la noduri*, aplicînd asupra acestora *inversele* eforturilor de încastrare perfectă ce apar la extremitățile barelor respective în sistemul de bază. Astfel, pentru cadrul din figura 194, *a*, la care în cursul barei *j-k* acționează sarcini, se determină momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$, precum și reacțiunile V_j și V_k, corespunzătoare barei dublu încastrate (fig. 194, *b*); inversele

acestora reprezintă acțiunile asupra nodurilor (fig. 194, *c*) și ele urmează a se aplica sub formă de forțe exterioare echivalente pe sistemul de bază (fig. 194, *d*).

Prin aceasta, cadrul rezultă încărcat numai cu forțe exterioare aplicate în noduri și se rezolvă ca atare. Înseamnă că momentele de capăt astfel obținute oglindesc numai efectul deplasărilor nodurilor cînd structura trece în poziția de echilibru elastic. În consecință, pentru barele la care s-a făcut reducerea sarcinilor la noduri, la sfîrșitul calculului urmează să se suprapună — peste momentele de capăt rezultate — și momentele de încastrare perfectă inițiale.

Încărcînd sistemul de bază cu necunoscutele-deplasări $Z_1=1,\ldots,Z_n=1$, care sînt rotiri de nod sau parametri de grad de libertate, rezultă diagramele unitare $m_{x1},\ldots,m_{xn}$ și deci diagrama totală de momente încovoietoare are forma

$$M_x = m_{x1}X_1 + \ldots + m_{xi}X_i + \ldots + m_{xn}X_n, \tag{12.68}$$

unde nu există termen liber deoarece sarcinile sînt aplicate numai la noduri. Această diagramă corespunde situației de echilibru elastic a structurii, pentru care reacțiunile totale din blocări sînt nule și deci nu mai intervin în calcul.

În specificul metodei deplasărilor, ecuațiile de condiție se obțin exprimînd echilibrul static care se realizează în poziția deformată a structurii între sarcinile aplicate la noduri și forțele interioare corespunzătoare. Calea generală de exprimare constă în utilizarea principiului lucrului mecanic virtual sub forma

$$L_s + L_{int} = 0, \quad \text{sau} \quad L_s = -L_{int} = L_{ef},$$

unde s-a ținut seama de relația generală (8.4').

Spre deosebire de modul cum s-a alcătuit sistemul (12.39), unde ecuațiile de nod au fost obținute prin sumare de momente în jurul nodurilor, iar ecuațiile de grad de libertate — prin utilizarea de deplasări virtuale cinematice date schemei articulate a cadrului, aici toate ecuațiile vor fi scrise în mod unitar prin deplasări virtuale. Drept configurații ale acestora, se utilizează *pozițiile deformate* ale sistemului de bază ce rezultă încărcîndu-l succesiv cu $\bar{Z}_1=1,\ldots,\bar{Z}_n=1$. Înseamnă că aceleași deformate intervin în calcul în două semnificații diferite: o dată drept componente ale deformatei finale, corespunzătoare diagramelor unitare $m_{x1},\ldots,m_{xn}$, apoi ca deplasări virtuale. Avantajul constă în utilizarea acelorași elemente, însă în accepții diferite.

Rămîne să se evalueze L_s și L_{ef}.

(1) *Lucrul mecanic al sarcinilor.* Sarcinile $P_1,\ldots,P_m,\ldots,P_p$ (care pot fi forțe sau momente) parcurg pe direcțiile lor deplasările $\delta_1\ldots,\delta_m,\ldots,\delta_p$ produse de către fiecare încărcare cu $\bar{Z}_1,\ldots,\bar{Z}_n$. În general, se pot forma următoarele matrice:

$$\begin{matrix} & & \bar{Z}_1=1 & & \bar{Z}_i=1 & & \bar{Z}_n=1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_m \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_s=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1i} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{m1} & \cdots & \delta_{mi} & \cdots & \delta_{mn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{p1} & \cdots & \delta_{pi} & \cdots & \delta_{pn} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}=\begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \bar{Z}_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bar{Z}_n \end{bmatrix}, \tag{12.69}$$

unde $\mathbf{P}$ este matricea-coloană a componentelor sarcinilor aplicate în noduri, iar matricea $\boldsymbol{\delta}_s$ cuprinde în fiecare coloană deplasările pe direcțiile componen-

telor respective, date de către una dintre deplasările virtuale. Cînd sarcinile reduse la noduri s-ar aplica numai pe direcțiile necunoscutelor $Z_1,\ldots,Z_n$, atunci indicii $l,\ldots p$ se confundă cu $1,\ldots n$ și matricea $\boldsymbol{\delta}_s$ devine diagonală.

Matricea $\bar{\mathbf{D}}$ cuprinde mărimile deplasărilor virtuale considerate; deoarece acestea urmează a fi impuse succesiv, cantitățile $\bar{Z}_1,\ldots\bar{Z}_n$ au fost dispuse pe diagonală. Pentru mărimi $\bar{Z}$ arbitrare, deplasările pe direcțiile sarcinilor sînt

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{\delta}_s\bar{\mathbf{D}} \quad \text{și deci} \quad L_{ext}=\bar{\boldsymbol{\delta}}^T\mathbf{P}=\bar{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}, \tag{12.70}$$

unde în expresia lucrului mecanic virtual matricea $\boldsymbol{\delta}_s$ apare transpusă.

(2) *Lucrul mecanic al eforturilor*. Considerînd numai efectul momentelor încovoietoare, lucrul virtual al eforturilor dat de expresia (8.4′) se scrie

$$-L_i=L_{ef}=\int M_x\,d\bar{\theta},$$

unde M_x se referă la diagrama totală de momente încovoietoare dată de relația (12.68), iar $d\bar{\theta}$ este deformarea elementului curent ds al structurii datorită deplasării virtuale considerate.

Procedînd asemănător ca la stabilirea relației (8.35), în care integrarea lucrului mecanic elementar în lungul unei bare a fost înlocuită prin lucrul virtual al eforturilor de capăt, se obține

$$\int M_x\,d\bar{\theta}=\sum_1^b\,(M_a\bar{\theta}_a+M_b\bar{\theta}_b),$$

unde M_a și M_b reprezintă momentele totale din extremitățile barei curente (fig. 194, *e*), iar $\bar{\theta}_a$ și $\bar{\theta}_b$ sînt rotirile în deplasarea virtuală (fig. 194, *f*) a extremităților barei, față de linia ce unește capetele acesteia în poziția deformată.

Se poate deci scrie asemănător ca în relația (12.70)

$$L_{ef}=\int M_x d\bar{\theta}=\bar{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{M}=\bar{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{M}, \tag{12.71}$$

unde s-au utilizat următoarele matrice:

$$\bar{Z}_1=1\quad \bar{Z}_i=1\quad \bar{Z}_n=1$$

$$\boldsymbol{\theta}_b=\begin{bmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1i} & \cdots & \theta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \theta_{h1} & \cdots & \theta_{hi} & \cdots & \theta_{hn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \theta_{b1} & \cdots & \theta_{bi} & \cdots & \theta_{bn} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_h \\ \vdots \\ M_b \end{bmatrix},$$

$$\theta_{hi}=\begin{bmatrix} \theta_{ah}^{(i)} \\ \theta_{bh}^{(i)} \end{bmatrix},\qquad M_h=\begin{bmatrix} M_{ah} \\ M_{bh} \end{bmatrix},$$

la care fiecare element reprezintă de fapt o matrice-coloană cu două elemente, corespunzătoare celor două extremități ale barei respective, cum se arată pentru elementele θ_{hi} și M_h. Matricea $\boldsymbol{\theta}_b$ are dimensiuni $(2b.n)$ și conține în coloane succesive rotirile din extremitățile tuturor barelor structurii, pentru fiecare dintre deplasările virtuale $\bar{Z}_1=1,\ldots,\bar{Z}_n=1$. Pentru mărimi arbitrare $\bar{Z}_1,\ldots,\bar{Z}_n$, rotirile extremităților sînt cuprinse în matricea $\bar{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}_b\bar{\mathbf{D}}$, unde $\bar{\mathbf{D}}$ este matricea diagonală definită în (12.69).

Matricea **M** cuprinde momentele totale din extremităţile barelor şi pe baza relaţiei (12.68) se poate scrie

$$\mathbf{M}=\mathbf{mZ}, \text{ unde} \tag{12.72}$$

$$\mathbf{m}=\begin{matrix}Z_1=1 & Z_i=1 & Z_n=1\end{matrix}\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{h1} & \cdots & m_{hi} & \cdots & m_{hn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{b1} & \cdots & m_{bi} & \cdots & m_{bn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}=\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad m_{hi}=\begin{bmatrix} m_{ah}^{(i)} \\ m_{bh}^{(i)} \end{bmatrix}.$$

În matricea **m**, care are dimensiuni $(2b.n)$, apar în fiecare coloană ordonatele din extremităţile barelor pentru cîte una dintre diagramele unitare $m_{x1},\ldots,$ m_{xn}. De fapt, trasarea acestor diagrame nu este necesară, deoarece perechile de ordonate m_{hi} se pot citi direct pe deformatele date de $Z_1=1,\ldots,Z_n=1$, utilizînd expresiile binecunoscute în funcţie de ρ' şi $\bar{\rho}'$. Introducînd pe **M** sub forma **mZ** în relaţia (12.71), se obţine

$$L_{ef}=\bar{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{mZ}. \tag{12.73}$$

Egalînd expresiile (12.70) şi (12.73), condiţia de echilibru static devine

$$\bar{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}=\bar{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{mZ}, \text{ sau } \boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}=\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{mZ},$$

unde s-a admis că matricea diagonală $\bar{\mathbf{D}}$ este o matrice unitară; se obţine

$$\mathbf{Z}=(\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{m})^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}, \tag{12.74}$$

care dă matricea-coloană a necunoscutelor direct în funcţie de matricea-coloană **P** a sarcinilor aplicate în noduri. Structura produsului matriceal este $(n.2b)(2b.n)(n.p)(p.1)=(n.1)$. Dacă se compară cu forma generală a sistemului ecuaţiilor de condiţie din metoda deplasărilor (12.39), anume

$$\mathbf{rZ}+\mathbf{R}_s=0, \text{ rezultă } \mathbf{r}=\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{m} \text{ şi } \mathbf{R}_s=-\boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}, \tag{12.75}$$

expresii cu care se pot alcătui direct aceste două matrice.

Odată cunoscute valorile $Z_1,\ldots Z_n$, se poate trece la stabilirea momentelor finale de capăt corespunzătoare sarcinilor date sub forma matricei coloană

$$\mathbf{M}_{final}=\mathfrak{M}+\mathbf{mZ}=\mathfrak{M}+\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{m})^{-1}\boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}, \tag{12.76}$$

unde matricea-coloană $\mathfrak{M}$, de dimensiuni $(2b.1)$, conţine momentele de încastrare perfectă datorite sarcinilor aplicate în cursul barelor; acestea au fost calculate cu ocazia reducerii sarcinilor la noduri, cum s-a arătat în legătură cu figura 194, *c*.

Examinarea relaţiei (12.76) arată că întreaga rezolvare necesită — în afară de matricele iniţiale **P** şi $\mathfrak{M}$, care provin de la stabilirea sarcinilor aplicate la noduri — alcătuirea a trei matrice şi anume **m**, $\boldsymbol{\theta}_b$ şi $\boldsymbol{\delta}_s$, toate conţinînd elemente ce rezultă din încărcarea succesivă a sistemului de bază cu necunoscutele-unitate $Z_1=1,\ldots,Z_n=1$, prima referindu-se la diagramele unitare şi celelalte două la deformatele respective.

Schema logică a procedeului este dată în figura 195.

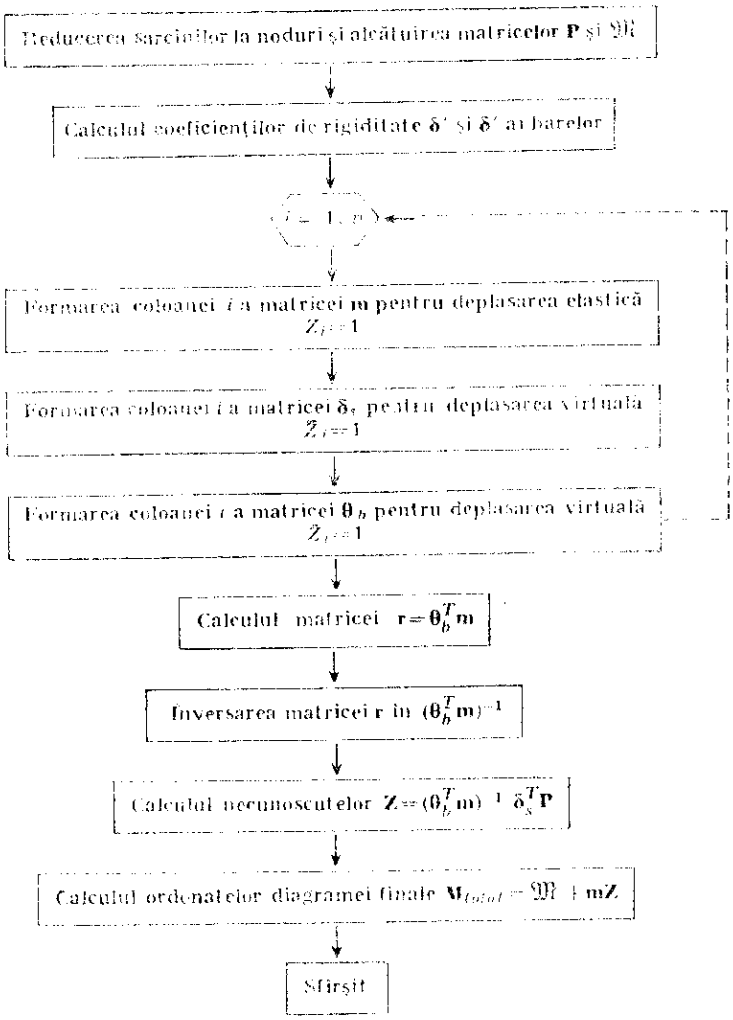


Fig. 195 Schema logică de aplicare a metodei deplasărilor.

Pentru exemplificare, se reia cadrul din figura 189, încărcat cu sarcină uniform distribuită pe prima deschidere; se utilizează datele stabilite acolo. Prin reducerea sarcinilor la noduri, apar forțe verticale de mărime $P_2 = 6$ kN și $P_3 = 3$ kN, precum și momente exterioare $M_2 = -(\mathfrak{M}_{21} + \mathfrak{M}_{23}) = 0$ și $M_3 = -\mathfrak{M}_{32} = -3$ kNm aplicate în nodurile *2* și *3*.

Sînt trei necunoscute Z_2, Z_3 și Z_4. Deformatele elastice date de încărcarea succesivă a sistemului de bază cu $Z_2 = 1$, $Z_3 = 1$ și $Z_4 = 1$, cît și deplasările virtuale corespunzătoare $\bar{Z}_2 = 1$, $\bar{Z}_3 = 1$ și $\bar{Z}_4 = 1$, au aceleași configurații. Primele două deformate nu au mai fost reprezentate în figura 189, deoarece imaginea lor apare evidentă prin rotirea nodurilor *2* sau *3*; deformata corespunzătoare gradului de libertate se vede în figura 189, *d*, unde sînt date și rotirile axelor barelor.

Referitor la sarcinile aplicate în noduri și la deplasările pe direcțiile lor, provenite din cele trei deplasări virtuale impuse sistemului de bază, se alcătuiesc matricele $\mathbf{P}$ și $\boldsymbol{\delta}_s$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}6\\0\\0\\3\\0\\-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\}\\\}\\\}\end{matrix}\begin{matrix}nod\ 2\\,\\nod\ 3\end{matrix}\qquad \boldsymbol{\delta}_s=\begin{matrix}\bar{Z}_2=1 & \bar{Z}_3=1 & \bar{Z}_4=1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&2\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\\0&1&0\end{bmatrix}$$

în care grupele de câte trei rînduri se referă la nodurile 2 și 3. La fiecare nod s-au considerat în ordine următoarele componente ale sarcinilor, respectiv deplasări de noduri: pe verticală (pozitiv în jos), pe orizontală (pozitiv spre dreapta), moment sau rotire (pozitiv în sens orar).

S-a trecut apoi la formarea matricelor $\mathbf{m}$ și $\boldsymbol{\theta}_b$, considerînd succesiunea barelor în ordinea și sensurile de parcurgere $1\to2$, $2\to3$, $3\to4$ și $3\to5$. Pentru momentele de capăt datorite deplasărilor elastice $Z_2=1$, $Z_3=1$ și $Z_4=1$, s-au utilizat expresiile cunoscute:

— rotire de nod pozitivă în capătul j $m_{jk}=\rho'_{jk}$ și $m_{kj}=\rho'_{jk}\,\mu_{jk}$,

— rotire de bară pozitivă $m_{jk}=-\bar{\rho}'_{jk}\,\psi_{jk}$ și $m_{kj}=-\bar{\rho}'_{kj}\,\psi_{jk}$.

unde coeficienții de rigiditate ρ' și $\bar{\rho}'$ s-au luat din tabelă. În matricea $\boldsymbol{\theta}_b$ s-au înscris rotirile extremităților de bare față de linia nodurilor; semnul rotirii rezultă considerînd trecerea de la tangentă la linia extremităților în poziția deformată. Tot corespunzător extremităților de bare intervine și matricea $\mathfrak{M}$ a momentelor de încastrare perfectă. Aceste trei matrice sînt:

$$\mathbf{m}=\begin{matrix}Z_2=1 & Z_3=1 & Z_4=1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0{,}5&0&-1\\1&0&-1\\1&0{,}5&1\\0{,}5&1&1\\0&0{,}839&-0{,}259\\0&0{,}120&-0{,}259\\0&0{,}839&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\}\\\}\\\}\\\}\end{matrix}\qquad \boldsymbol{\theta}_b=\begin{matrix}\bar{Z}_2=1 & \bar{Z}_3=1 & \bar{Z}_4=1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0&0&-0{,}667\\1&0&-0{,}667\\1&0&0{,}667\\0&1&0{,}667\\0&1&-1\\0&0&-1\\0&1&0\\0&-0{,}5&0\end{bmatrix},\qquad \mathfrak{M}=\begin{bmatrix}-3\\+3\\-3\\+3\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

unde fiecare pereche de rînduri corespunde extremităților câte uneia dintre bare.

În continuare, s-au calculat următoarele matrice:

$$\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{m}=\begin{bmatrix}2&0{,}5&0\\0{,}5&2{,}678&-0{,}259\\0&-0{,}259&5{,}186\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0\\-3\\24\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}-7{,}50\\-1{,}11\\+1{,}41\\+6{,}97\\-6{,}37\\-6{,}06\\-0{,}60\\0\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{m})^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}525&-0{,}098&-0{,}005\\-0{,}098&0{,}395&0{,}020\\-0{,}005&0{,}020&0{,}194\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0{,}176\\-0{,}705\\4{,}598\end{bmatrix},\qquad \mathbf{M}_{total}=$$

care reprezintă în ordine matricea $\mathbf{r}=\boldsymbol{\theta}_b^T\mathbf{m}$ a coeficienților din sistemul ecuațiilor de condiție, precum și inversa acestei matrice, apoi matricea termenilor liberi $-\mathbf{R}_s=\boldsymbol{\delta}_s^T\mathbf{P}$ și matricea necunoscutelor $\mathbf{Z}$ dată de relația (12.74), după care s-au determinat ordonatele finale din extremitățile barelor cuprinse în matricea $\mathbf{M}_{total}=\mathfrak{M}+\mathbf{mZ}$.

Se constată că s-au regăsit rezultatele obținute la rezolvarea făcută în legătură cu figura 189.

F. SINTEZA METODELOR GENERALE

1. Paralelismul celor două metode

Acum, cînd sînt cunoscute orientarea şi specificul ambelor metode generale pentru rezolvarea structurilor statice nedeterminate, este util să fie examinate trăsăturile caracteristice ale acestora, care scot în evidenţă un paralelism complet. În consecinţă, din punct de vedere teoretic devine posibil să se desprindă o concepţie unitară pentru abordarea structurilor statice nedeterminate, iar din punct de vedere practic se poate stabili o metodă de rezolvare care preia elemente din ambele metode generale, devenind avantajoasă pentru anumite structuri, prin reducerea numărului de necunoscute.

Examinarea comparativă are la bază modul de utilizare a condiţiilor ce definesc situaţia de echilibru elastic a structurii, anume condiţia de echilibru static şi condiţia de compatibilitate a poziţiei deformate. Pentru claritate, se reamintesc trăsăturile caracteristice ale metodelor, cu indicarea specificului lor, precum şi posibilitatea formulării fără să mai intervină acest specific.

(a) *Metoda generală a eforturilor:*

— Sistemul de bază se obţine suprimînd legături din structura dată pînă se ajunge la un sistem cu rezolvare cunoscută (obişnuit static determinat); prin această suprimare de legături ne îndepărtăm de la condiţia de compatibilitate a poziţiei deformate reale.

— Necunoscutele problemei sînt forţele de legătură din legăturile suprimate (eforturi).

— Ecuaţiile de condiţie exprimă restabilirea condiţiei de compatibilitate, anume că sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini şi necunoscute se deformează identic cu structura dată (deplasări nule pe direcţiile legăturilor suprimate).

(b) *Metoda generală a deplasărilor:*

— Sistemul de bază se obţine adăugînd legături fictive în structura dată, pînă se ajunge la un sistem cu rezolvare cunoscută (obişnuit geometric determinat); prin această adăugare de legături ne îndepărtăm de la condiţia de echilibru static real a structurii, în sensul că alături de forţe reale intervin şi forţe fictive.

— Necunoscutele problemei sînt deplasări (rotiri de nod şi parametri de grad de libertate elastică).

— Ecuaţiile de condiţie exprimă restabilirea condiţiei de echilibru static real, anume că pentru sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini şi necunoscute, reacţiunile din legăturile fictive sînt nule.

(c) *Sinteza metodelor generale:*

— Sistemul de bază se obţine prin modificare de legături în structura dată, pînă se ajunge la un sistem cu rezolvare cunoscută; prin această modificare

de legături ne îndepărtăm de la condițiile care caracterizează situația reală de echilibru elastic a structurii.

— Necunoscutele problemei sînt acele cantități diferite de zero în structura dată, care devin nule în sistemul de bază prin modificarea legăturilor.

— Ecuațiile de condiție exprimă că, pentru sistemul de bază încărcat concomitent cu sarcini și necunoscute, sînt restabilite condițiile ce caracterizează situația reală de echilibru elastic a structurii.

Se ajunge la concluzia că este posibil să se formuleze o concepție generală unică pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate, din care să se deducă apoi — drept cazuri particulare — cele două metode generale cunoscute[1]. Totodată, apare firesc să se adauge metodelor generale și o *metodă mixtă*, care utilizează drept necunoscute atît eforturi, cît și deplasări.

2. Metoda mixtă

Se întîlnesc uneori cadre cu o alcătuire variată, la care examinarea diferitelor porțiuni conduce la indicații diferite privind metoda avantajoasă de rezolvare. Astfel, la structura din figura 196, *a* considerată în ansamblu,

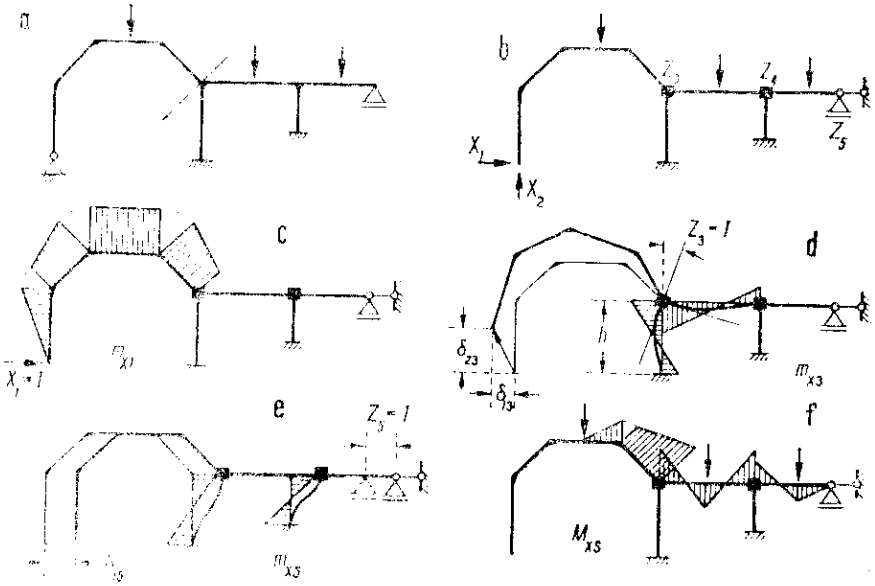


Fig. 196

metoda eforturilor ar necesita introducerea a șase necunoscute și metoda deplasărilor — a opt necunoscute (5 noduri + 3 grade de libertate). Făcînd examinarea pe porțiunile delimitate convențional prin linia punctată, se obțin 2 + 4 = 6

[1] O asemenea formulare generală a concepției de rezolvare a structurilor static nedeterminate este dată în capitolul III din S.C-2.

necunoscute în metoda eforturilor și $5+3=8$ necunoscute în metoda deplasărilor. După porțiunea din stînga ar fi deci preferabilă metoda eforturilor, iar după porțiunea din dreapta — metoda deplasărilor.

Există posibilitatea de a rezolva cadrul dat numai cu $2+3=5$ necunoscute, dacă se recurge la metoda mixtă (propusă de A. A. Gvozdev). Trecerea la sistemul de bază se face prin modificare de legături; se suprimă legăturile care formează articulația din stînga, înlocuindu-le cu necunoscutele-eforturi X_1 și X_2, apoi se blochează cele două noduri și gradul de libertate al porțiunii din dreapta, punînd în evidență necunoscutele-deplasări Z_3, Z_4 și Z_5. Sistemul de bază obținut se vede în figura 196, *b* și are rezolvare cunoscută, în sensul că se pot trasa diagramele unitare m_{x_1}, m_{x_2}, ... corespunzătoare necunoscutelor, precum și diagrama M_{xs} dată de sarcini, atît pentru partea din stînga static determinată, cît și pentru partea din dreapta care are legături complete.

Procedînd în acest mod, ansamblul sistemului de bază rămîne static nedeterminat și geometric nedeterminat, dar fiecare dintre aceste caracterizări este valabilă numai pentru cîte o parte a sistemului. Trecerea la sistemul de bază reprezintă o îndepărtare atît de la condiția de compatibilitate, cît și de la condiția de echilibru static. Necunoscutele care intervin au natură diferită: unele sînt eforturi, altele sînt deplasări. Înseamnă că și ecuațiile de condiție vor fi de natură diferită: încărcînd concomitent sistemul de bază cu sarcini și necunoscute, unele ecuații vor exprima restabilirea condiției de compatibilitate sub forma $\Delta=0$, aplicată acolo unde s-au suprimat legături, iar celelalte vor exprima restabilirea condiției de echilibru static sub forma $R=0$, acolo unde s-au introdus legături fictive.

Notînd cu X_1, ..., X_p necunoscutele-eforturi (necunoscută curentă X_i) și cu Z_q, ..., Z_n necunoscutele-deplasări (necunoscută curentă Z_j), forma generală a ecuațiilor din prima categorie este

$$\Delta_i=\delta_{i1}X_1+\ldots+\delta_{ii}X_i+\ldots+\delta_{ip}X_p+\delta_{iq}Z_q+\ldots+\delta_{in}Z_n+\Delta_{is}=0,$$

iar a ecuațiilor din a doua categorie (12.77)

$$R_j=r_{j1}X_1+\ldots+r_{jp}X_p+r_{jq}Z_q+\ldots+r_{jj}Z_j+\ldots+r_{jn}Z_n+R_{js}=0.$$

Toți termenii din primul grup de ecuații sînt *deplasări*; astfel, δ_{ip} este deplasarea pe direcția legăturii suprimate i, cînd sistemul de bază se încarcă cu necunoscuta-efort $X_p=1$, în timp ce δ_{iq} este deplasarea pe direcția aceleiași legături, cînd sistemul de bază se încarcă cu necunoscuta-deplasare $Z_q=1$. Asemănător, toți termenii din al doilea grup de ecuații sînt *reacțiuni*; astfel, r_{jp} reprezintă reacțiunea din blocarea j produsă de încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta-efort $X_p=1$, în timp ce r_{jq} reprezintă reacțiunea din aceeași blocare produsă de încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta-deplasare $Z_q=1$.

Coeficienții principali din primul grup de ecuații, de forma δ_{ii}, sînt similari cu cei din metoda eforturilor, iar coeficienții principali din al doilea grup de ecuații, de forma r_{jj}, sînt similari celor din metoda deplasărilor. În ceea ce privește coeficienții secundari, se pot distinge *trei* categorii, dintre care una este specifică metodei mixte:

— Coeficienți la care ambii indici se referă la necunoscute din prima categorie; aceștia sînt similari celor din metoda eforturilor și satisfac relația de reciprocitate dintre deplasări unitare $\delta_{ij}=\delta_{ji}$.

— Coeficienți la care ambii indici se referă la necunoscute din a doua categorie; aceștia sînt similari celor din metoda deplasărilor și satisfac relația de reciprocitate dintre reacțiuni unitare $r_{jn}=r_{nj}$.

— Coeficienți la care cei doi indici se referă la necunoscute din categorii diferite. De exemplu, δ_{ij} reprezintă deplasarea pe direcția legăturii suprimate i, produsă de încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta-deplasare $Z_j=1$, în timp ce r_{ji} reprezintă reacțiunea din blocarea j, cînd sistemul de bază se încarcă cu necunoscuta-efort $X_i=1$. Acești coeficienți satisfac relația de reciprocitate dintre reacțiuni unitare și deplasări unitare $r_{ji}=-\delta_{ij}$.

Pentru evaluarea coeficienților și a termenilor liberi se consideră sistemul de bază încărcat succesiv cu fiecare necunoscută-unitate și cu sarcini. Astfel, în figurile 196, *c-f* s-au arătat cazurile de încărcare cu necunoscutele $X_1=1$, $Z_3=1$, $Z_5=1$ și cu sarcinile date. Datorită specificului sistemului de bază din metoda mixtă, efectele date de asemenea încărcări se limitează de obicei la cîte una dintre porțiuni. De observat că, pentru cazurile de încărcare cu $Z_3=1$ și $Z_5=1$, este antrenată și porțiunea în consolă într-o deplasare cinematică. Aceasta intervine la calculul coeficienților secundari specifici metodei mixte. Astfel, coeficientul $r_{31}=h$ reprezintă momentul de capăt pe extremitatea de lîngă blocarea *3* a porțiunii în consolă, produs de încărcarea cu $X_1=1$, în timp ce coeficientul $\delta_{13}=-h$ reprezintă[1] proiecția pe orizontală a deplasării extremității din stînga pentru încărcarea cu $Z_3=1$. Asemănător, coeficientul $r_{51}=-1$ reprezintă reacțiunea din blocarea 5 produsă de încărcarea cu $X_1=1$, în timp ce coeficientul $\delta_{15}=1$ reprezintă deplasarea pe orizontală a extremității din stînga pentru încărcarea cu $Z_5=1$. Mai mulți coeficienți sînt nuli $r_{41}=-\delta_{14}$, $r_{42}=-\delta_{24}$, $r_{52}=-\delta_{25}$.

După rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție, diagrama totală de momente încovoietoare se trasează efectuînd suprapunerea

$$M_x=M_{xs}+\sum X_i m_{xi}+\sum Z_j m_{xj},$$

unde intervin diagramele unitare corespunzătoare necunoscutelor.

[1] Semnul „minus" provine de la faptul că deplasarea se produce în sens contrar celui al necunoscutei X_1.

CAPITOLUL XIII

FORME SISTEMATIZATE DE APLICARE A METODEI DEPLASĂRILOR

A. PROCEDEE ITERATIVE PENTRU CALCULUL CADRELOR CU NODURI FIXE

1. Generalități

La calculul cadrelor mai complicate, dificultatea principală constă în rezolvarea ecuațiilor de condiție. Deși în metoda deplasărilor numărul necunoscutelor este de obicei mai redus la asemenea structuri decît în metoda eforturilor, totuși problema rezolvării ecuațiilor rămîne pe primul plan. Mult timp această problemă a frînat introducerea în practica proiectării a metodelor de calcul pentru structuri multiplu static nedeterminate, deoarece proiectanții evită în genere să recurgă prin calcul manual la rezolvarea de sisteme cu ecuații numeroase, care implică operații laborioase ce favorizează comiterea de erori. În consecință, lărgirea domeniului de aplicare practică a metodelor generale de calcul a depins în mare măsură de posibilitatea unei rezolvări mai simple a ecuațiilor de condiție.

Rezolvarea prin iterație (aproximații succesive) prezintă avantaje vădite, cînd sînt îndeplinite condițiile ce asigură o rapiditate satisfăcătoare a convergenței. Procedeul permite o sistematizare deosebită și conduce la organizarea rezolvării pe scheme de calcul, cu folosirea unor elemente ușor de determinat. Faptul că în metoda deplasărilor se pot stabili expresii generale pentru coeficienții și termenii liberi din ecuațiile de condiție, cum s-a arătat în capitolul precedent, elimină necesitatea de a mai scrie explicit aceste ecuații la fiecare caz concret în parte; este posibil să se stabilească direct elementele necesare pentru alcătuirea schemei de calcul.

Este interesant de arătat că unele procedee iterative pentru rezolvarea cadrelor cu noduri fixe au apărut fără legătură directă cu ecuațiile de condiție din metoda generală a deplasărilor, care — în forma sa actuală — s-a închegat mai tîrziu. Pornind de la constatarea că, pentru structuri cu noduri rigide, se poate defini poziția deformată în funcție de deplasările nodurilor, s-a ajuns în mod firesc la ideea de a considera ca punct de plecare situația structurii cu toate nodurile blocate contra rotirii. S-a trecut apoi la cercetarea separată a efectului acestor rotiri, ceea ce a condus la considerarea unor deblocări succesive de noduri pînă se ajunge la situația de echilibru a structurii cu noduri libere. Pe baza acestei interpretări fizice, s-au înregistrat efectele produse în structură de fiecare deblocare parțială, astfel că mărimile finale ale rotirilor de nod sau ale eforturilor au rezultat sub forma sumei unui șir convergent de termeni. Ulterior, s-a arătat că acest mod de a proceda reprezintă de fapt rezolvarea prin iterație a sistemului ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor.

Un moment important în dezvoltarea metodelor iterative de calcul la structuri statice nedeterminate, l-a constituit apariția în anul 1932 a metodei „distribuției momentelor" (metoda Cross) pentru rezolvarea cadrelor cu noduri fixe alcătuite din bare cu secțiune constantă. Metoda era bazată exclusiv pe interpretarea fizică a trecerii structurii de la poziția inițială cu noduri blocate contra rotirii la poziția finală cu noduri libere, folosind deblocări succesive de noduri. Meritul metodei constă în modul de organizare a schemei de calcul, chiar pe schema cadrului, cu efectuarea repetată a unor operații simple și clare. Caracterul practic ingineresc al metodei i-a asigurat o largă răspîndire și totodată a deschis drumul pentru elaborarea altor procedee și variante îmbunătățite, care simplifică și mai mult calculul.

2. Rezolvarea prin iterație a ecuațiilor de condiție

a. **Semnificația rezolvării prin iterație.** Ecuațiile de condiție ale cadrelor cu noduri fixe, scrise prin metoda deplasărilor, au avantajul de a putea fi rezolvate prin iterație (aproximații succesive); aceasta revine la a calcula valoarea finală a fiecărei necunoscute cu ajutorul sumei unui șir de termeni. Astfel, mărimea unei necunoscute Z_j se obține sub forma

$$Z_j = Z_j^{(1)} + \Delta Z_j^{(2)} + \ldots + \Delta Z_j^{(i)} + \ldots,$$

unde primul termen reprezintă o valoare în primă aproximație, iar ceilalți termeni sînt corecții succesive.

Desigur, procedeul poate fi utilizat cînd corecțiile succesive rezultă din ce în ce mai mici, deci cînd șirul termenilor este convergent, și devine eficient practic cînd mărimile corecțiilor succesive scad repede, asigurînd o rapiditate satisfăcătoare a convergenței. În acest mod, valoarea finală a unei necunoscute rezultă din sumarea unui număr redus de termeni, ceilalți fiind neglijabili deoarece rămîn sub un anumit grad de aproximație, stabilit în prealabil.

Convergența șirului corecțiilor depinde numai de coeficienții necunoscutelor din ecuațiile de condiție, fiind independentă de mărimile termenilor liberi; cu alte cuvinte, convergența depinde numai de modul cum se reflectă în ecuații structura considerată și nu de sarcinile aplicate. Cercetarea convergenței trebuie să pornească de la ansamblul ecuațiilor de condiție, caracterizat prin determinantul principal care conține toți coeficienții, și poate fi făcută sub formă mai generală, referindu-se atît la ecuațiile de condiție din metoda eforturilor, cît și la ecuațiile de condiție din metoda deplasărilor. Nu se va intra în discuția acestei probleme, arătîndu-se numai concluziile.

O proprietate esențială este că, pentru ecuațiile de condiție folosite în ambele metode generale, determinantul principal al coeficienților și toți minorii principali sînt *pozitivi*, oricare ar fi structura considerată. Aceasta are consecințe importante, deoarece s-a demonstrat că la un sistem de ecuații liniare, a cărui matrice a coeficienților este simetrică față de diagonala principală și definită pozitiv ($D>0$), este totdeauna asigurată convergența iterației cînd aceasta este condusă folosind rezolvarea succesivă a ecuațiilor, cum se va arăta mai

departe. Se dispune astfel de un criteriu general de convergență, care este îndeplinit de ecuațiile de condiție folosite în Statica construcțiilor.

Din punct de vedere practic, acest criteriu nu este suficient, deoarece nu asigură și o rapiditate satisfăcătoare a convergenței. În consecință, este necesar să se dispună și de criterii mai restrînse. Obișnuit, se folosește în acest scop criteriul lui *Willmeyer*, care cere ca în *fiecare ecuație* să fie satisfăcută condiția

$$|r_{jj}| > \sum_{k=1}^{n} |r_{jk}|, \quad (k \neq j), \tag{13.1}$$

deci valoarea absolută a coeficientului principal să fie mai mare decît suma valorilor absolute a tuturor celorlalți coeficienți. Convergența este cu atît mai bună, cu cît inegalitatea este mai accentuată.

La cadre cu noduri fixe, acest criteriu este îndeplinit în bune condiții. Pornind de la ecuațiile de condiție de forma

$$r_{j1}Z_1 + \ldots + r_{jj}Z_j + \ldots + r_{jn}Z_n + R_{js} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

și ținînd seama de expresiile (12.33) ale coeficienților principali și secundari, care sînt

$$r_{jj} = \sum_{j} \rho'_{jk} = \rho'_j \text{ și } r_{jk} = \rho'_{kj}\mu_{kj} = \rho'_{jk}\mu_{jk},$$

se poate controla cu ajutorul tabelei 8 îndeplinirea în general a criteriului. Astfel, pentru bare cu secțiune constantă, cuprinse între două noduri, s-a găsit $\rho_{jk} = \rho_{kj} = i$, $\mu_{jk} = \mu_{kj} = 0{,}5$, deci $|r_{jj}| \geqslant 2\sum|r_{jk}|$; egalitatea corespunde cazului cînd toate barele din nodul j își au extremitățile în noduri vecine, iar inegalitatea apare cînd unele din bare leagă nodul j de rezemări (aceste bare nu intervin în coeficienții secundari). Criteriul de convergență este deci larg satisfăcut.

Trebuie observat că criteriul (13.1) este un criteriu suficient, nu și necesar, în sensul că se poate obține uneori o rapiditate acceptabilă a convergenței și la sisteme de ecuații unde condiția nu este peste tot îndeplinită. Caracterul restrictiv apare din faptul că se cere îndeplinirea criteriului de către fiecare ecuație în parte, în loc de a impune o condiție unică ansamblului matricei coeficienților.

În vederea rezolvării prin iterație, fiecare dintre ecuații se scrie

$$Z_j = -\frac{R_{js}}{r_{jj}} - \frac{r_{j1}}{r_{jj}}Z_1 - \ldots - \frac{r_{jk}}{r_{jj}}Z_k - \ldots - \frac{r_{jn}}{r_{jj}}Z_n,$$

unde necunoscuta principală este exprimată în funcție de termenul liber și de toate celelalte necunoscute. Introducînd notațiile

$$Z_j^0 = -R_{js}/r_{jj} \quad \text{și} \quad t_{kj} = -r_{jk}/r_{jj}, \tag{13.2}$$

se ajunge la forma

$$Z_j = Z_j^0 + t_{1j}Z_1 + \ldots + t_{kj}Z_k + \ldots + t_{nj}Z_n = Z_j^0 + \sum_{k=1}^{n} t_{kj}Z_k, \tag{13.3}$$

în care Z_j^0 reprezintă *valoarea inițială* a necunoscutei, iar t_{kj} poartă numele de *factor de transmitere* care servește la determinarea efectului necunoscutei Z_k asupra necunoscutei Z_j.

Rezolvarea prin iterație începe cu stabilirea valorilor inițiale Z_j^0 ale necunoscutelor. Acestea se obțin din prima relație (13.2) și sînt date de rapoartele — luate cu semn schimbat — dintre termenul liber și coeficientului principal pentru fiecare ecuație. În continuare se poate proceda în două moduri, după cum rezolvarea ecuațiilor se face simultan sau succesiv; se ajunge astfel la două procedee sistematizate de calcul.

b. **Rezolvarea simultană a ecuațiilor** (procedeul *Gauss*). În acest procedeu, valorile inițiale Z_j^0 sînt admise ca valori în primă aproximație ale tuturor necunoscutelor. O dată calculate, acestea se introduc în ecuațiile (13.3). Termenii de forma $t_{kj}Z_k$ capătă valorile $t_{kj}Z_k^0$, iar suma lor în fiecare ecuație reprezintă prima corecție a necunoscutei respective; deci

$$\Delta Z_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} Z_k^0, \qquad (k \neq j),$$

astfel că pentru necunoscuta Z_j s-a ajuns la valoarea corectată $Z_j^0 + \Delta Z_j^{(1)}$. Efectuînd această operație în toate ecuațiile, se încheie primul ciclu de corectare. Se reia apoi același procedeu introducînd de data aceasta corecțiile $\Delta Z_j^{(1)}$ în ecuațiile (13.3). Pentru termenii $t_{kj}Z_k$ rezultă acum valorile $t_{kj}\Delta Z_k^{(1)}$, a căror sumă în fiecare ecuație dă cea de-a doua corecție a necunoscutei respective, care este

$$\Delta Z_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} \Delta Z_k^{(1)}.$$

Astfel, pentru necunoscuta Z_j se obține noua valoare corectată $Z_j^0 + \Delta Z_j^{(1)} + \Delta Z_j^{(2)}$, care corespunde celui de-al doilea ciclu de corectare. Se efectuează în continuare alte cicluri, din care rezultă noile corecții

$$\Delta Z_j^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} \Delta Z_k^{(2)}, \quad \ldots, \quad \Delta Z_j^{(i)} = \sum_{k}^{n} t_{kj} \Delta Z_k^{(i-1)},$$

pînă cînd acestea scad sub limita de aproximație stabilită, astfel încît corecțiile următoare pot fi neglijate. Valoarea finală a fiecărei necunoscute se calculează adunînd la valoarea sa inițială suma tuturor corecțiilor aflate, așa cum arată relația (13.3).

Caracteristica procedeului constă în *conducerea calculului pe cicluri*, calculînd în fiecare ciclu corecțiile tuturor necunoscutelor numai pe baza corecțiilor determinate în ciclul precedent. În consecință, într-un ciclu de calcul nu se ține seama că, ajungînd la stabilirea corecției unei anumite necunoscute, se cunosc și noile corecții — obținute chiar în acel ciclu — pentru necunoscutele operate anterior. Apare astfel o posibilitate de îmbunătățire a rapidității convergenței, înlocuind rezolvarea simultană a ecuațiilor prin rezolvarea lor succesivă în fiecare ciclu, cum se arată în continuare.

c. **Rezolvarea succesivă a ecuațiilor** (procedeul *Seidel*). Se pornește tot de la valorile inițiale Z_j^0, dar la stabilirea valorii în primă aproximație a unei necunoscute se adaugă succesiv și corecțiile care provin de la valorile în primă aproximație ale necunoscutelor anterioare. Astfel, prima aproximație $Z_1^{(1)}$ a necunoscutei Z_1 este chiar valoarea Z_1^0, în timp ce pentru necunoscuta Z_2 valoarea în primă aproximație $Z_2^{(1)}$ rezultă adăugînd la valoarea inițială Z_2^0 și corecția $t_{12}Z_1^{(1)}$. Se obțin astfel următoarele valori în primă aproximație ale necunoscutelor

$$\begin{aligned}
&Z_1^{(1)} = Z_1^0 \qquad (a)\\
&Z_2^{(1)} = Z_2^0 + t_{12} Z_1^{(1)}\\
&Z_3^{(1)} = Z_3^0 + t_{13} Z_1^{(1)} + t_{23} Z_2^{(1)}\\
&\vdots\\
&Z_j^{(1)} = Z_j^0 + t_{1j} Z_1^{(1)} + \cdots + t_{kj} Z_k^{(1)} = Z_j^0 + \sum_{k=1}^{j-1} t_{kj} Z_k^{(1)}, \qquad (k < j).
\end{aligned}$$

Rezultă că, în primul ciclu de calcul, la stabilirea valorilor în primă aproximație ale necunoscutelor, intervin corecții de forma

$$\Delta Z_1^{(1)}=0, \ldots, \Delta Z_j^{(1)}=\sum_{k=1}^{j-1} r_{kj} Z_k^{(1)}, \qquad (k<j) \tag{b}$$

care se adaugă la valorile inițiale.

În ciclul următor, corecțiile care trebuie calculate sînt formate din două categorii de termeni și se scriu succesiv:

$$\begin{aligned}
\Delta Z_1^{(2)} &= \sum_{2}^{n} r_{kj} Z_k^{(1)} \\
\Delta Z_2^{(2)} &= r_{12}\Delta Z_1^{(2)} + \sum_{3}^{n} r_{k2} Z_k^{(1)} \\
\Delta Z_3^{(2)} &= r_{13}\Delta Z_1^{(2)} + r_{23}\Delta Z_2^{(2)} + \sum_{4}^{n} r_{k3} Z_k^{(1)} \\
&\vdots \\
\Delta Z_j^{(2)} &= \sum_{1}^{j-1} r_{kj}\Delta Z_k^{(2)} + \sum_{j+1}^{n} r_{kj} Z_k^{(1)}.
\end{aligned} \tag{c}$$

La stabilirea unei anumite corecții $\Delta Z_j^{(2)}$ trebuie ținut seama că:

— pentru necunoscutele care *preced* pe Z_j, corectarea datorită valorilor în primă aproximație $Z_k^{(1)}$, unde $k<j$, a fost efectuată în ciclul precedent, urmînd să se introducă numai corectările care corespund noilor corecții $\Delta Z_k^{(2)}$ determinate în acest ciclu;

— pentru necunoscutele care *succed* lui Z_j, trebuie efectuată corectarea datorită valorilor în primă aproximație $Z_k^{(1)}$, unde $k>j$, care nu erau cunoscute în etapa corespunzătoare a ciclului precedent.

Pe aceeași bază rezultă că expresia unei corecții $\Delta Z_j^{(i)}$ din ciclul i de calcul este compusă din două grupe de termeni și anume

$$\Delta Z_j^{(i)}=\sum_{1}^{j-1} r_{kj}\Delta Z_k^{(i)} + \sum_{j+1}^{n} r_{kj}\Delta Z_k^{(i-1)}, \tag{d}$$

unde prima sumă se referă la necunoscutele care preced pe Z_j, iar a doua sumă — la necunoscutele care îi succed. Se efectuiază atîtea cicluri pînă cînd corelațiile scad sub aproximația dorită. Valoarea finală a necunoscutei este dată de suma

$$Z_j=Z_j^{(1)}+\Delta Z_j^{(2)}+\Delta Z_j^{(3)}+\cdots=Z_j^{(1)}+\sum_{2}^{i}\Delta Z_j^{(i)},$$

unde valorii în primă aproximație i se adaugă corecțiile obținute.

3. Organizarea iterației și semnificația sa fizică

a. **Utilizarea schemelor de transmiteri.** Efectuarea rezolvării prin iterație poate fi organizată pe o schemă de calcul. Se ajunge la aceasta observînd din relația (13.3) că, pentru o anumită necunoscută Z_j, atît valoarea în primă aproximație, cît și corecțiile din toate ciclurile de calcul se determină din aceeași ecuație. Totodată, efectul unei alte necunoscute Z_k asupra necunoscutei Z_j se obține de fiecare dată prin multiplicarea cu un același factor r_{kj}.

Se poate deci spune că **necunoscuta** Z_k *transmite* necunoscutei Z_j un efect avînd mărimea $t_{kj}Z_k$, factorul t_{kj} fiind factorul de transmitere de la necunoscuta Z_k la necunoscuta Z_j. Urmărind sub acest aspect relațiile (a)–(d) din paragraful precedent, se constată că efectuarea iterației reprezintă de fapt un proces de transmiteri între necunoscute. Schema de calcul corespunzătoare poartă numele de *schemă de transmiteri*.

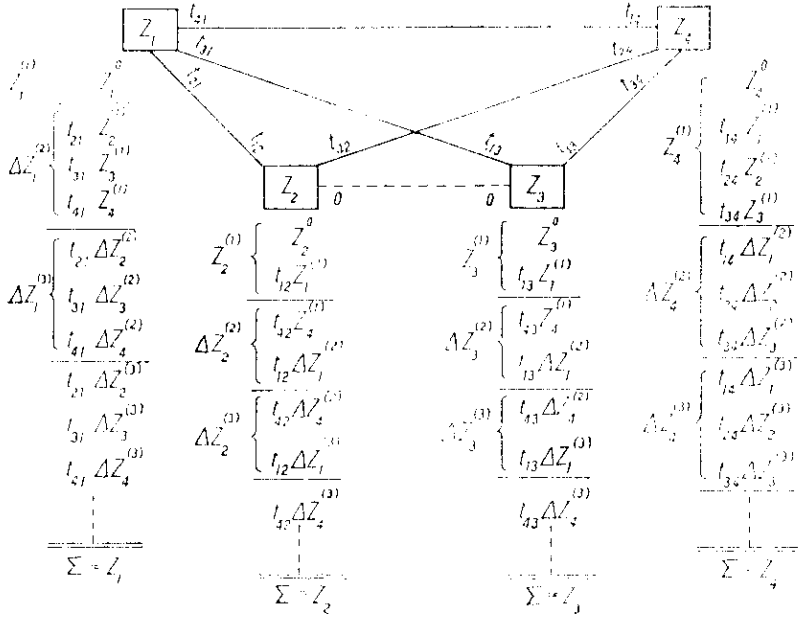


Fig. 197

În figura 197 este reprezentată schema de transmiteri pentru rezolvarea prin iterație a unui sistem de patru ecuații cu patru necunoscute. Fiecărei necunoscute îi corespunde pe schemă un punct, marcat de obicei printr-un pătrățel în care se înscrie simbolul necunoscutei sau indicele său. Ținînd seama de semnificația statică ce va fi întîlnită mai departe, la rezolvarea pe această cale a ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor pentru cadre cu noduri fixe, punctele schemei se numesc de obicei „noduri". Nodurile se unesc între ele, două cîte două, prin linii drepte; aceste linii reprezintă pe schemă interdependența directă dintre perechile de necunoscute. La capetele liniilor — lîngă noduri — se scriu factorii de transmitere respectivi, calculați în prealabil, așezîndu-i întotdeauna *alături de nodul spre care se face transmiterea*. Astfel, pentru linia care unește nodurile j și k, factorul de transmitere t_{jk} se va scrie lîngă nodul k, iar factorul de transmitere t_{kj} se va scrie lîngă nodul j.

Factorii de transmitere sînt definiți de relația (13.2), și anume

$$t_{jk} = -r_{kj} / r_{kk} \quad \text{și} \quad t_{kj} = -r_{jk} / r_{jj}.$$

Cînd sistemul de ecuații are și coeficienți secundari nuli, vor apărea perechi de necunoscute pentru care $r_{jk}=r_{kj}=0$, astfel că rezultă și $t_{jk}=t_{kj}=0$. Aceasta arată că cele două necunoscute nu sînt direct dependente și, în consecință, se poate suprima pe schemă linia care unește nodurile respective. În figura 197 s-a admis această situație pentru Z_2 și Z_3.

Pentru fiecare necunoscută se deschide o coloană de calcul, în care se înscrie valoarea sa inițială și apoi toate corecțiile succesive, cu semnele lor; efectuînd la sfîrșit totalizarea coloanelor, se obțin valorile finale ale necunoscutelor. Conducerea calculului se face folosind *rezolvarea succesivă a ecuațiilor*. Este însă mai avantajos, pentru urmărire, ca înscrierea corecțiilor pe schemă să se facă într-o ordine puțin diferită. În loc de a aduce spre fiecare necunoscută care se corectează toate corecțiile ce provin de la celelalte necunoscute, așa cum apare din relația (d), este preferabil ca la corectarea unei necunoscute să se transmită corecțiile care rezultă spre celelalte.

Pentru exemplificare, fie schema de transmiteri din figura 197. Începînd cu nodul *1*, în coloana de calcul se găsește înscrisă valoarea inițială Z_1^0, care este și valoarea în primă aproximație $Z_1^{(1)}$; aceasta se marchează trăgînd dedesubt o linie. Se fac acum transmiteri spre celelalte noduri, anume corecția $t_{12}Z_1^{(1)}$ spre necunoscuta Z_2, corecția $t_{13}Z_1^{(1)}$ spre necunoscuta Z_3 și corecția $t_{14}Z_1^{(1)}$ spre necunoscuta Z_4; fiecare dintre acestea se înscrie în coloana nodului respectiv, sub valoarea inițială a necunoscutei. Trecînd la nodul *2*, se găsește gata înscrisă valoarea în primă aproximație $Z_2^{(1)}$, care este formată din valoarea inițială Z_2^0 și corecția $t_{12}Z_1^{(1)}$. Se marchează și aici prin tragerea unei linii, apoi se fac transmiteri spre necunoscutele Z_1 și Z_4, înscriind corecțiile $t_{21}Z_2^{(1)}$ și $t_{24}Z_2^{(1)}$ în coloanele acestor noduri; spre necunoscuta Z_3 nu se face transmitere, deoarece factorul de transmitere t_{23} este nul. Urmează nodul *3* și apoi nodul *4*, unde se procedează în același mod, marcînd cu cîte o linie valorile în primă aproximație $Z_3^{(1)}$ și respectiv $Z_4^{(1)}$, care se găsesc gata înscrise sub forma

$$Z_3^{(1)}=Z_3^0+t_{13}Z_1^{(1)} \text{ și } Z_4^{(1)}=Z_4^0+t_{14}Z_1^{(1)}+t_{24}Z_2^{(1)}+t_{34}Z_3^{(1)},$$

după care se fac transmiteri spre celelalte necunoscute. Cu aceasta se încheie primul ciclu de calcul.

Revenind la nodul *1*, se găsește alcătuită corecția

$$\Delta Z_1^{(2)}=t_{21}Z_2^{(1)}+t_{31}Z_3^{(1)}+t_{41}Z_4^{(1)},$$

care este formată din toate corecțiile ce au fost transmise spre această necunoscută, după prima operare a nodului *1*, și care se găsesc deci înscrise în coloana sa *sub* linia cu care s-a marcat valoarea în primă aproximație $Z_1^{(1)}$. Se trage o nouă linie și se fac transmiterile $t_{12}\Delta Z_1^{(2)}$, $t_{13}\Delta Z_1^{(2)}$ și $t_{14}\Delta Z_1^{(2)}$ spre necunoscutele Z_2, Z_3 și Z_4, înscriind aceste corecții în coloanele respective. Se continuă asemănător pentru nodurile *2*, *3* și *4*, încheind astfel al doilea ciclu de calcul. Se revine la nodul *1* pentru începerea ciclului al treilea și se urmează în același mod operațiile, efectuînd atîtea cicluri pînă ce mărimile corecțiilor scad sub aproximația stabilită. De reținut că pentru fiecare etapă de corectare a unei necunoscute intervin numai corecțiile care au fost transmise acolo după corectarea precedentă, deci corecțiile care se găsesc înscrise sub ultima linie trasă. La sfîrșit se totalizează coloanele, obținînd valorile finale ale necunoscutelor.

Utilizarea schemei de transmiteri permite să se îmbunătățească mai departe rezolvarea, prin alegerea *ordinei optime* de corectare a necunoscutelor. Este avantajos să se transmită în primul rînd corecțiile cele mai mari, spre a le introduce cît mai repede în calcul. Trebuie ținut seama aici că mărimea corec-

ţiilor transmise depinde de două elemente: mărimea corecţiei de la necunoscuta care se corectează şi mărimea factorilor de transmitere spre celelalte necunoscute. În funcţie de acestea, se poate uşor identifica pe schemă ordinea cea mai favorabilă de corectare. *Nu este necesar ca la fiecare ciclu de calcul să se respecte aceeaşi ordine, fiind preferabil să se admită de fiecare dată ordinea care apare mai avantajoasă.* Mai mult încă, dacă la o anumită necunoscută mărimea corecţiei acumulate acolo este mică, se poate amîna corectarea acesteia, trecînd la o altă necunoscută unde s-au acumulat corecţii mai mari, indiferent dacă necunoscuta respectivă a mai fost sau nu corectată. Pe această cale se pierde de fapt împărţirea calculului pe cicluri, *efectuarea iteraţiei devenind o operaţie continuă:* se alege mereu pentru corectare necunoscuta unde corecţia acumulată este mai mare. Numărul de corectări nu va mai fi acelaşi pentru toate necunoscutele, revenind mai des corectarea necunoscutelor cu corecţii mari. Se poate ajunge astfel la o îmbunătăţire simţitoare a convergenţei iteraţiei.

Organizarea rezolvării prin iteraţie pe scheme de transmiteri scoate în evidenţă un avantaj esenţial al aplicării metodei deplasărilor la cadre cu noduri fixe. Datorită faptului că dispunem de expresiile generale (12.33) pentru evaluarea coeficienţilor şi a termenilor liberi din ecuaţiile de condiţie, *dispare necesitatea de a mai scrie explicit sistemul acestor ecuaţii pentru fiecare caz concret în parte,* fiind posibil să se stabilească direct elementele care intervin în procesul iterativ: valorile iniţiale Z_j^0 şi factorii de transmitere t_{kj}.

b. **Semnificaţia fizică a iteraţiei.** Efectuarea iteraţiei capătă o semnificaţie fizică ce poate fi urmărită cu uşurinţă, aşa cum se arată în figura 198. Introducerea blocărilor de noduri este echivalentă cu a admite că toate necunoscutele-rotiri $Z_j=\theta_j$ sînt nule; acţiunea sarcinilor asupra nodurilor, exprimată prin momentele neechilibrate $\overline{M}_j$, produce tendinţe de rotire care nu se pot manifesta din cauza blocărilor. Pornind de la această situaţie, specifică sistemului de bază din metoda deplasărilor, se admite că se deblochează succesiv nodurile.

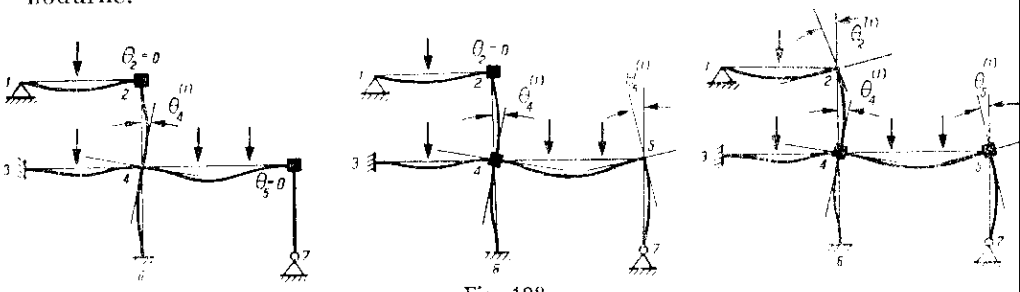


Fig. 198

Deblocînd unul dintre noduri, de exemplu nodul *4* (fig. 198, *a*) acesta se roteşte pînă se ajunge la o poziţie de echilibru. Situaţia este similară cu cea discutată în legătură cu figura 182. Mărimea rotirii se obţine din ecuaţia de condiţie a nodului considerat, care are forma (13.3), admiţînd că toate celelalte necunoscute-rotiri sînt nule, deoarece nodurile respective au rămas blocate; rezultă pentru rotirea θ_4 tocmai valoarea iniţială θ_4^0, care este valoarea în primă aproximaţie $\theta_4^{(1)}$. Totodată, rotirea nodului *4* transmite nodurilor vecine tendinţe de rotire, care au mărimile $t_{42}\theta_4^{(1)}$ şi $t_{45}\theta_4^{(1)}$. Se blochează din nou nodul *4*, în poziţia rotită la care s-a ajuns.

Trecînd la un nod vecin, de exemplu nodul *5* (fig. 198, *b*), acesta are o tendință de rotire care se compune din tendința de rotire inițială θ_5^0, datorită momentului neechilibrat $\bar{M}_5$, și din tendința de rotire $t_{45}\theta_4^{(1)}$, datorită rotirii care s-a produs în nodul *4*. Deblocînd nodul, acesta capătă rotirea $\theta_5^{(1)}=\theta_5^0+t_{45}\theta_4^{(1)}$, care reprezintă valoarea în primă aproximație a necunoscutei θ_5, așa cum rezultă și din ecuația de forma (13.3) în care restul necunoscutelor sînt admise egale cu zero (noduri blocate). Rotirea nodului *5* transmite nodurilor vecine tendințe de rotire, în cazul de față tendința de rotire $t_{54}\theta_5^{(1)}$ la nodul *4*, care este singurul nod vecin. Se blochează acum nodul *5* în poziția sa rotită. Se trece apoi la un alt nod, de exemplu nodul *2* (fig. 198, *c*), procedînd analog; prin deblocarea acestuia, se produce rotirea $\theta_2^{(1)}=\theta_2^0+t_{42}\theta_4^{(1)}$, care este valoarea în primă aproximație a necunoscutei θ_2; de asemenea, se transmit tendințe de rotire la nodurile vecine (aici nodul *4*). Cu aceasta se încheie primul ciclu de calcul, regăsind cadrul cu toate nodurile blocate în pozițiile care au rezultat.

Revenind la nodul *4*, se constată că — ulterior blocării sale — s-au acumulat aici noi tendințe de rotire, datorite rotirii nodurilor vecine care au fost deblocate după aceasta. Ridicîndu-i din nou blocarea, nodul se rotește cu rotirea suplimentară $\Delta\theta_4^{(2)}=t_{54}\theta_5^{(1)}+t_{24}\theta_2^{(1)}$, care reprezintă corecția necunoscutei în al doilea ciclu de calcul, ajungînd din nou în echilibru; în această nouă poziție rotită se reintroduce blocarea. Se continuă la fel pentru celelalte noduri, apoi se trece la ciclurile următoare de calcul; după fiecare ciclu se regăsește cadrul cu toate nodurile blocate în pozițiile rotite la care s-a ajuns. În general, pentru ciclul de calcul *i*, tendința de rotire care se găsește acumulată la un nod oarecare *j* — cînd se efectuează deblocarea acestuia — are mărimea

$$\sum_{1}^{j-1} t_{kj}\theta_k^{(i)}+\sum_{j+1}^{n} t_{kj}\theta_k^{(i-1)}$$

și este compusă din tendințele de rotire transmise de la nodurile care au fost deblocate ulterior blocării nodului *j* în ciclul precedent (a doua sumă) și din tendințele de rotire transmise de la nodurile care au fost deblocate anterior nodului *j* în ciclul *i* (prima sumă). Se regăsește astfel corecția totală $\Delta\theta_k^{(i)}$ dată de relația (d).

Semnificația fizică a iterației permite să se caracterizeze rezolvarea ecuațiilor de condiție prin aproximații succesive, comparativ cu rezolvarea directă, în ceea ce privește trecerea de la sistemul de bază la poziția deformată reală a cadrului:

(*a*) rezolvarea directă este echivalentă cu deblocarea concomitentă a tuturor nodurilor, manifestîndu-se simultan interdependența dintre rotirile acestora;

(*b*) rezolvarea prin iterație este echivalentă cu deblocarea și reblocarea succesivă a nodurilor, acestea rotindu-se treptat și pe rînd pînă se ajunge la poziția deformată reală.

Din această interpretare apare clar că ordinea avantajoasă de deblocare a nodurilor este cea care conduce cît mai repede la poziția deformată finală, dîndu-se deci preferință de fiecare dată nodului la care s-a acumulat o tendință de rotire mai mare; dispare astfel operarea pe cicluri de calcul.

În esență, utilizarea aproximațiilor succesive la cadre cu noduri fixe se reduce la rezolvarea repetată a cadrului cu un singur nod care se rotește, problemă tratată anterior sub formă generală. Relațiile (12.29)—(12.30) dau legătura dintre rotirea nodului și momentele care se nasc în extremitățile barelor, astfel că se poate lucra fie cu rotiri, fie cu momente. Tendințele de rotire care se acumulează la un nod blocat, datorite rotirii nodurilor vecine, se pot exprima

prin momentele transmise în extremităţile barelor de lîngă acel nod. Rezultă că pentru aplicarea practică a rezolvării prin iteraţie se pot folosi două procedee de calcul:

(1) operarea cu rotiri de nod, urmînd ca la sfîrşit să se determine momentele totale din extremităţile barelor;

(2) operarea directă cu momente de capăt.

Aceste procedee sînt echivalente, deoarece se reduc la aceeaşi semnificaţie fizică, diferind numai prin organizarea calculului pe schema de transmiteri.

4. Procedeul transmiterii rotirilor

Acest procedeu derivă direct din ecuaţiile de condiţie ale metodei deplasărilor pentru cadre cu noduri fixe, deoarece operează chiar cu necunoscutele specifice metodei, care sînt rotirile nodurilor. Efectuarea iterării şi semnificaţia sa fizică au fost examinate mai înainte; rămîn să se determine numai elementele care intervin în procesul de iterare: valorile iniţiale ale necunoscutelor şi factorii de transmitere ai rotirilor.

Introducînd expresiile coeficienţilor şi a termenilor liberi în relaţiile de definiţie (13.2), se obţine

$$Z_j^0 = 0_j'^0 = -\frac{R_{js}}{r_{jj}} = \frac{\bar{M}_j}{\sum_j \rho'_{jk}} \quad \text{şi} \quad t_{kj} = -\frac{r_{jk}}{r_{jj}} = -\frac{\rho'_{jk}}{\sum_j \rho'_{jk}} \quad \mu_{jk} = -d_{jk}\,\mu_{jk}, \qquad (13.4)$$

unde pentru necunoscuta rotire şi pentru coeficienţii de rigiditate s-au considerat mărimile corectate definite de relaţiile (12.34). În a doua expresie (13.4), factorul de transmitere t_{kj} pentru *rotiri de nod* apare exprimat în funcţie de factorul de transmitere $\mu_{jk} = M_{kj}/M_{jk}$ pentru *momente de capăt*. Trebuie reţinută această deosebire între *transmiterea de deplasări* şi *transmiterea de eforturi*, care se fac prin intermediul unor factori de transmitere diferiţi (factorii μ sînt cei din tabela 8); în acest scop s-au adoptat şi simboluri diferite.

La bare cu *secţiune constantă* $\mu_{jk} = \mu_{kj} = 0{,}5$, astfel că factorii de transmitere ai rotirilor între două noduri vecine j şi k sînt

$$t_{jk} = -\frac{\rho'_{kj}}{2\sum_k \rho'_{kj}} = -d_{kj}/2 \quad \text{şi} \quad t_{kj} = -\frac{\rho'_{jk}}{2\sum_j \rho'_{jk}} = -d_{jk}/2, \qquad (13.5)$$

unde se regăsesc factorii de distribuţie ai momentelor neechilibrate, definiţi prin relaţia (12.31), şi anume factorul de distribuţie pentru extremitatea de bară de lîngă nodul *spre care* se face transmiterea de rotire.

Cu elementele date de expresiile (13.3) şi (13.4) se poate efectua iteraţia pe schema de transmiteri, aşa cum se vede în figura 200. O dată aflate rotirile totale ale nodurilor, trebuie calculate momentele care apar în extremităţile barelor, spre a se putea trasa diagrama de momente încovoietoare a cadrului. Se folosesc în acest scop expresiile (12.36), care permit trecerea de la rotiri la momente de capăt.

Această trecere se poate efectua și direct pe schema de calcul, cum se vede în figura 199. În extremitățile barelor se deschid coloane de calcul pentru momentele de capăt, în care se înscriu de la început momentele de încastrare perfectă; acestea sînt folosite la calculul momentelor neechilibrate $\overline{M}$, care intervin în expresiile valorilor inițiale ale necunoscutelor. Se înscriu apoi cantitățile $\rho'\theta'$, rezultate din multiplicarea rotirii nodului cu coeficientul de rigi-

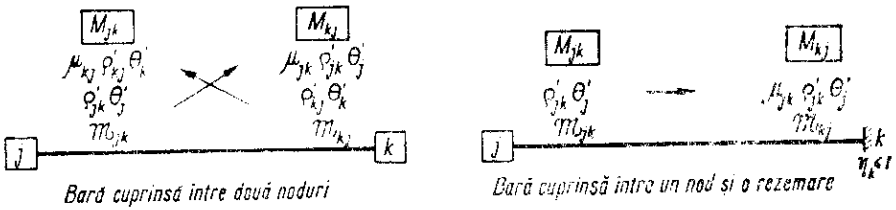


Fig. 199

ditate corespunzător acelei extremități de bară. Cantitățile înscrise $\rho'\theta'$ se transmit apoi, *prin factorii de transmitere pentru momente*, de la noduri spre extremitățile opuse ale barelor, înscriind valorile transmise în coloanele respective. Pe barele cuprinse între două noduri transmiterea se face în ambele sensuri, în timp ce pe barele cuprinse între un nod și o rezemare transmiterea se face numai de la nod spre rezemare. Efectuînd suma coloanelor, se obțin momentele totale de capăt. Operarea se încheie cu verificarea echilibrului nodurilor.

Pentru exemplificarea aplicării procedeului transmiterii rotirilor, în figura 200 este reluat cadrul cu trei noduri din figura 184, *a*. Coeficienții de rigiditate și momentele de încastrare perfectă au valorile calculate la exemplificarea respectivă; aceste valori se înscriu pe schema de calcul, cum se vede în figură. Deoarece numărul necunoscutelor este egal cu numărul nodurilor, schema de calcul coincide cu cadrul dat. În fiecare extremitate de bară se deschide cîte o coloană de calcul, înscriind acolo momentul de încastrare perfectă (cînd $\mathfrak{M}=0$, se trage o liniuță). Pentru a lucra în numere întregi pînă la aproximația dorită, valorile $\mathfrak{M}$ se multiplică cu 100 sau 1 000, după caz (în figură s-a multiplicat cu 100), urmînd să se țină seama de aceasta la rezultatele finale.

Factorii de transmitere ai rotirilor sînt dați de expresiile (13.5):

$$t_{24}=-\frac{d_{42}}{2}=-\frac{3}{2\cdot 16}=-0{,}094, \quad t_{42}=-\frac{d_{24}}{2}=-\frac{3}{2\cdot 6}=-0{,}250,$$

$$t_{45}=-\frac{d_{54}}{2}=-\frac{6}{2\cdot 8{,}25}=-0{,}364, \quad t_{54}=-\frac{d_{45}}{2}=-\frac{6}{2\cdot 16}=-0{,}188,$$

iar valorile inițiale ale necunoscutelor se obțin folosind a doua expresie (13.4):

$$0'_4=\frac{\overline{M}_4}{\sum_i \rho'_{4i}}=\frac{1\,600}{16}=+100 \quad \text{și} \quad 0'_5=\frac{\overline{M}_5}{\sum_5 \rho'_{5k}}=-\frac{1\,600}{8{,}25}=193{,}9.$$

În vederea unei aproximații mai strînse la mărimile rotirilor de noduri, în iterarea acestora s-a reținut și prima zecimală. Pentru claritate, schema de iterare a rotirilor s-a făcut separat,

calculul conducîndu-se ca în figura 197, considerînd deblocarea succesivă a nodurilor în ordinea arătată pe figură. Se constată scăderea rapidă a mărimii corecțiilor, astfel că numai după cîte trei deblocări (în medie) pentru fiecare nod se ajunge la rezultate care coincid pînă la a treia zecimală cu cele găsite anterior prin rezolvarea directă a sistemului ecuațiilor de condiție.

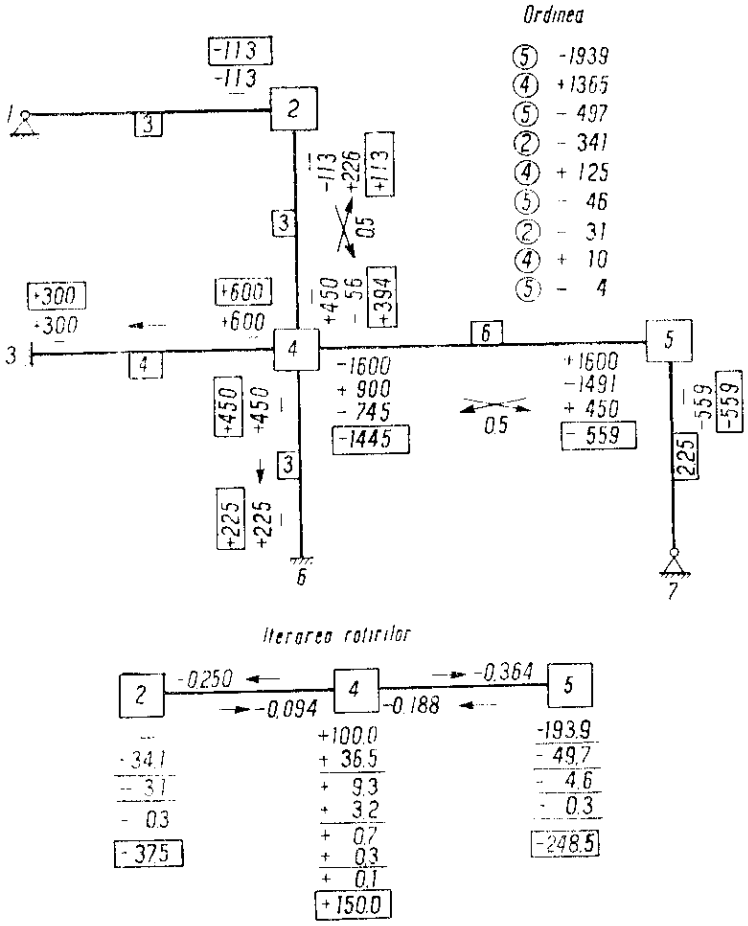


Fig. 200

Trecerea de la rotiri la momente de capăt s-a făcut pe schema cadrului, așa cum s-a arătat în figura 199, regăsind — după împărțirea cu 100 — valorile din figura 184, *d*. Operația finală constă în controlul echilibrului nodurilor, care este satisfăcut.

5. Procedeul distribuției și transmiterii momentelor

a. **Metoda Cross.** În acest procedeu, rotirile nodurilor nu apar explicit, întreaga rezolvare pe schema de calcul efectuîndu-se numai cu momente de capăt.

Semnificația fizică a iterației rămîne aceeași: trecerea de la sistemul de bază la poziția deformată reală se face prin deblocări și reblocări succesive ale nodurilor, care permit rotirea lor treptată. Pe schema de calcul vor trebui deci înregistrate efectele acestor rotiri succesive de noduri, sub forma corecțiilor care intervin la momentele din extremitățile barelor.

Deoarece de fiecare dată se deblochează numai cîte un nod, ne găsim mereu în cazul cadrului cu un singur nod care se rotește (v. fig. 182). Calculul constă deci în aplicarea repetată a rezolvării corespunzătoare acestui caz: distribuirea momentului neechilibrat în extremitățile de bare din jurul nodului și transmiterea momentelor distribuite în extremitățile opuse. Pentru distribuire se utilizează factorii de distribuție definiți de relația (12.32) sub forma $d_{jk} = \rho'_{jk} / \Sigma \rho'_{jk}$, iar pentru transmitere se folosesc factorii de transmitere *ai momentelor* μ_{jk}, dați în tabela 8. Momentul distribuit în extremitatea j a unei bare j-k, datorat deblocării nodului j în care acționează momentul neechilibrat M_j, este $d_{jk}\overline{M}_j$, iar momentul transmis în extremitatea k are valoarea $\mu_{jk}d_{jk}\overline{M}_j$.

Pentru primul nod, momentul neechilibrat se calculează sub forma $\overline{M}_j^0 = -\Sigma \overline{M}_{jk}$. Deblocînd nodul, acesta se rotește și momentul neechilibrat se distribuie în extremitățile de bară, ajungîndu-se la echilibru; în această situație se reintroduce blocarea. Trecînd la un nod vecin k, momentul neechilibrat este $\overline{M}_k = \overline{M}_k^0 - \mu_{jk}d_{jk}\overline{M}_j^0$, unde la valoarea inițială $\overline{M}_k^0$ este adăugată corecția reprezentată de momentul transmis (trecut pe nod) care provine de la echilibrarea anterioară a nodului j. În general, la prima operare a unui nod, momentul neechilibrat se compune din valoarea inițială $-\Sigma \mathfrak{M}$, la care se adaugă corecțiile date de momentele transmise în extremitățile de bare din jurul său, provenind de la nodurile vecine echilibrate anterior.

Cînd se revine la un nod blocat, se constată că s-au acumulat acolo corecții reprezentate de momentele transmise ulterior blocării, care formează un nou moment neechilibrat. Este deci necesară o nouă echilibrare, deblocînd nodul și distribuind acest moment neechilibrat, apoi reblocîndu-l. Echilibrările de noduri se continuă astfel succesiv, revenind de mai multe ori la fiecare nod, pînă cînd momentele neechilibrate care se acumulează scad sub aproximația stabilită și pot fi neglijate. În această situație, toate nodurile pot fi deblocate și rămîn în echilibru, ceea ce înseamnă că s-a ajuns la poziția deformată reală a cadrului.

Organizarea schemei de calcul se vede în figura 201; în căsuțele de la noduri, în dreptul fiecărei extremități de bară se înscrie factorul de distribuție respectiv. Se deschid totodată coloane de calcul pentru momentele de capăt ale barelor; obișnuit, aceste coloane se așează perpendicular pe bare și sensurile lor de dezvoltare se aleg astfel încît coloanele care pleacă de la noduri vecine să nu se întîlnească. Pentru fiecare capăt de bară, coloana respectivă se deschide cu momentul de încastrare perfectă (o liniuță cînd este nul). Se efectuează apoi echilibrarea nodurilor, înscriind în coloanele corespunzătoare momentele distribuite și pe cele transmise. Terminarea echilibrării și reblocarea nodului se marchează prin cîte o linie trasă în fiecare coloană din jurul său, pentru a separa corecțiile care au intrat în echilibrare de cele care se vor acumula ulterior prin transmiteri de la nodurile vecine. În acest mod, urmărirea și verificarea operațiilor efectuate este deosebit de simplă.

Se poate realiza o simplificare la operațiile de transmitere pentru barele care leagă un nod de o rezemare. Transmiterile se fac în acest caz numai de la nod la rezemare; în consecință, se poate amîna transmiterea momentelor distribuite spre rezemare la fiecare echilibrare a nodu-

lui, efectuind o singură transmitere finală a sumei tuturor momentelor distribuite înscrise în coloana capătului de bară de lîngă nod.

Şi în cazul operării cu momente efectuarea iteraţiei se face continuu, fără a mai împărţi calculul în cicluri. Criteriul de alegere a ordinii de echilibrare a nodurilor trebuie să aibă la bază mărimea momentelor neechilibrate, trecînd de fiecare dată la nodul unde s-a acumulat un moment neechilibrat mai mare; se va ţine seamă şi de influenţa mărimii factorilor de transmitere. La sfîrşit se face însumarea coloanelor, obţinîndu-se valorile totale ale momentelor de capăt, cu ajutorul cărora se trasează diagrama de momente încovoietoare.

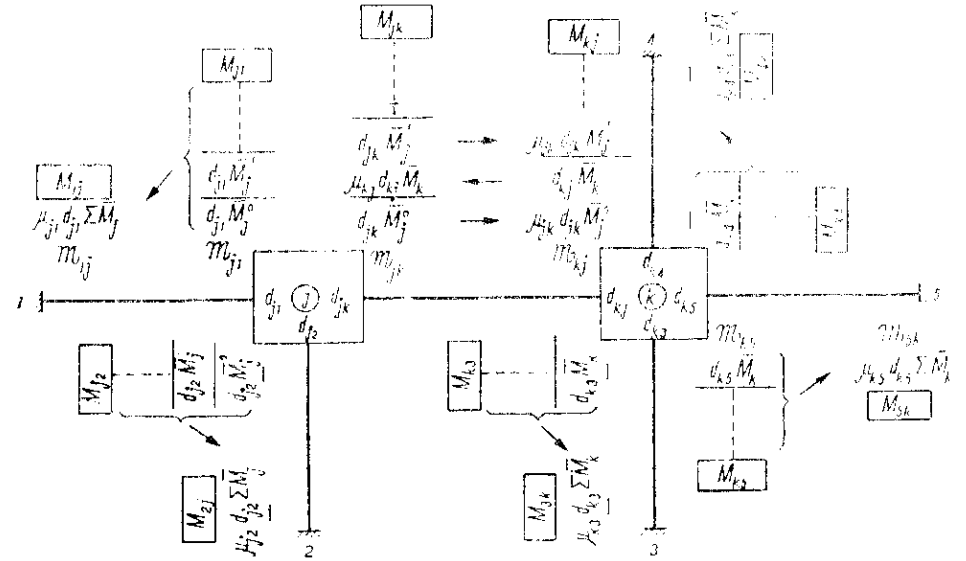


Fig. 221

În metoda Cross, *verificarea schemei de calcul* prin controlul echilibrului nodurilor nu mai este concludentă, deoarece condiţia de echilibru a fost mereu folosită la distribuirea momentelor neechilibrate prin înregistrarea momentelor distribuite corespunzătoare, care asigură echilibrul nodului. Calculul momentelor totale, prin însumarea valorilor înscrise în coloanele din jurul fiecărui nod, reprezintă de fapt o suprapunere de situaţii de echilibru.

Apare astfel o deosebire între procedeul operării cu rotiri şi procedeul operării cu momente, în ceea ce priveşte semnificaţia elementelor cu care se lucrează:

(*a*) În procedeul operării cu rotiri, condiţia de compatibilitate a deformatei este mereu îndeplinită, deoarece nodul este privit ca o unitate, rotirea sa însemnînd implicit rotirea egală a tuturor extremităţilor de bare care vin în nod; verificarea trebuie deci făcută prin condiţia de echilibru a momentelor totale de capăt care se dezvoltă în aceste extremităţi.

(*b*) În procedeul operării cu momente, condiţia de echilibru a momentelor care apar în jurul unui nod este mereu îndeplinită, datorită operaţiilor succesive de echilibrare; pentru verificare trebuie utilizată condiţia de compatibilitate, controlînd că toate extremităţile de bare din jurul unui nod au *aceeaşi rotire finală*.

Modul de verificare se obține din expresiile (12.36) ale momentelor de capăt. Aceste momente sînt cunoscute la sfîrșitul calculului, rezultînd din însumarea coloanelor. Se pot deci calcula prin diferență - scăzînd momentele de încastrare perfectă inițiale — mărimile *momentelor distribuite totale*, care reprezintă efectul rotirii nodurilor:

— bară cuprinsă între două noduri

$$M^d_{jk}=M_{jk}-\mathfrak{M}_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j+\mu_{kj}\rho'_{kj}\theta'_k,$$
$$M^d_{kj}=M_{kj}-\mathfrak{M}_{kj}=\mu_{jk}\rho'_{jk}\theta'_j+\rho'_{kj}\theta'_k;$$

— bară cuprinsă între nodul j și o rezemare

$$M^d_{jk}=M_{jk}-\mathfrak{M}_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j.$$

Eliminînd între primele două relații rotirea θ'_k a nodului vecin, respectiv scoțînd pe θ'_j din ultima relație, se obține

$$\text{nod în } k \qquad \theta'_j=\frac{M^d_{jk}-\mu_{kj}M^d_{kj}}{\rho'_{jk}(1-\mu_{jk}\cdot\mu_{kj})}, \qquad \text{rezemare în } k \qquad \theta'_j=\frac{M^d_{jk}}{\rho'_{jk}}, \tag{13.6}$$

astfel că mărimea rotirii θ'_j poate fi calculată în funcție de mărimile cunoscute ale momentelor distribuite totale. Făcînd acest calcul pentru fiecare din barele care vin în nodul j, condiția de compatibilitate este îndeplinită cînd se obține aceeași valoare θ'_j.

Pentru bare cu *secțiune constantă* $\mu_{jk}=\mu_{kj}=1/2$, astfel că relațiile (13.6) devin

$$\text{nod în } k \qquad \theta'_j=\left(M^d_{jk}-\frac{M^d_{kj}}{2}\right)\cdot\frac{4}{3\rho'_{jk}}, \qquad \text{rezemare în } k \qquad \theta'_j=\frac{M^d_{jk}}{\rho'_{jk}}. \tag{13.7}$$

Verificarea se poate organiza direct pe schema de calcul, folosind în continuare coloanele extremităților de bare, așa cum se arată în figura 202. Transmiterea momentelor distribuite totale, la bare cuprinse între două noduri, se face prin factorul de transmitere $-\mu$.

b. **Varianta Dašek.** Efectuînd rezolvarea pe schema de calcul arătată în figura 201, se înregistrează alternativ cele două categorii de operații legate de semnificația fizică a procedeului: distribuirea momentului neechilibrat în jurul nodului, apoi transmiterea momentelor distribuite la capetele opuse ale barelor. Există totuși o posibilitate de simplificare, care reduce substanțial numărul operațiilor numerice, prin gruparea termenilor ce corespund operației de distribuție; această posibilitate rezultă din examinarea schemei de calcul În coloana corespunzătoare extremității unei bare cuprinse între două noduri, după valoarea inițială dată de momentul de încastrare perfectă, apar alternativ momente distribuite și momente transmise; pentru extremitatea de lîngă nod a unei bare care leagă nodul de o rezemare, în coloană apar numai momente distribuite. Efectuarea repetată a operației de distribuție în jurul fiecărui nod constituie partea laborioasă a metodei Cross.

Cînd nodul j se rotește sub acțiunea unui moment neechilibrat M_j, momentul distribuit pe bara j-k este $d_{jk}\bar{M}_j$, iar momentul transmis în extremitatea opusă

are mărimea $\mu_{jk} d_{jk} M_j$, acesta intrînd în componența momentului neechilibrat M_k din nodul k. Momentul transmis la nodul k poate fi calculat *direct* din momentul neechilibrat $\overline{M}_j$, folosind un factor de transmitere special

$$\mu'_{jk} = \mu_{jk} d_{jk}, \tag{13.8}$$

care înglobează ambele operații. Înseamnă că influența reciprocă dintre rotirile nodurilor vecine poate fi exprimată prin transmiteri de momente neechilibrate,

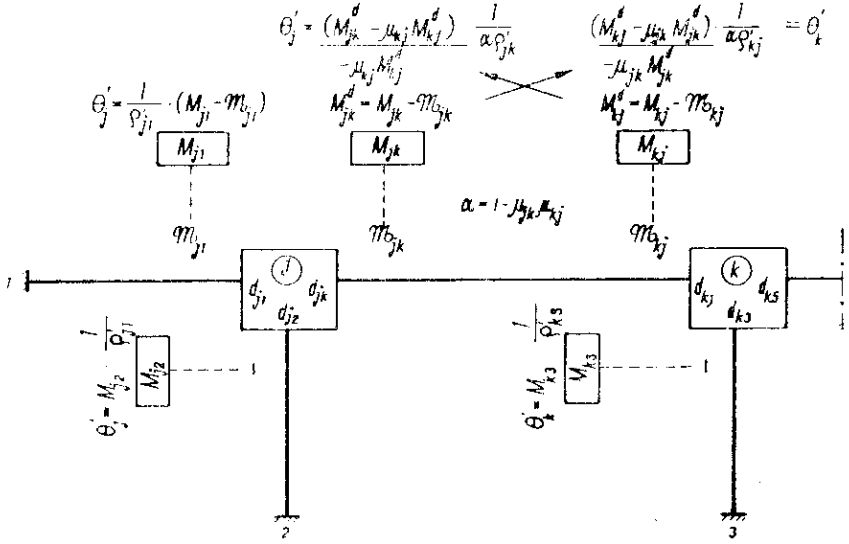


Fig. 202

înscriind termenii rezultați în coloanele extremităților respective de bare. Prin aceasta se elimină efectuarea separată a distribuirii momentelor neechilibrate, în coloane apărînd succesiv numai momente transmise. Acest mod de lucru reprezintă de fapt *o amînare* în înregistrarea efectivă a momentelor distribuite succesiv care revin extremităților de bare, distribuția urmînd să se facă o singură dată la sfîrșit.

După terminarea operațiilor de transmitere, se face suma momentelor neechilibrate care au apărut pe parcurs la fiecare nod în parte, obținînd un *moment neechilibrat total.* Acesta se distribuie barelor din jurul nodului, rezultînd momente distribuite de forma $d_{jk} \sum \overline{M}_j$, care înglobează într-un termen unic toate momentele distribuite din coloana respectivă, a căror înscriere pe schemă a fost amînată. Totalizînd coloanele (momentul de încastrare perfectă, seria de momente transmise și momentul distribuit la sfîrșit), se obțin valorile totale ale momentelor de capăt.

Varianta Dašek realizează o apropiere de procedeul transmiterii rotirilor, deoarece pe parcurs intervin numai operații de transmitere între noduri (momente neechilibrate în primul caz, rotiri în al doilea caz).

Dispoziția schemei de calcul este aceeași ca la metoda Cross; pe barele care leagă perechi de noduri se înscriu și factorii de transmitere speciali μ'definiți de relația (13.8), cîte unul pentru fiecare extremitate, așezați lîngă nodul *spre care* se transmite momentul neechilibrat. Verificarea rezultatelor se face și în acest caz în modul arătat în figura 202.

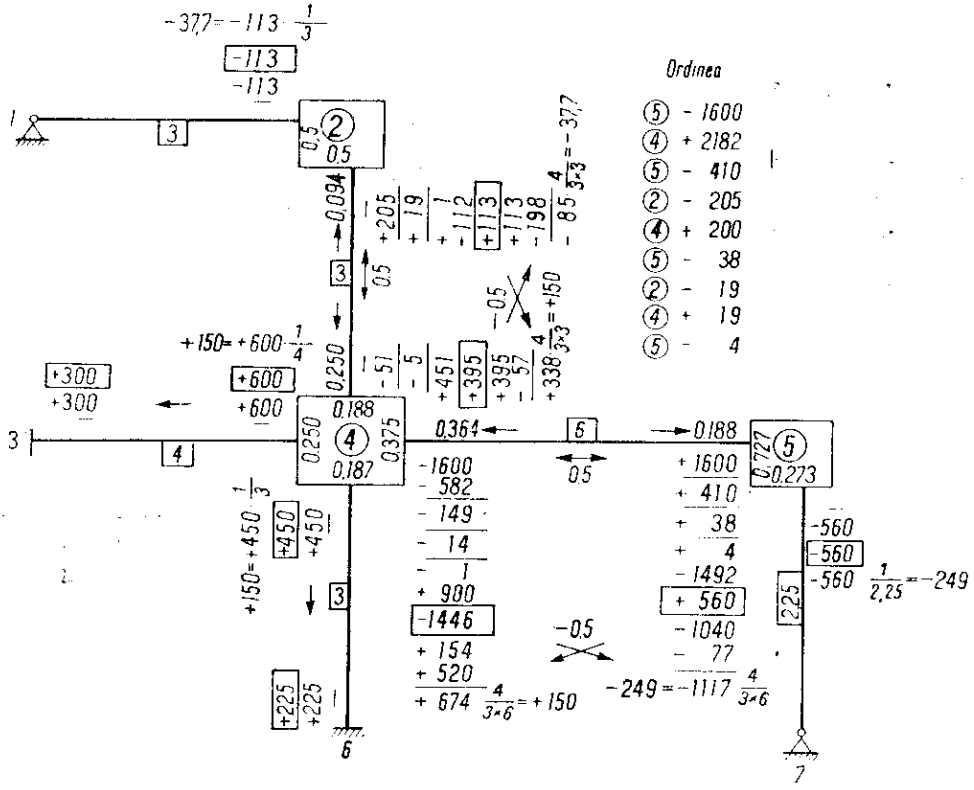


Fig. 203

Pentru exemplificarea aplicării procedeului operării cu momente (varianta Dašek), în figura 203 s-a considerat din nou cadrul cu trei noduri din figura 184, *a*; pe schema de calcul s-au înscris coeficienții de rigiditate și factorii de transmitere calculați anterior. Factorii de distribuție d_{jk} se calculează cu expresia (12,32), obținîndu-se următoarele valori

$$d_{42}=d_{46}=3/16=0{,}187, \qquad d_{45}=4/16=0{,}250, \qquad d_{43}=6/16=0{,}375,$$

$$d_{21}=d_{24}=3/6=0{,}5, \qquad d_{54}=6/8{,}25=0{,}727, \qquad d_{57}=2{,}25/8{,}25=0{,}273.$$

care s-au înscris în căsuțele din jurul nodurilor. Se pot calcula acum factorii de transmitere speciali $\mu'_{jk}=\mu_{jk}d_{jk}$; barele *2-4* și *4-5* avînd secțiune constantă, $\mu=0{,}5$ și deci

$$\mu'_{24}=0{,}250, \qquad \mu'_{42}=0{,}094, \qquad \mu'_{46}=0{,}188, \qquad \mu'_{54}=0{,}364,$$

valori care s-au înscris lîngă nodul spre care se transmite.

Ordinea de deblocare a nodurilor este indicată pe figură, înscriindu-se alături momentul neechilibrat respectiv. De fiecare dată, momentul neechilibrat este transmis prin multiplicare cu μ' în coloanele extremităților de bare de lîngă nodurile vecine; mersul calculului se poate urmări direct pe schemă. După încheierea iterației trebuie efectuată distribuirea sumei momentelor neechilibrate; folosind valorile înscrise în coloana „ordinea", se obține

$$\sum \overline{M}_2 = -205 - 19 = -224, \qquad \sum \overline{M}_4 = +2\,182 + 200 + 19 = +2\,401,$$

$$\sum \overline{M}_5 = -1\,600 - 410 - 38 - 4 = -2\,052.$$

Prin multiplicare cu d_{jk} se găsesc momentele distribuite pentru fiecare capăt de bară din jurul nodului. Urmează însumarea coloanelor, din care rezultă momentele totale de capăt.

În continuare, pe schema de calcul s-a efectuat verificarea rezultatelor, urmărind în totul sistematizarea dată în figura 202. Se constată că pentru toate capetele de bară din jurul fiecărui nod s-au obținut aceleași mărimi de rotiri, care coincid cu cele găsite prin procedeul transmiterii rotirilor în figura 200 (aici sînt multiplicate cu 100).

6. Considerații comparative asupra procedeelor

Cele două procedee de rezolvare prin iterație a cadrelor cu noduri fixe, descrise în cele ce precedă, reprezintă alternative de organizare a calculului care derivă din aceeași metodă generală și reflectă aceeași semnificație fizică. În consecință, o examinare comparativă trebuie să se refere în special la tehnica de calcul.

Procedeul transmiterii rotirilor are avantajul că operează cu necunoscutele specifice metodei deplasărilor (rotiri de nod); la sfîrșit este însă necesar să se efectueze o a doua etapă de calcul, pentru trecerea de la rotiri la momente de capăt. Pe schema de transmiteri, fiecare nod apare ca o unitate, și deci îi corespunde o singură coloană de calcul pentru procesul de iterare; în coloanele de calcul ale capetelor de bare se efectuează numai operațiile din a doua etapă. În procedeul operării cu momente se lucrează direct cu momentele de capăt, ceea ce constituie un avantaj, deoarece acestea sînt elementele care intervin la trasarea diagramelor de momente încovoietoare. Iterația se conduce însă în toate coloanele de calcul ale capetelor de bare din jurul nodurilor, ceea ce mărește desigur numărul operațiilor numerice. Utilizarea variantei Dašek reduce substanțial acest dezavantaj, astfel că această variantă trebuie preferată ori de cîte ori cadrul are noduri cu mai multe bare.

Pentru comparație, trebuie ținut seama și de modul eficient de verificare a rezultatelor, care — așa cum s-a arătat — diferă de la un procedeu la celălalt. Desigur că, din acest punct de vedere, procedeul transmiterii rotirilor apare mai avantajos, deoarece verificarea schemei de transmiteri constă în controlul echilibrului nodurilor. Trebuie observat de altfel că, pentru efectuarea verificării în procedeul operării cu momente, se adaugă de fapt o a doua etapă, în care se trece de la momentele de capăt la rotiri, ajungîndu-se la o situație similară celei din procedeul transmiterii rotirilor, cu singura deosebire că ordinea etapelor apare inversată. În ambele procedee se determină deci atît mărimile rotirilor de noduri, cît și cele ale momentelor de capăt.

Teoretic, rapiditatea convergenței este aceeași la ambele procedee, deoarece sistemul ecuațiilor de condiție și fenomenul fizic oglindit sînt aceleași. Totuși,

rapiditatea efectivă depinde de ordinea de parcurgere a nodurilor și este cu atît mai bună cu cît se trece de fiecare dată la nodul cel mai dezechilibrat. În procedeul transmiterii rotirilor, tendințele de rotire apar explicit, și deci se poate urmări ordinea optimă. La operarea cu momente, singurul criteriu disponibil este mărimea momentelor neechilibrate, care nu reflectă însă complet tendința de rotire din nod, deoarece aceasta depinde și de rigiditatea barelor.

Stabilirea aproximației la care trebuie oprită iterația este desigur mai simplă în cazul operării cu momente, deoarece proiectanții sînt familiarizați cu ordinul de mărime a acestora. Situația este aceeași și în procedeul transmiterii rotirilor, cînd se lucrează cu rotirile corectate θ', care au *dimensiune de moment*.

Din examinarea făcută rezultă că fiecare dintre procedeele expuse are avantajele sale și că numărul operațiilor numerice pe schema de calcul nu poate diferi prea mult (cînd la operarea cu momente se utilizează varianta Dašek). Dacă se dă preferință procedeului la care verificarea eficientă este mai simplă și unde rapiditatea efectivă a convergenței iterației este mai mare, apare mai indicat procedeul transmiterii rotirilor.

B. UTILIZAREA ITERAȚIEI LA REZOLVAREA CADRELOR CU NODURI DEPLASABILE

1. Procedeul operării în două etape

Rezolvarea directă a ecuațiilor de condiție, scrise prin metoda deplasărilor pentru cadre cu noduri deplasabile, devine dificilă în cazul cadrelor multiple. Evaluarea coeficienților și a termenilor liberi se face cu ușurință, folosind expresiile sistematizate stabilite mai înainte, dar rezolvarea propriu-zisă a ecuațiilor este laborioasă și deseori apare prohibitivă pentru aplicarea practică. S-a căutat deci să se utilizeze și aici rezolvarea prin iterație, ale cărei avantaje au ieșit în evidență la studiul cadrelor cu noduri fixe. Dificultatea provine din faptul că ecuațiile de grad de libertate nu satisfac în genere criteriul de convergență a lui Wittmeyer.

Cerințele practicii au dus în ultimele decenii la propunerea unui număr deosebit de mare de procedee și variante. Ca semnificație fizică, rezolvarea directă a ecuațiilor de condiție corespunde trecerii de la sistemul de bază la deformata finală prin ridicarea concomitentă a tuturor blocărilor, lăsînd să se manifeste interdependența complexă dintre rotirile nodurilor și deplasările pe direcțiile gradelor de libertate. Se poate imagina însă această trecere și în mod *treptat*, prin ridicarea și restabilirea succesivă de blocări, cărora le corespund efecte parțiale localizate. O astfel de trecere treptată poate fi văzută în moduri diferite, ceea ce explică și varietatea procedeelor de calcul propuse.

În continuare este prezentat unul dintre aceste procedee, aplicabil în condiții bune la marea majoritate a cadrelor cu noduri deplasabile, la care rezolvarea

apare împărțită în două etape. În acest procedeu se utilizează atît scheme de iterare, cît și soluționarea unui număr restrîns de ecuații, în care nu mai figurează necunoscutele-rotiri de nod. Aplicarea iterației se folosește în condițiile avantajoase de convergență care corespund cadrelor cu noduri fixe, limitînd-o la echilibrări de noduri.

Ideea care stă la baza procedeului este utilizarea unui sistem de bază geometric nedeterminat și anume a cadrului cu noduri fixe ce rezultă din structura dată prin blocarea gradelor de libertate. Rezolvarea acestui sistem de bază trebuie să fie cunoscută pentru încărcarea cu sarcinile date, precum și cu necunoscutele alese, care sînt parametrii gradelor de libertate elastică. În consecință, este necesar să se introducă o etapă preliminară, în care se rezolvă sistemul de bază geometric nedeterminat pentru încărcările arătate, urmînd ca într-o a doua etapă să se aplice metoda deplasărilor folosind acest sistem de bază.

Caracteristicile celor două etape și operațiile pe care le cuprind sînt:

(1) Se consideră mai întîi cadrul cu gradele de libertate blocate și se încarcă succesiv cu sarcinile date și cu fiecare dintre parametrii de grad de libertate ($Z_1=1$, ...). Se determină separat, pentru aceste cazuri, momentele de capăt ce apar cînd nodurile sînt lăsate să ajungă liber în situațiile de echilibru corespunzătoare.

(2) Se efectuează o suprapunere de efecte, folosind condiția că în situația finală de echilibru a cadrului reacțiunile din blocările gradelor de libertate sînt nule; pe această bază se determină mărimile efective ale parametrilor Z_1, Z_2, ... Totodată, se calculează și momentele totale de capăt sub forma

$$M_{jk}=m_{jk}^{(1)}Z_1+\ldots+m_{jk}^{(i)}Z_i+\ldots+m_{jk}^{(n)}Z_n+M_{jk}^{(s)}, \qquad (13.9)$$

unde $m_{jk}^{(1)}$, ... și $M_{jk}^{(s)}$ sînt momentele de capăt obținute în prima etapă pentru cadrul cu noduri fixe; primele corespund încărcării cu parametrii $Z_1=1$, ..., iar ultimul este dat de încărcarea cu sarcini.

În prima etapă se pornește de la sistemul de bază uzual din metoda deplasărilor, în care și nodurile sînt blocate contra rotirii, cum se vede în figura 204. Cazul din figura 204, *b* corespunde încărcării cu sarcini, iar în cazurile din figurile 204, *c* și *d* sînt aplicate încărcările cu parametrii $Z_1=1$ și $Z_2=1$ corespunzători celor două grade de libertate. De fiecare dată, menținerea nodurilor în pozițiile arătate este asigurată prin blocările *1* și *2*. Momentele de capăt date de sarcini ($\mathfrak{M}$), respectiv cele date de rotirile axelor barelor, se calculează după normele obișnuite. Rezolvarea cadrului cu noduri fixe pentru cazurile de încărcări arătate se efectuează prin iterație, folosind unul din procedeele examinate anterior. Numărul schemelor de calcul este egal cu numărul gradelor de libertate elastică a cadrului, la care se mai adaugă cîte o schemă pentru fiecare cauză ce acționează (sarcini, variații de temperatură etc.). Se obțin în acest mod momentele de capăt $m_{jk}^{(1)}$, ... și $M_{jk}^{(s)}$ care apar în expresia (13.9) Pentru fiecare caz, cadrul cu noduri fixe are acum *noduri libere în echilibru*.

Se trece la a doua etapă, în care se efectuează suprapunerea de efecte pentru determinarea mărimii parametrilor Z_1, Z_2, ... ai gradelor de libertate. În acest scop se consideră schema articulată a cadrului, încărcată cu sarcini și cu momentele totale de capăt exprimate sub forma (13.9); reacțiunile din blo-

cările gradelor de libertate nu mai intervin. Echilibrul schemei articulate se exprimă cu ajutorul deplasărilor cinematice $\bar{\psi}_1=1$, $\bar{\psi}_2=1$, ... (fig. 204, *e* și *f*), ale căror configurații se aleg aceleași ca pentru deplasările elastice $Z_1=1$, $Z_2=1$, ... folosite în prima etapă. Ecuația de echilibru pentru deplasarea cinematică $\bar{\psi}_i=1$ are forma

$$L_M^{(i)}+L_s^{(i)}=0,$$

care a intervenit și la examinarea făcută în legătură cu figura 186. Inversarea de semne discutată la ecuația generală (12.41) nu mai este aici utilă.

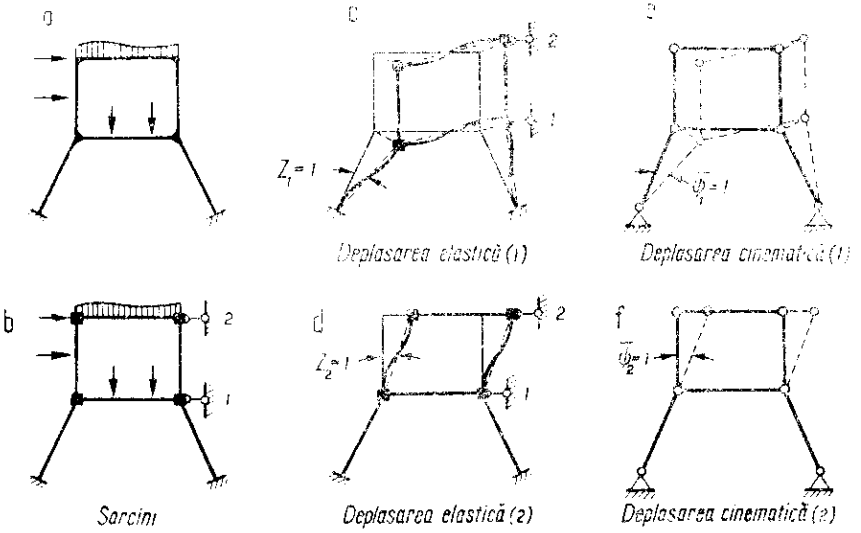


Fig. 204

Explicitînd momentele totale de capăt sub forma (13.9), ecuația de condiție corespunzătoare gradului de libertate i devine

$$r_{i1}Z_1+\ldots+r_{ii}Z_i+\cdots+r_{ih}Z_h+\cdots+r_{in}Z_n+R_{is}=0,$$

care se mai poate scrie

$$L_{i1}Z_1+\ldots+L_{ii}Z_i+\cdots+L_{ih}Z_h+\cdots+L_{in}Z_n+L_{is}=0, \quad (13.10)$$

unde simbolul L corespunde semnificației coeficienților și termenilor liberi. Un coeficient oarecare $r_{ih}=L_{ih}$ reprezintă lucrul mecanic virtual dat de momentele de capăt $m_{jk}^{(h)}$, obținute în prima etapă pentru încărcarea cu parametrul $Z_h=1$, parcurgînd deplasarea cinematică $\bar{\psi}_i=1$. Expresia unui asemenea coeficient este

$$r_{ih}=L_{ih}=\sum_i [m_{jk}^{(h)}+m_{kj}^{(h)}]\bar{\psi}_{jk}^{(i)}, \quad (13.11)$$

suma referindu-se la toate barele care se rotesc în deplasarea cinematică i.

Termenul liber este format din două părți, și anume

$$R_{is}=L_{is}=\sum_i |M_{jk}^{(s)}| \cdot M_{kj}^{(s)}| \psi_{jk}^{(i)}| \cdot L_s^{(i)}, \qquad (13.12)$$

unde prima parte reprezintă lucrul mecanic virtual dat de momentele de capăt obținute în prima etapă pentru încărcarea cu sarcini, iar a doua parte reprezintă lucrul mecanic dat de sarcini, ambele pentru deplasarea cinematică i.

Vor fi atîtea ecuații de forma (13.10), cîte deplasări cinematice distincte se pot da schemei articulate, deci cîte grade de libertate are cadrul dat. Aceste ecuații sînt echivalente cu ecuațiile de grad de libertate din sistemul (12.39), dar termenii componenți apar în mod diferit, drept urmare a eliminării necunoscutelor-rotiri de nod. Din rezolvarea ecuațiilor se obțin mărimile parametrilor Z_1, Z_2, ... ai gradelor de libertate și cu aceștia se calculează momentele totale de capăt, folosind relația (13.9).

În legătură cu aplicarea procedeului rămîn de făcut unele observații:

(1) Comparînd specificul acestui procedeu cu forma generală a metodei deplasărilor, caracterizată de sistemul ecuațiilor de condiție (12.39), se constată că în prima etapă se utilizează de fapt grupul ecuațiilor de nod, limitat la matricea **A** și avînd necunoscutele $Z_1,...Z_p$, care se rezolvă succesiv — prin iterație — pentru seriile de termeni liberi $R_{1s}...R_{ps}$, $r_{1q},...r_{pq}$, $r_{1n},...r_{pn}$, corespunzînd încărcării cu sarcini și cu $Z_q=1,...,\ Z_n=1$.

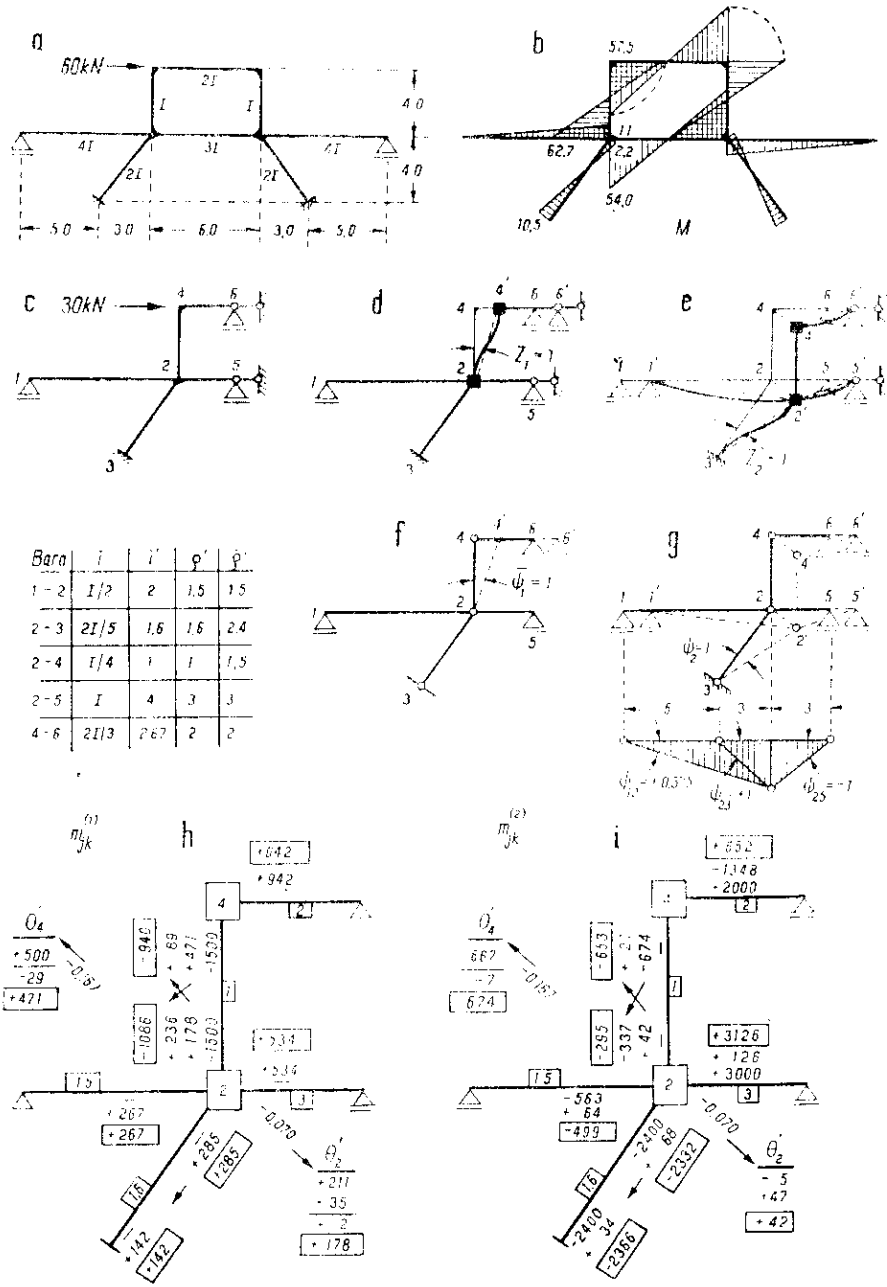
(2) Pentru verificarea diagramei totale de momente încovoietoare, separat de verificarea prealabilă a fiecărcia dintre schemele de iterare pe cadrul cu noduri fixe, se utilizează condiția de echilibru static aplicată prin ecuații de proiecții sau prin lucru mecanic virtual, cum s-a arătat la cazul general al cadrelor cu noduri deplasabile.

(3) Cînd cadrul este încărcat cu variații de temperatură sau cu cedări de reazeme, procedeul se aplică în același mod. În prima etapă, în locul momentelor de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ date de sarcini, se introduc momentele de capăt M_{jk}^t sau $M_{jk}^{\Delta t}$ definite de relațiile (12.54) și (12.55).

(4) La cadre încărcate numai cu sarcini concentrate *aplicate în noduri*, în sistemul de bază cu noduri blocate contra rotirii nu apar momente de încastrare perfectă, astfel că schema de calcul din prima etapă — corespunzătoare încărcării cu sarcini — dispare. Dispare în consecință și primul termen din expresia (13.12) a termenului liber.

(5) Procedeul rezolvării în două etape a cadrelor cu noduri deplasabile devine laborios cînd numărul gradelor de libertate este mai mare, deoarece crește numărul schemelor de iterare și al ecuațiilor de condiție. S-au căutat și modalități de a conduce întreaga rezolvare pe o singură schemă de calcul; procedee de acest fel se dovedesc în genere avantajoase pentru cadre de forme particulare. Se va vedea mai departe modul de rezolvare într-o singură etapă a cadrelor etajate, folosind particularitățile acestora.

(6) La cadre etajate cu stîlpi verticali, suprapunerea de efecte din etapa a doua a procedeului se poate face și prin izolarea riglelor sau a grupelor de rigle (v. fig. 186), exprimînd echilibrul prin ecuații de proiecții pe orizontală. În acest scop, după terminarea primei etape, se calculează mărimile forțelor de fixare din blocările gradelor de libertate, corespunzătoare încărcării cu sarcini și cu parametrii $Z_1=1$, $Z_2=1$, ...



Bara	i	i'	φ'	φ
1 - 2	$I/2$	2	1,5	1,5
2 - 3	$2I/5$	1,6	1,6	2,4
2 - 4	$I/4$	1	1	1,5
2 - 5	I	4	3	3
4 - 6	$2I/3$	2,67	2	2

Fig. 205

Pentru exemplificarea aplicării procedeului de operare în două etape, fie cadrul simetric din figura 205, *a* încărcat cu o sarcină concentrată orizontală aplicată la nivelul riglei superioare. Încărcarea dată poate fi descompusă într-o componentă simetrică și una antisimetrică. Prima componentă dă compresiune de 30 kN în rigla superioară. Rămîne deci numai componenta antisimetrică, pentru care corespunde semistructura din figura 205, *c*, care are două grade de libertate elastică.

Pentru prima etapă, se constată că aplicarea sarcinii de 30 kN pe sistemul de bază nu produce momente de încastrare perfectă, astfel că la toate barele $M_{jk}^{(s)}=0$. Cele două deplasări elastice corespunzătoare gradelor de libertate sînt arătate în figurile 205, *d* și *e*; corelația dintre rotirile barelor rezultă folosind deplasările cinematice din figurile 205, *f* și *g*, care au aceleași configurații. Momentele de încastrare perfectă date în sistemul de bază de deplasările elastice se calculează cu ajutorul coeficienților de rigiditate ρ' din figură; rezultă:

$$Z_1=1$$

$$Z_2=1 \qquad M_{24}=M_{42}=-1{,}5\cdot 1=-1{,}5,$$

$$M_{21}=-1{,}5\cdot 0{,}375=-0{,}563,$$

$$M_{25}=-3\cdot(-1)=+3, \qquad M_{23}=M_{32}=-2{,}4\cdot 1=-2{,}4$$

$$M_{46}=-2\cdot(-1)=+2.$$

Aceste valori, multiplicate cu 1 000, au fost înscrise în coloanele corespunzătoare ale schemelor de calcul din figurile 205, *h* și *i*. Rezolvarea prin iterație a fost făcută folosind procedeul transmiterii rotirilor, prezentat în legătură cu figura 200; se obțin momentele de capăt $m_{jk}^{(1)}$ și $m_{jk}^{(2)}$.

Se trece la a doua etapă, scriind ecuațiile de condiție ale gradelor de libertate. Pe baza relațiilor (13.11) și (13.12) se găsește:

$$L_{11}=(-1\,086-940)\,(+1)=-2\,026,$$

$$L_{22}=(-499)\,(+0{,}375)+(-2\,365-2\,332)\,(+1)+(+3\,126+652)\,(-1)=-8\,662,$$

$$L_{12}=L_{21}=-(-295-653)\,(+1)=+948, \quad L_{1s}=-L_{2s}=30\cdot 4\cdot 1\cdot 1\,000=+120\,000$$

unde s-a aplicat și la sarcini multiplicatorul general 1 000. Ecuațiile sînt

$$2\,026\,Z_1+948\,Z_2-120\,000=0 \quad \text{și} \quad 948\,Z_1+8\,662\,Z_2-120\,000=0,$$

care conduc la soluțiile $Z_1=55{,}6$ și $Z_2=+7{,}77$.

Cu aceste valori se multiplică momentele de capăt obținute în schemele de calcul (împărțite cu 1 000) și se efectuează suprapunerea $M_{jk}=m_{jk}^{(1)}Z_1+m_{jk}^{(2)}Z_2$ care dă momentele totale. De exemplu, pentru bara *2—4* se obține

$$M_{24}=-1{,}086\cdot 55{,}6-0{,}295\cdot 7{,}77=-62{,}7\ \text{kNm}$$

$$M_{42}=-0{,}940\cdot 55{,}6-0{,}653\cdot 7{,}77=-57{,}5\ \text{kNm}$$

Diagrama de momente încovoietoare este dată în figura 205, *b*.

2. Cadre cu tiranți

Introducerea tiranților la unele cadre are drept scop limitarea variației de distanță dintre perechi de noduri, în vederea unei distribuții mai favorabile de eforturi în structură. Tirantul este articulat la ambele extremități, astfel că are rigiditate nulă la încovoiere și, în consecință, nu intervine la determinarea momentelor de capăt produse de rotiri de nod sau de deplasări pe direcția gra-

delor de libertate. Deoarece tirantul nu împiedică, ci numai limitează variația de distanță dintre nodurile de la capete, prezența acestuia nu afectează numărul gradelor de libertate elastică ale cadrului, deși introduce în structură o legătură interioară în plus. La stabilirea gradelor de libertate, tiranții nu se iau în considerare; astfel, cadrul din figura 206 are două grade de libertate.

Efectul tiranților apare în ecuațiile de condiție prin corectarea unor coeficienți. La procedeul operării în două etape, acest efect se identifică examinînd situațiile

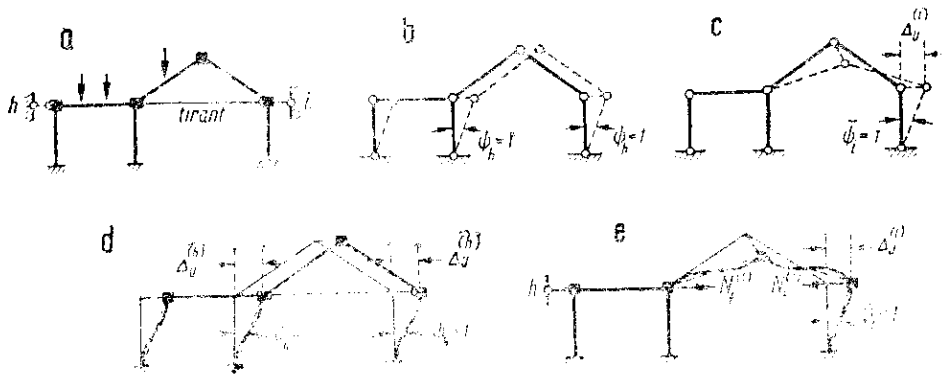


Fig. 206

de încărcare ce intervin în prima etapă. Pentru încărcare cu sarcini (fig. 206, *a*), tirantul nu intervine deoarece nodurile de la extremitățile sale rămîn blocate contra translației. De asemenea, la deplasări elastice la care nu se produce o variație a distanței dintre aceste noduri (fig. 206, *d*), în tirant nu apar eforturi deoarece lungimea rămîne constantă. În schimb, cînd încărcarea cu un anumit grad de libertate implică variația distanței dintre noduri, lungimea tirantului se modifică și acesta se încarcă cu efort axial. Astfel, pentru deplasarea elastică $\bar{\psi}_i=1$ din figura 206, *e*, lungimea tirantului variază cu $\Delta_u^{(i)}$, căreia îi corespunde un efort de mărime

$$N_t^{(i)}=\sigma_t A_t=\Delta_u^{(i)}\cdot E_t A_t/l_t,$$

care trebuie considerat împreună cu momentele de capăt provenite de la rotirea axelor barelor.

În vederea scrierii ecuațiilor de condiție, este indicat ca stabilirea gradelor de libertate să fie făcută astfel încît variația distanței dintre nodurile legate prin tirant să reprezinte un grad de libertate separat. Înseamnă că efort în tirant apare numai pentru deplasarea elastică respectivă, cum este cazul deplasării elastice $\bar{\psi}_i=1$ din figura 206, *e*. Privitor la deplasările cinematice, acestea se aleg cu aceleași configurații (fig. 206, *b* și *c*), și deci o deplasare corespunzătoare perechii de forțe $N_t^{(i)}$ intervine numai în cazul deplasării cinematice $\bar{\psi}_i=1$. În aceste condiții, la ecuațiile de forma (13.10) prezența tirantului aduce corecții numai coeficientului principal $r_{ii}=I_{ii}$ din ecuația corespunzătoare gradului de libertate i, deoarece numai pentru acesta există în același timp efort în tirant

din deplasarea elastică și deplasare corespunzătoare în deplasarea cinematică. Corecția coeficientului este

$$L_i^{(t)} = N_t^{(i)} \cdot \Delta_u^{(t)} = [\Delta_u^{(t)}]^2 \cdot E_t A_t / l_t, \tag{13.13}$$

iar ecuația corespunzătoare se scrie

$$L_{i1} Z_1 + \cdots + [L_{ii} + L_i^{(t)}] Z_i + \cdots + L_{in} Z_n + L_{is} = 0, \tag{13.14}$$

unde ceilalți coeficienți și termenul liber au forma (13.11), respectiv (13.12). După aflarea mărimii necunoscutelor $Z_1, \ldots, Z_n$, efortul din tirant rezultă de mărime $N_t = Z_t N_t^{(t)}$.

Cînd se lucrează cu coeficienții de rigiditate corectați $\rho' = \rho \cdot l_c / I_c$ și cu necunoscute corectate $Z' = Z \cdot 4 EI_c / l_c$, la calculul corecției aduse de tirant trebuie ținut seama de multiplicarea coeficienților cu constanta $l_c / 4 EI_c$, astfel că rezultă mărimea

$$L_t^{(t)} = \frac{l_c}{l_t} \cdot \frac{E_t A_t}{4 EI_c} [\Delta_u^{(t)}]^2, \tag{13.15}$$

care se introduce în ecuația (13.14).

3. Grinzi cu zăbrele cu noduri rigide

În capitolele precedente, studiul grinzilor cu zăbrele s-a făcut în ipoteza *articulării* perfecte a barelor în noduri; în consecință, barele se încarcă numai cu eforturi axiale, rămînînd rectilinii în poziția deformată (fig. 207, *a*). În realitate, nodurile sînt rigide. Variațiile de lungime ale barelor modifică

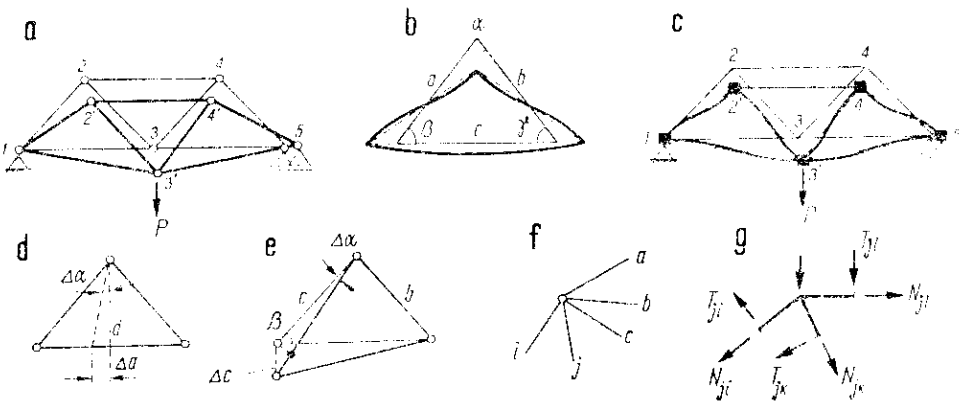


Fig. 207

unghiurile fiecărui triunghi component al grinzii cu zăbrele (fig. 207, *b*) și, din această cauză, se produce o încovoiere a barelor. Apar astfel momente încovoietoare, care reprezintă eforturi *secundare*, alături de forțele axiale ce constituie eforturile *dominante* din grinda cu zăbrele.

Grinda cu zăbrele cu noduri rigide reprezintă o structură multiplu static nedeterminată; rezolvarea ei se poate face avantajos prin metoda deplasărilor, în formă asemănătoare celei întîlnite la considerarea efectului variațiilor de temperatură sau a cedărilor de rezemări. Elementul determinant care intervine în calcul este *variația unghiurilor dintre bare*. O simplificare substanțială se obține pornind de la cazul grinzii cu zăbrele avînd noduri articulate și admițînd în mod aproximativ că eforturile axiale date de sarcini în această situație rămîn nemodificate cînd se consideră și rigiditatea nodurilor. Aceasta permite să se cunoască de la început pozițiile nodurilor în situația deformată a grinzii, considerînd numai variațiile de lungime ale barelor ce corespund eforturilor axiale determinate în ipoteza nodurilor articulate.

Aplicarea metodei deplasărilor necesită cunoașterea rotirilor suferite de bare, în raport cu poziția lor inițială. Pentru aceasta trebuie determinată în prealabil variația unghiurilor din fiecare triunghi al grinzii cu zăbrele. Fie triunghiul din figura 207, *b*, ale cărui bare de lungime *a*, *b*, *c* fac între ele — în poziția inițială — unghiurile α, β, γ. Se consideră separat efectul variațiilor de lungime Δa, Δb, Δc ale celor trei bare, admise pozitive (alungiri), asupra mărimii unghiului α. Variația Δa a barei *a* (fig. 207, *d*) duce la o *creștere* $\Delta\alpha = \Delta a/d$ a unghiului α; pe bază de corelații geometrice în figură se poate scrie

$$a = d(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma), \text{ deci } \Delta\alpha = \frac{\Delta_a}{a}(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma).$$

Variația Δc a barei *c* conduce la situația din figura 207, *e*, din care rezultă o *scădere* a unghiului α de mărime $\Delta\alpha = \Delta c \operatorname{ctg}\beta/c$. Cînd variază concomitent lungimile tuturor laturilor triunghiului, se obține pentru $\Delta\alpha$ mărimea

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta_a}{a}(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) - \frac{\Delta b}{b}\operatorname{ctg}\gamma - \frac{\Delta c}{c}\operatorname{ctg}\beta.$$

Multiplicînd cu E și ținînd seama că $E\,\Delta a/a = \sigma_a$, ..., se găsesc expresiile

$$\begin{aligned} E\Delta\alpha &= (\sigma_a - \sigma_c)\operatorname{ctg}\beta + (\sigma_a - \sigma_b)\operatorname{ctg}\gamma, \\ E\Delta\beta &= (\sigma_b - \sigma_a)\operatorname{ctg}\gamma + (\sigma_b - \sigma_c)\operatorname{ctg}\alpha, \\ E\Delta\gamma &= (\sigma_c - \sigma_b)\operatorname{ctg}\alpha + (\sigma_c - \sigma_a)\operatorname{ctg}\beta, \end{aligned} \tag{13.16}$$

care dau variațiile de mărime ale unghiurilor din triunghiul considerat; condiția de verificare este $\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 0$. Expresiile sînt stabilite considerînd ca pozitive eforturile unitare de întindere; valorile pozitive pentru cotangente corespund unghiurilor mai mici de 90°.

O dată găsite variațiile unghiurilor, se pot determina rotirile axelor barelor. Pentru aceasta se alege una din bare ca element de referință, admițîndu-i rotirea cunoscută. Obișnuit, se consideră ca atare o bară din partea centrală a grinzii, care are rotire nulă (de exemplu, în condiții de simetrie) sau neglijabilă. Pornind de la această bară într-un anumit nod, de exemplu bara *a* din figura 207, *f*, se trece

succesiv la celelalte bare urmînd sensul orar (rotirile în acest sens sînt pozitive). Rezultă relaţiile

$$\psi_b = \psi_a + \Delta\alpha_{ab},\ \psi_c = \psi_b + \Delta\alpha_{bc},\ \ldots\ \psi_i = \psi_j + \Delta\alpha_{ji}.$$

în care intervin variaţiile unghiurilor dintre barele concurente în nodul respectiv. Se trece apoi la alt nod, unde rotirea uneia dintre bare a fost determinată la nodul precedent. Se obţin astfel toate rotirile barelor grinzii cu zăbrele.

Se poate acum aplica metoda deplasărilor, considerînd că grinda trece din poziţia iniţială în poziţia deformată *cu toate nodurile blocate contra rotirii* (fig. 207, *c*). Barele se deformează (sînt încastrate perfect la capete) şi în extremităţile lor se nasc momentele de capăt

$$M_{jk} = -4\,E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk} \text{ şi } M_{kj} = -4\,E\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk}.$$

care sînt analoage momentelor de încastrare perfectă date de sarcini pe sistemul de bază. Rămîne să se efectueze o echilibrare a nodurilor, folosind unul din procedeele uzuale. Deoarece la noduri se întîlnesc obişnuit mai multe bare, este avantajos *procedeul transmiterii rotirilor*. Momentele totale de capăt servesc la trasarea diagramei de momente încovoietoare dată de efectul rigidităţii nodurilor.

Procedeul expus corespunde aproximaţiei admise de la început, anume că se consideră fixe poziţiile nodurilor, aşa cum rezultă din deformarea grinzii articulate; în consecinţă, se poate aplica modul de calcul cunoscut de la cadrele cu *noduri fixe*. Cît timp grinda cu zăbrele are bare cu rigiditate redusă la încovoiere, momentele încovoietoare sînt mici şi forţele tăietoare care le corespund au mărimi neglijabile în raport cu forţele axiale. Ipoteza simplificatoare apare deci justificată.

La grinzi cu zăbrele mai rigide, cum sînt cele din beton armat, situaţia se schimbă, deoarece momentele încovoietoare cresc. În consecinţă cresc şi forţele tăietoare, de care trebuie să se ţină seama la echilibrul nodurilor. Pentru un nod oarecare (fig. 207, *g*), sarcinile şi forţele axiale — determinate în ipoteza nodurilor articulate — îşi fac echilibru, în timp ce ansamblul forţelor tăietoare rămîne neechilibrat. O echilibrare a acestuia se poate face numai prin corectarea în consecinţă a forţelor axiale. Aceasta echivalează cu a admite că nodurile sînt *deplasabile* şi că pentru efectuarea blocării lor în faza de noduri fixe s-au introdus forţe de fixare (cîte o forţă verticală şi una orizontală în fiecare nod). Aceste forţe se pot calcula prin condiţia de echilibru a nodului împreună cu forţele tăietoare.

Pentru eliminarea forţelor de fixare se consideră grinda cu zăbrele încărcată cu *inversele* acestor forţe şi se face o nouă rezolvare, parcurgînd toate fazele arătate mai sus (eforturi şi variaţii de lungime a barelor în grinda articulată, variaţia unghiurilor şi rotirile barelor, momente de încastrare perfectă şi echilibrarea nodurilor). Forţele axiale şi momentele încovoietoare obţinute din acest nou calcul se suprapun peste cele din calculul anterior, rezultînd valorile finale ce trebuie considerate la definitivarea dimensionării.

C. REZOLVAREA CADRELOR ETAJATE PRIN PROCEDEE ITERATIVE ÎNTR-O SINGURĂ ETAPĂ

1. Procedeul Halier-Kranl

Se utilizează particularitatea cadrelor etajate, remarcată în legătură cu figurile 186, *a-c*, că în ecuațiile de etaj coeficienții r_{ih} (unde i și h se referă la grade de libertate) sînt *nuli*. În acest procedeu se lucrează separat cu cele două categorii de necunoscute ale metodei deplasărilor (rotiri de nod și grade de libertate). Rezultă necesitatea de a folosi două variante de sistem de bază geometric nedeterminat, cărora le corespund două faze de operare. Astfel, se consideră: (1) efectul deplasărilor elastice corespunzătoare gradelor de libertate pe cadrul cu noduri blocate contra rotirii și (2) efectul rotirilor de noduri pe cadrul cu grade de libertate blocate. *Aceste două faze se aplică alternativ în fiecare ciclu de calcul* și pentru fiecare din ele se realizează echilibrarea respectivă. Procedeul este în special indicat cînd asupra cadrului acționează și sarcini orizontale (vînt, sarcini convenționale seismice).

Ca semnificație legată de aplicarea ecuațiilor de condiție, prima fază corespunde rezolvării ecuațiilor de etaj, în care necunoscutele rotiri de nod sînt considerate nule, iar a doua fază corespunde rezolvării ecuațiilor de nod în care necunoscutele grade de libertate sînt admise nule. Prin aplicarea alternativă a fazelor, fiecare din ele furnizează celeilalte termenii liberi corespunzători: momentele de etaj pentru prima fază, momente necchilibrate în noduri pentru a doua fază. Termenii liberi conțin în primul rînd efectul sarcinilor aplicate pe sistemul de bază.

Modul de efectuare al acestor două faze este următorul:

(1) În prima fază se pornește de la sistemul de bază uzual (fig. 208, *a*), considerînd ridicate numai blocările gradelor de libertate. Cadrul se deplasează lateral liber, pînă ajunge în poziția de echilibru corespunzătoare sarcinilor orizontale aplicate (fig. 208, *b*); deoarece nodurile rămîn blocate la rotire, riglele se comportă ca perfect rigide. Condiția de echilibru pentru unul din gradele de libertate, de exemplu pentru etajul i, se obține efectuînd o secționare ca în figura 208, *c*. Suma proiecțiilor pe orizontală a tuturor forțelor aplicate pe porțiunea de cadru de deasupra secționării trebuie să fie nulă, deci

$$-\sum_e T_{jk} + T_e = 0 \quad \text{sau} \quad -h_i \sum_e T_{jk} + M_e = \sum_e (M_{jk} + M_{kj}) + M_e = 0, \qquad \text{(a)}$$

unde T_{jk} sînt forțele tăietoare din extremitățile superioare ale stîlpilor secționați, iar T_e și M_e — forța tăietoare de etaj și respectiv momentul de etaj definite în legătură cu relația (12.44).

Se poate scrie cîte o asemenea ecuație pentru fiecare etaj, în care apare specificul cadrelor etajate (coeficienți $r_{ih}=0$): ecuația conține o singură necu-

noscută, anume rotirea comună a stîlpilor etajului respectiv. Ecuația are forma generală

$$r_{ii}Z_i + R_{is} = 0, \text{ unde } r_{ii} = \sum_e (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj}) \text{ și } R_{is} = -M_e, \qquad (b)$$

astfel că rezultă expresia

$$Z_i = \psi'_i = -R_{is}/r_{ii} = M_e / \sum_e (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj}), \qquad (13.17)$$

care dă mărimea rotirii axei stîlpilor din etajul i pentru situația de echilibru arătată în figura 208, *b*.

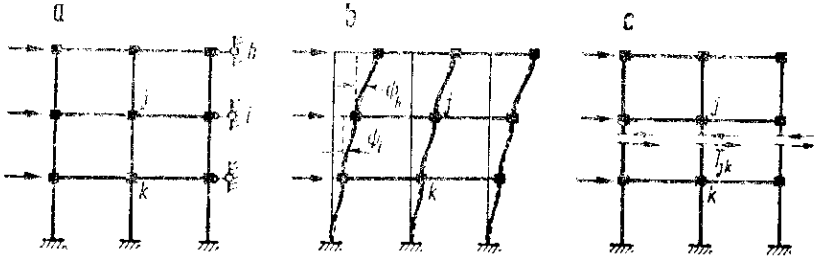


Fig. 208

Momentele de capăt din extremitățile stîlpilor acestui etaj sînt

$$M_{jk} = -\bar{\rho}'_{jk}\psi'_i = \bar{d}_{jk}M_e \text{ și } M_{kj} = -\bar{\rho}'_{kj}\psi'_i = \bar{d}_{kj}M_e, \qquad (13.18)$$

unde s-au introdus notațiile

$$\bar{d}_{jk} = -\bar{\rho}'_{jk} / \sum_e (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj}) \text{ și } \bar{d}_{kj} = -\bar{\rho}'_{kj} / \sum_e (\bar{\rho}'_{jk} + \bar{\rho}'_{kj}), \qquad (13.19)$$

care reprezintă *factorii de distribuție ai momentului de etaj* în extremitățile stîlpilor din etajul considerat. Rezultă că, datorită deplasării laterale libere a cadrului cu noduri blocate contra rotirii, momentele de etaj se distribuie tuturor capetelor de stîlpi din etajul respectiv, proporțional cu coeficienții de rigiditate $\bar{\rho}'$.

Pentru stîlpi cu *secțiune constantă* se obține:

— stîlpi intermediari sau stîlpi încastrați la bază

$$\bar{\rho}'_{jk} = \bar{\rho}'_{kj} = 3\, i'_{jk}/2, \quad \text{deci} \quad \bar{d}_{jk} = \bar{d}_{kj} = -i'_{jk}/2\Sigma i'_{jk}; \qquad (13.20)$$

— stîlpi articulați la bază

$$\bar{\rho}'_{jk} = 3\, i'_{jk}/4 \text{ și } \bar{\rho}'_{kj} = 0, \quad \text{deci} \quad \bar{d}_{jk} = -i'_{jk} / \sum_e i'_{jk} \text{ și } \bar{d}_{kj} = 0, \qquad (13.20')$$

caz în care întregul moment de etaj este preluat numai de capetele superioare ale stîlpilor.

(2) Pentru a doua fază, situația este similară celei întîlnite la rezolvarea prin iterație a cadrelor cu noduri fixe. Menținînd blocate gradele de libertate, se lasă nodurile libere la rotire pînă ajung în echilibru. Operarea se face deblocînd succesiv cîte un nod. Acesta se rotește sub acțiunea momentului neechilibrat $\overline{M}_j$, producînd în toate barele din jur momente distribuite și momente transmise, avînd mărimile

$$M_{jk}=d_{jk}\overline{M}_j \text{ și } M_{kj}=d_{jk}\rho_{jk}\overline{M}_j, \tag{13.21}$$

unde apar factorii de distribuție ai momentului neechilibrat avînd forma

$$d_{jk}=\rho'_{jk}/\sum_j \rho'_{jk}.$$

Echilibrarea nodurilor prin iterație nu trebuie făcută complet, deoarece de îndată ce se trece la faza următoare (distribuirea momentului de etaj), nodurile se dezechilibrează din nou. Este suficient să se efectueze cîte o singură deblocare pentru fiecare nod, distribuind momentul neechilibrat existent acolo și operînd transmiterile la capetele opuse ale barelor. Ordinea de parcurgere a nodurilor rezultă dînd mereu prioritate nodului unde momentul neechilibrat este mai mare.

Cele două faze se efectuează alternativ. Cînd cadrul este acționat de sarcini orizontale, prima fază are caracter dominant și cu ea se începe fiecare ciclu, distribuind momentele de etaj la capetele stîlpilor, după care urmează echilibrarea nodurilor. Cînd nu sînt sarcini orizontale, rezolvarea se începe cu faza a doua, lăsînd nodurile să se rotească sub acțiunea momentelor neechilibrate; momentele distribuite în extremitățile stîlpilor creează momente de etaj, pentru echilibrarea cărora se efectuează prima fază.

Efectuarea rezolvării se face pe o schemă de calcul, care coincide cu schema cadrului, cum se vede în figura 209; succesiunea operațiilor este următoarea:

(a) Se stabilesc mai întîi datele preliminare, și anume:

— pentru prima fază se calculează coeficienții de rigiditate ρ, la fiecare stîlp, de asemenea factorii de distribuție d_{jk} și $\bar{d}_{kj}$ ai momentelor de etaj, folosind relațiile (13.19). Pentru a doua fază se calculează coeficienții de rigiditate ρ' și factorii de transmitere μ ai tuturor barelor cadrului, de asemenea factorii de distribuție d_{jk} ai momentelor neechilibrate;

— se calculează momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}_{jk}$ date de sarcini și se înscriu în coloanele de calcul ale capetelor de bare; de asemenea, se calculează momentele de etaj M_e date de sarcinile orizontale, cum s-a arătat în legătură cu relația (12.44).

(b) Se începe cu prima fază, ridicînd blocările gradelor de libertate și lăsînd cadrul să se deplaseze lateral liber, cu noduri blocate contra rotirii. Se operează efectul acestei deplasări distribuind în fiecare etaj momentul M_e respectiv la extremitățile stîlpilor și înscriind momentele astfel obținute în coloanele corespunzătoare. În acest stadiu, echilibrul este asigurat pe direcția gradelor de libertate; se marchează aceasta prin linii (punctate) trase în coloanele de calcul ale capetelor de stîlpi. În poziția deplasată rezultată se reintroduc blocările din dreptul riglelor, ajungînd la situația de noduri fixe.

(c) Se trece la faza a doua, ridicînd blocările nodurilor contra rotirii. Acestea se rotesc sub acțiunea momentelor neechilibrate, formate din momentele inițiale de încastrare perfectă și din momentele de pe capetele stîlpilor date în prima fază de distribuirea momentelor de etaj. Pentru fiecare nod se efectuează o singură deblocare, înscriind în coloanele capetelor de bară momentele distribuite și cele transmise. Terminarea fazei se marchează prin cîte o linie (plină) în fiecare coloană, reprezentînd reintroducerea blocărilor de noduri.

(d) Se revine la prima fază, deoarece s-au format noi momente de etaj datorită momentelor distribuite și transmise în extremitățile stîlpilor. Pentru etajul i

$$M'_e = h_i \sum_e T'_{jk} - \sum_e (M'_{jk} + M'_{kj}),$$

unde M'_{jk} și M'_{kj} reprezintă suma momentelor înscrise în coloanele extremităților stîlpilor, sub liniile punctate care au marcat încheierea primei faze anterioare. Se ridică din nou blocările gradelor de libertate, lăsînd cadrul să se deplaseze iarăși liber lateral cu noduri blocate contra rotirii. Noile momente de etaj se distribuie la capetele de stîlpi din etajele respective; momentele distribuite se înscriu în coloane și se marchează prin linii punctate terminarea fazei. Acum, echilibrul este din nou asigurat pe direcția gradelor de libertate; în această situație se reintroduc blocările din dreptul riglelor.

(e) Trecînd la noduri, se găsesc noi momente neechilibrate care provin de la momentele distribuite la extremitățile stîlpilor în faza precedentă. Este deci necesar să se efectueze din nou faza a doua, ridicînd succesiv blocările de noduri și operînd distribuțiile și transmiterile corespunzătoare de momente.

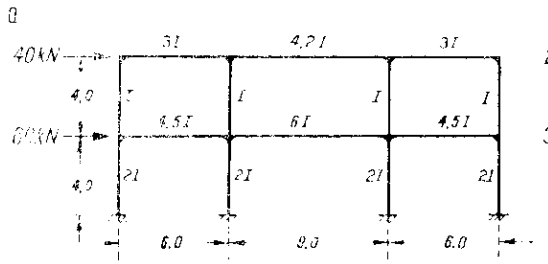
Se continuă calculul prin repetarea alternată a celor două faze, pînă cînd momentele neechilibrate scad sub aproximația dorită și pot fi neglijate. În această situație se pot ridica toate blocările, deoarece cadrul a ajuns în poziția reală de echilibru. Însumînd valorile înscrise în coloane, se obțin momentele totale de capăt, cu care se trasează diagrama de momente încovoietoare.

Procedeul are avantajul de a necesita o singură schemă de calcul, dar în același timp și dezavantajul unei convergențe lente, care implică efectuarea unui număr mai mare de cicluri de calcul. Explicația convergenței slabe stă în caracterul oarecum contradictoriu al evoluției poziției deformate ce se consideră în cele două faze: deplasarea laterală a cadrului din prima fază tinde să rotească și nodurile, fenomen care se concretizează în faza a doua, totuși la o nouă distribuire de momente de etaj nodurile sînt considerate readuse în poziția inițială, cum se vede în figura 208, *b* care a stat la baza stabilirii factorilor de distribuție d_{jk} și d_{kj}. Convergența este cu atît mai bună cu cît tendințele de rotire ale nodurilor sînt mai reduse, deci *cu cît riglele cadrului sînt mai rigide în raport cu stîlpii*. Cînd cadrul ar avea — teoretic — rigle infinit rigide, întreaga rezolvare s-ar reduce la efectuarea primei faze deoarece faza rotirilor de noduri nu mai are obiect.

Pentru exemplificare, fie cadrul din figura 209, *a* încărcat cu forțe orizontale în noduri. Descompunînd încărcarea dată în componente simetrică și antisimetrică, se constată că numai componenta antisimetrică produce momente încovoietoare în structură, a căror determinare se poate face folosind semistructura din figura 209, *b*. Componenta simetrică intervine numai la diagrama N, deoarece produce forțe axiale în rigle.

În figura 209, *c* sînt date valorile ρ' pentru toate barele, cu care se pot calcula factorii de distribuție. Pentru faza de noduri fixe se aplică la fiecare nod relația $d_{jk} = \rho'_{jk}/\rho'_j$, obținînd valorile înscrise alăturat nodurilor pe schema de calcul din figură. Pentru faza de deplasări cu noduri blocate contra rotirii, din relațiile (13.19) rezultă peste tot $\overline{d_{jk}} = \overline{d_{kj}} = -0{,}25$, deoarece în fiecare etaj ambii stîlpi au același moment de inerție; această valoare s-a înscris pe schemă în dreptul stîlpilor. Momente de încastrare perfectă nu sînt, deoarece pe rigle nu acționează sarcini. Momentele de etaj inițiale au mărimile $M_{e1} = 20 \cdot 4 = 80$ kNm și $M_{e2} = 50 \cdot 4 = 200$ kNm, unde numerotarea etajelor s-a făcut de sus în jos.

Se începe cu prima fază, lăsînd cadrul să se deplaseze liber cu noduri blocate contra rotirii. Momentele inițiale de etaj se distribuie capetelor de stîlpi din etaj prin multiplicare cu $-0{,}25$. Rezultă momentele distribuite (multiplicate cu 10) — 200 și respectiv — 500, care se înscriu în coloanele capetelor stîlpilor (însemnate cu un punct): încheierea fazei se marchează în aceste coloane prin linii punctate, restabilind blocarea gradelor de libertate.



c

Bara	1 - 3 2 - 4	3 - 5 4 - 6	1 - 2	2 - 2'	3 - 4	5 4'
I	I/4	2I/4	3I/6	4,2I/4,5	4,5I/6	6I/4,5
ρ'	0,25	0,50	0,50	0,70	0,75	1

Aplicarea procedeului Haller - Kranl

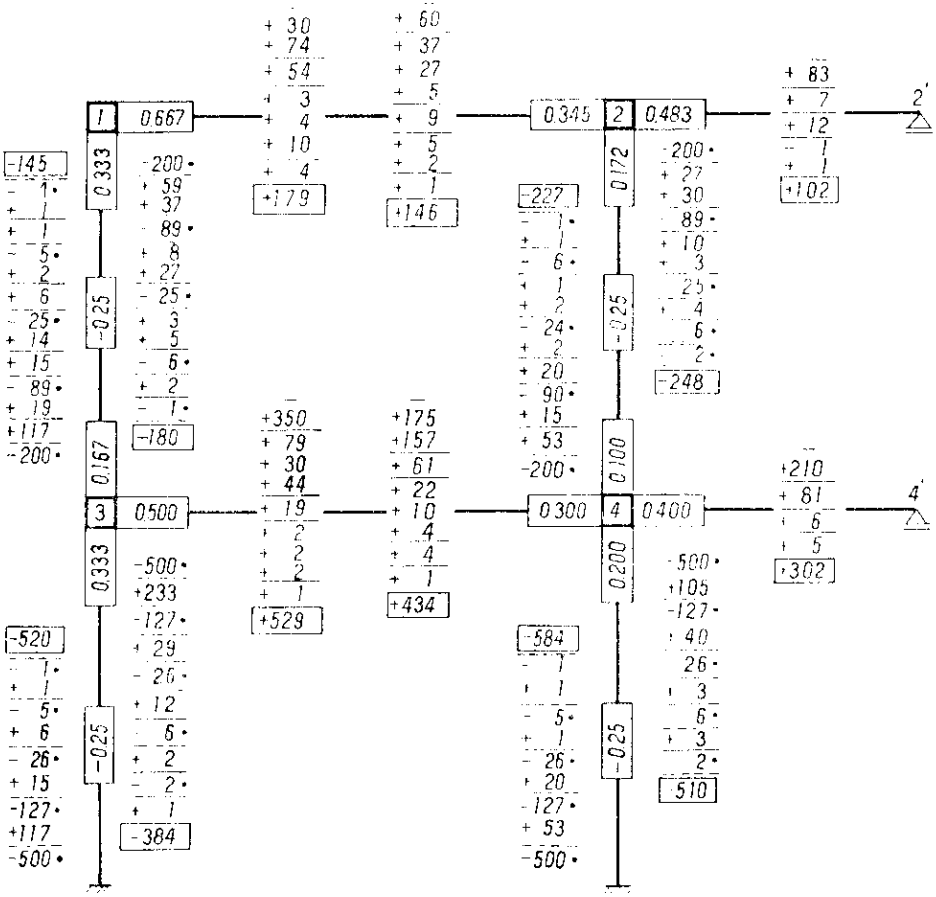


Fig. 209

Se trece la a doua fază, deblocînd succesiv nodurile. Se începe cu nodul *3*, care are cel mai mare moment necechilibrat: $\overline{M}_3 = +200 + 500 = +700$. Acesta se distribuie barelor din jur, la fel ca în metoda Cross: se obține $M_{31} = 0{,}167 \cdot 700 = +117$, $M_{34} = 0{,}5 \cdot 700 = +350$ și $M_{35} = 0{,}333 \times 700 = +233$. Momentele distribuite se transmit apoi la capetele opuse ale barelor: $M_{12} = -0{,}5 \cdot 117 = +59$, $M_{43} = 0{,}5 \cdot 350 = +175$, $M_{53} = 0{,}5 \cdot 233 = +117$. Încheierea echilibrării nodului s-a marcat prin linii pline în toate coloanele din jur. În mod asemănător se echilibrează și celelalte noduri, în ordinea *4*, *2*, *1*; după fiecare echilibrare se consideră reintrodusă blocarea respectivă.

Revenind acum la prima fază, se ridică din nou blocările gradelor de libertate. Se constată că s-au format noi momente de etaj, care au mărimile

$$M_{r1} = +96 + 57 + 136 + 68 = +357 \text{ și } M_{r2} = +233 + 105 + 117 + 53 = +508.$$

Aceste momente de etaj provoacă o nouă deplasare laterală a cadrului, datorită căreia apar noi momente distribuite în extremitățile stîlpilor, cu valori $+89$ și respectiv $+127$, care se înscriu în coloanele corespunzătoare. Urmează din nou faza a doua, de echilibrare a nodurilor în forma Cross, la care s-a folosit ordinea de deblocare *4*, *3*, *1*, *2*. Se continuă astfel pînă se ajunge la aproximația dorită; în cazul considerat au fost suficiente patru cicluri de calcul, obținînd valorile încadrate pe schemă (ce trebuie împărțite cu 10), care servesc la trasarea diagramei de momente încovoietoare.

2. Utilizarea „distorsiunilor" *(procedeul Csonka)*

Convergența mai slabă a iterației în procedeul Haller-Kranl provine de la folosirea separată a celor două categorii de necunoscute. În prima fază, deplasările pe direcțiile gradelor de libertate sînt libere, dar nodurile rămîn blocate contra rotirii, ceea ce mărește rigiditatea stîlpilor față de rigiditatea lor reală, și deci micșorează deplasările laterale ale riglelor. În faza a doua, nodurile sînt lăsate să se rotească liber, dar blocarea gradelor de libertate face să apară momente de etaj, care exprimă o tendință de deplasare laterală ce nu se poate manifesta. Înseamnă că, în fiecare fază, o dată cu stabilirea echilibrului pe direcția unei categorii de necunoscute, se creează un dezechilibru pe direcția celeilalte categorii de necunoscute.

O îmbunătățire simțitoare a convergenței iterației se poate obține prin introducerea unei faze intermediare, în care sistemul de bază geometric nedeterminat cu deplasări laterale libere se încarcă cu grupări de necunoscute-rotiri de nod.

Considerînd separat fiecare riglă, se impune cadrului cîte o deplasare elastică de felul celei arătată în figura 210, *a*, denumită „distorsiune": toate nodurile situate pe această riglă suferă *rotiri egale*, în restul nodurilor se mențin blocările contra rotirii, iar deplasarea laterală a cadrului rămîne liberă. În figurile 210, *a-d* se văd cele patru distorsiuni care trebuie impuse cadrului considerat. Pentru fiecare riglă intermediară, în distorsiunea respectivă se deformează atît rigla, cît și stîlpii din cele două etaje alăturate acesteia. Pentru rigla superioară, distorsiunea afectează numai etajul superior.

Procedeul este stabilit pentru cazul cînd toți stîlpii unui etaj au *aceleași rezemări*. În figura 210, *d* este arătată diagrama de momente încovoietoare ce corespunde uneia dintre distorsiuni. Datorită particularităților admise pentru structură, ordonatele diagramei sînt constante pe stîlpi, iar pe rigle anularea se produce la mijlocul deschiderii. Rezultă că pe stîlpi nu există forță tăietoare și deci la un anumit etaj se poate utiliza condiția $T_{jk} = 0$ pentru fiecare stîlp în parte.

În funcție de rotirea impusă nodurilor riglei considerate, de exemplu rotirea θ'_i a nodurilor riglei etajului i, momentele de capăt care se dezvoltă în barele deformate se stabilesc după cum urmează:

(a) Pentru *riglă*, momentul de capăt din secțiunea de lîngă un nod j, datorit rotirii egale a nodurilor de la extremitățile porțiunii de riglă j-k, este

$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_i+\rho'_{kj}u_{kj}\theta'_i=\bar{\rho}'_{jk}\theta'_i=C'_{jk}i'_{jk}\theta'_i. \qquad (a)$$

unde s-a ținut seama că $\rho'_{jk}+\rho'_{kj}u_{kj}=\rho'_{jk}(1+u_{jk})=\bar{\rho}'_{jk}$ și s-a introdus notația C'_{jk} definită prin

$$\bar{\rho}'_{jk}=C'_{jk}i'_{jk}.$$

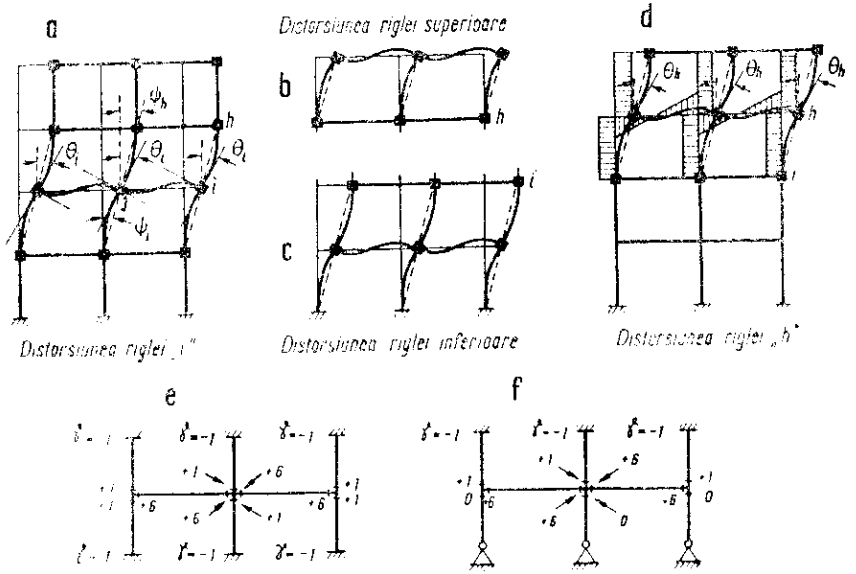


Fig. 210

(b) Pentru un *stîlp* oarecare j-k din etajul i, momentele de capăt datorite rotirii nodului j cu θ_i și a axei stîlpului cu ψ_i (fig. 210, *a*) sînt

$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_i-\rho'_{jk}\psi'_i \text{ și } M_{kj}=\rho'_{kj}u_{jk}\theta'_i-\rho'_{kj}\psi'_i.$$

Ținînd condiția $T_{jk}=0$ conduce la relația

$$M_{jk}+M_{kj}=\rho'_{jk}(1+u_{jk})\theta'_i-(\rho'_{jk}+\bar{\rho}'_{kj})\psi'_i=0.$$

care se mai poate scrie

$$\bar{\rho}'_{jk}\theta'_i-(\bar{\rho}'_{jk}+\bar{\rho}'_{kj})\psi'_i=0, \text{ deci } \psi'_i=\theta'_i\cdot\rho'_{jk}/(\bar{\rho}_{jk}+\rho'_{kj}). \qquad (b)$$

Relația (*b*) scoate în evidență particularitatea pe care trebuie să o îndeplinească structura pentru a se putea utiliza condiția $T_{jk}=0$ la fiecare stîlp în parte al etajului. Deoarece tuturor nodurilor riglei li se impune aceeași rotire θ_i, iar rotirea ψ_i a axelor stîlpilor este aceeași pe etaj, rezultă $\bar{\rho}'_{jk}/(\rho'_{jk}+\rho'_{kj})=\text{const.}$ la toți stîlpii etajului respectiv.

Introducînd în expresiile momentelor de capăt, se obține

$$M_{jk}=C^s_{jk}\,i'_{jk}\,\theta'_i \quad \text{și} \quad M_{kj}=C^s_{kj}\,i'_{jk}\theta'_i, \tag{c}$$

unde coeficienții C^s_{jk} și C^s_{kj} sînt definiți de relațiile

$$C^s_{jk}\,i'_{jk}=\rho'_{jk}-\frac{\bar{\rho}'_{jk}}{1+\bar{\rho}'_{kj}/\bar{\rho}'_{jk}} \quad \text{și} \quad C^s_{kj}\,i'_{jk}=\rho'_{jk}\mu_{jk}-\frac{\bar{\rho}'_{kj}}{1+\bar{\rho}'_{kj}/\bar{\rho}'_{jk}}. \tag{d}$$

Momentul de capăt M_{kj}, de la extremitatea stîlpului opusă nodului care se rotește, se mai poate calcula pornind de la M_{jk} și folosind un factor de transmitere γ_{jk} definit astfel

$$M_{kj}=\gamma_{jk}M_{jk}, \text{ deci } \gamma_{jk}=C^s_{kj}/C^s_{jk}. \tag{e}$$

Rezolvarea fazei intermediare, arătată mai sus, a fost făcută în funcție de rotirea θ_i care se impune nodurilor de pe rigla i în distorsiunea corespunzătoare acestei rigle. Mărimea rotirii θ_i se obține integrînd faza intermediară în procesul rezolvării într-o singură etapă a cadrului etajat.

După efectuarea primei faze, în care sistemul de bază cu noduri blocate contra rotirii a fost lăsat să se deplaseze liber sub acțiunea sarcinilor orizontale, la noduri s-au acumulat momente neechilibrate. În loc de a trece direct la faza a doua, permițînd nodurilor să se rotească liber pe cadrul cu grade de libertate blocate, se intercalează faza intermediară. Ca semnificație fizică, aceasta înseamnă să se impună nodurilor de pe fiecare rigă *o rotire medie*, însoțită de deplasarea laterală corespunzătoare a cadrului, urmînd ca în faza a doua — o dată cu deblocarea nodurilor și fixarea gradelor de libertate — să se producă numai diferențele de rotiri ale nodurilor de pe aceeași rigă. Distorsiunea dată unei rigle nu afectează echilibrul existent pe direcția gradelor de libertate.

Momentele pe capetele barelor din jurul nodului j, produse de distorsiunea corespunzătoare riglei i (fig. 210, *a*), au forma $M_{jk}=C_{jk}i'_{jk}\theta'_i$, unde pentru rigle se introduc coeficienții C'_{jk}, iar pentru stîlpi — coeficienții C^s_{jk}. Momentul neechilibrat din nod, rezultat în prima fază, este $\bar{M}_j$. Mărimea rotirii medii θ_i se stabilește prin condiția ca *suma momentelor produse de distorsiune pe toate capetele de bare din jurul nodurilor de pe rigla i să echilibreze suma momentelor neechilibrate în aceste noduri*. Se obține

$$\sum_i\sum_j C_{jk}i'_{jk}\cdot\theta'_i-\sum_i\bar{M}_j=0, \text{ deci } \theta'_i=\sum_i\bar{M}_j/\sum_i\sum_j C_{jk}i'_{jk},$$

astfel că momentele de capăt ce rezultă pentru această rotire medie sînt

$$M_{jk}=d^*_{jk}\sum_i\bar{M}_j, \text{ unde } d^*_{jk}=C_{jk}i'_{jk}/\sum_i\sum_j C_{jk}i'_{jk} \tag{13.22}$$

este *factorul de distribuție prin distorsiune*. Se pot calcula astfel momentele de pe toate capetele de bare din jurul nodurilor situate pe rigla i. Momentele de la extremitățile opuse ale stîlpilor se obțin folosind factorii de transmitere γ_{jk} definiți prin relația (e).

Distribuția prin distorsiune a sumei momentelor neechilibrate și transmiterile la capetele opuse ale stîlpilor se efectuează separat pentru fiecare rigă a cadrului,

înscriind momentele de capăt obținute în coloanele de calcul ale extremităților respective de bare. Se trece apoi la efectuarea fazei a doua.

La cadre etajate cu bare de secțiune *constantă* ($\rho_{jk}=i_{jk}$, $\bar{\rho}_{jk}=\bar{\rho}_{kj}=1{,}5\,i_{jk}$, $\mu_{jk}=0{,}5$), încastrate peste tot la extremități, se obține din expresiile (a)—(e)

$$C^r_{jk}=3/2,\quad C^s_{jk}=1/4,\quad C^s_{kj}=-1/4,\quad \gamma_{jk}=C^s_{kj}/C^s_{jk}=-1. \tag{13.23}$$

Cînd stîlpii inferiori ar fi *articulați* la bază, se obține $C^s_{jk}=C^s_{kj}=0$. Deoarece în expresia (13.22) a factorului de distribuție prin distorsiune coeficienții C_{jk} intră atît la numărător cît și la numitor, se poate lucra cu mărimi proporționale, multiplicînd valorile obținute cu patru. Rezultă mărimile coeficienților din figurile 210, *e* și *f*, care corespund celor două cazuri curente de rezemări la partea inferioară a stîlpilor. În caz că una din rigle ar fi articulată la extremitatea *k*, rezultă $C^r_{jk}=3/4$, și deci după multiplicare cu 4 se ajunge la coeficientul 3.

În legătură cu utilizarea distorsiunilor trebuie observate următoarele:

(1) Introducerea acestei faze mărește convergența procesului iterativ, în special la cadrele cu stîlpi mai rigizi ca riglele, dar are dezavantajul de a complica schema de calcul. Se ajunge la trei categorii diferite de operații de distribuție în fiecare ciclu, caracterizate prin factorii de distribuție d_{jk}, $\bar{d}_{jk}$ și d^*_{jk}. Eficiența fazei intermediare se manifestă în special la primele cicluri de calcul, cînd apar la noduri momente neechilibrate importante după efectuarea primei faze. În consecință, este deseori suficient să se utilizeze distorsiuni numai în aceste prime cicluri, în continuare efectuînd alternativ cele două faze obișnuite.

(2) Se pot întîlni și cazuri cînd faza suplimentară a distorsiunilor să înlocuiască faza a doua (echilibrarea nodurilor cu grade de libertate blocate). Aceasta se realizează cînd, prin alcătuirea cadrului și caracterul încărcării, nodurile situate pe cîte o riglă au *efectiv* aceeași rotire în poziția deformată (anumite cadre etajate simetrice încărcate antisimetric, grinzi Vierendeel etc.). Înseamnă că distorsiunea corespunde aici deformării reale a cadrului. Prima fază se execută o singură dată la început, iar apoi se aplică faza distorsiunilor de cîteva ori, pînă la închiderea iterației.

D. METODE MATRICEALE ADAPTATE CALCULULUI AUTOMAT

1. Caracteristici

Răspîndirea calculatoarelor electronice a adus modificări esențiale în modul de a privi metodele de calculul structurilor. Posibilitatea de a trece calculele numerice asupra mașinii și deci faptul că volumul de calcule nu mai constituie un obstacol, deschide căi noi de abordare în alegerea, sistematizarea și aplicarea metodelor de calcul.

În condițiile calculului manual, la utilizarea metodelor generale pentru calculul structurilor static nedeterminate accentul era pus pe simplificarea ecuațiilor de condiție, pentru a ușura operațiile numerice de rezolvare. Din acest motiv,

la examinarea metodei eforturilor, s-a dat atenție procedeelor bazate pe gruparea de necunoscute, care urmăresc să elimine cît mai mulți coeficienți secundari din matricea de flexibilitate, pe calea ortogonalizării perechilor de diagrame unitare. De asemenea, în capitolele precedente s-a urmărit reducerea numărului de necunoscute prin utilizarea sub diferite forme a sistemelor de bază static nedeterminate sau geometric nedeterminate, cale utilizată în numeroase procedee de calcul. În specificul metodei deplasărilor, prima parte a capitolului de față a fost consacrată metodelor iterative de calcul efectuate pe scheme de transmiteri, care la cadre cu noduri fixe elimină necesitatea scrierii și rezolvării efective a ecuațiilor de condiție, iar la cadre cu noduri deplasabile aduc de asemenea simplificări substanțiale.

Odată cu apariția mijloacelor de calcul automat, ponderea criteriilor arătate începe să se modifice. Într-o primă etapă, orientarea nu se schimbă sensibil și metodele de calcul rămîn în aceeași formă, dar proiectantul trece asupra mașinii calculele laborioase, cum ar fi rezolvarea ecuațiilor de condiție. O formă mai avansată a fost discutată anterior, pentru ambele metode generale, cînd s-au prezentat formulările matriceale și schemele logice din figurile 143 și 195. Acestea corespund unor procedee de calcul în care proiectantul are de stabilit numai diagramele de eforturi date de încărcarea succesivă a sistemului de bază cu sarcini și necunoscute; în continuare, se calculează automat coeficienții și termenii liberi, se rezolvă ecuațiile de condiție și se determină ordonatele totale ale diagramelor de eforturi pentru diferitele situații de încărcare.

Extinderea dotării cu calculatoare aduce modificări radicale de orientare. Apare firesc să se urmărească acum în primul rînd automatizarea *integrală* a calculului. Devine deci necesar ca procedeul de calcul să poată fi descompus *în întregime* în operații simple și totodată să poată fi aplicat fără adaptări la o gamă cît mai largă de cazuri, pentru utilizarea eficientă a programului. Metodele generale trebuie deci reconsiderate, spre a se ajunge la forme de sistematizare corespunzătoare noilor cerințe. În același timp, limitele determinate de volumul calculelor numerice își pierd în bună măsură ponderea.

Noile criterii duc la o accentuare a avantajelor metodei deplasărilor, care datorită sistemului de bază unic se pretează mai bine la sistematizări de formă generală. *În condițiile calculului automatizat, metoda deplasărilor devine astfel instrumentul principal în calculul structurilor* și domeniul său de aplicare este în continuă extindere. Necesitatea unei formulări unitare a ecuațiilor de condiție ale metodei, care să permită alcătuirea unui algoritm general aplicabil, impune însă *un nou mod de alegere a necunoscutelor*.

Cît timp metoda deplasărilor se aplică manual, o simplificare de bază constă în neglijarea deformării axiale a barelor. Apare astfel implicit o clasificare a structurilor cu noduri rigide în două categorii — cu noduri fixe și cu noduri deplasabile. Pentru prima categorie toate necunoscutele sînt de același fel — rotiri de noduri și deci sînt posibile sistematizări cu caracter general. Pentru a doua categorie intervin și gradele de libertate elastică, anume posibilitățile distincte de translație a unor *grupe* de noduri, parametrii respectivi intrînd de asemenea în numărul necunoscutelor. Configurațiile gradelor de libertate elastică sînt însă specifice structurii studiate, ceea ce impune intervenția pro-

ieetantului pentru considerarea lor, cum s-a arătat la procedeul expus în legătură cu schema logică din figura 195.

O formulare generală devine posibilă numai dacă se evită acest inconvenient, anume *eliminînd diferența dintre cadre cu noduri fixe și cadre cu noduri deplasabile, prin considerarea în calcul a deformării axiale a barelor.* Translațiile fiecărui nod devin astfel necunoscute independente; prin aceasta numărul necunoscutelor crește, în schimb situația devine aceeași în toate nodurile, permițînd sistematizări cu caracter general. Înseamnă că:

— la structuri *plane* cu noduri rigide, fiecare nod aduce cîte *trei* necunoscute, anume translații după două direcții din plan și rotirea în jurul unei axe normale pe plan;

— la structuri *spațiale* cu noduri rigide, fiecare nod aduce cîte *șase* necunoscute, anume translații după trei direcții și rotiri în jurul axelor respective.

Pentru unificarea situației, sarcinile aplicate în cursul barelor se reduc la noduri, așa cum s-a arătat în legătură cu figura 194, *b*, urmînd ca în final eforturile de încastrare perfectă să se suprapună peste eforturile de capăt rezultate din calcul. Înseamnă că *structura apare încărcată numai cu forțe exterioare aplicate în noduri.*

Acest mod de alegere a necunoscutelor și de reducere a sarcinilor simplifică alcătuirea ecuațiilor de condiție, care se obțin exprimînd echilibrul fiecărui nod în parte sub acțiunea sarcinilor și a eforturilor din barele care concură în nod. Devine astfel posibilă o formulare generală, deosebit de simplă și aplicabilă oricărei structuri, indiferent dacă este structură plană sau spațială. În această concepție, *structura este privită drept un ansamblu de bare, prinse rigid între ele la noduri.* Sistemul de bază rezultă blocînd la fiecare nod toate posibilitățile de deplasare ale acestuia (trei blocări în cazul structurilor plane, șase blocări la structuri spațiale). Este deci necesar pe de o parte să se studieze bara ca element component al structurii, care poate fi încărcată numai cu deplasări impuse la extremități, iar pe de altă parte să se asambleze barele în structură pe baza condițiilor de echilibru ale nodurilor.

Realizarea acestor două etape conduce la utilizarea a două sisteme de referință. Este firesc ca pentru studiul barei să se adopte sistemul de axe propriu acesteia, în raport cu care sînt definite eforturile, în timp ce pentru asamblarea barelor în structură — să se folosească un sistem de axe general. Implicit, devine necesar să se studieze și posibilitățile de trecere sistematizată de la un sistem de referință la celălalt.

2. Bara — element component al structurii

a. **Relații preliminare.** În figura 211 sînt indicate eforturile de capăt și deplasările pentru o bară oarecare *i* a unei structuri plane, cuprinsă între nodurile *j* și *k* (sensul de parcurgere $j \rightarrow k$, unde $j < k$); apar două variante, după cum se utilizează sistemul de axe al barei (fig. 211, *a* și *c*), respectiv sistemul de axe al structurii (fig. 211, *b* și *d*). Pentru unificarea convențiilor de semne,

se admite că eforturile de capăt și deplasările sînt pozitive, *la oricare dintre capetele barei*, cînd sînt dirijate în sensul pozitiv al axelor respective[1].

La fiecare extremitate a barei, eforturile și deplasările formează cîte o matrice-coloană (vector), de exemplu pentru extremitatea j:

$$\bar{\mathbf{E}}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}_j = \begin{bmatrix} \delta_{jt} \\ \delta_{jn} \\ \theta_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \theta_j \end{bmatrix}, \tag{13.24}$$

unde s-au utilizat simboluri *barate* în cazul raportării la sistemul de axe al barei și simboluri *nebarate* cînd raportarea se face la sistemul de axe al structurii. Între acești vectori se pot scrie diferite corelații utilizînd matrice de trecere sau de transformare. Astfel:

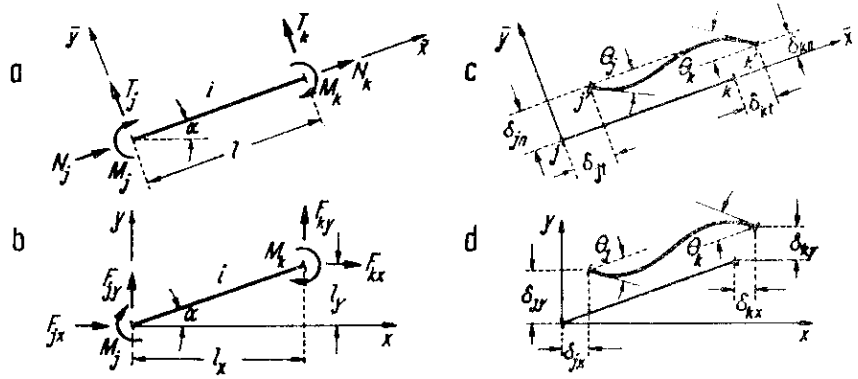


Fig. 211

(a) Din condiția de echilibru a barei, exprimată prin reducerea tuturor eforturilor de capăt în extremitatea k, rezultă pentru cele două variante:

$$\begin{aligned} &N_j + N_k = 0, \\ &T_j + T_k = 0, \\ &M_j + T_j l + M_k = 0, \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} &F_{jx} + F_{kx} = 0, \\ &F_{jy} + F_{ky} = 0, \\ &M_j - F_{jx} l_y + F_{jy} l_x + M_k = 0, \end{aligned}$$

care se pot scrie sub forma matriceală

$$\bar{\mathbf{t}}_{jk} \bar{\mathbf{E}}_j + \bar{\mathbf{E}}_k = 0, \quad \text{respectiv} \quad \mathbf{t}_{jk} \mathbf{E}_j + \mathbf{E}_k = 0, \tag{13.25}$$

unde intervin matricele de trecere de la extremitatea j la extremitatea k

$$\bar{\mathbf{t}}_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{t}_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -l_y & l_x & 1 \end{bmatrix}, \tag{13.26}$$

în care $l_x = l \cos \alpha$ și $l_y = l \sin \alpha$.

[1] Pentru claritate, s-au utilizat aici notațiile uzuale ale eforturilor de capăt (forțe și momente), sau deplasărilor (liniare și rotiri); mai departe se vor introduce notații cu caracter general.

(b) Pentru trecerea de la sistemul de axe al structurii la sistemul de axe al barei, se scrie:

$$N_j = F_{jx}\cos\alpha + F_{jy}\sin\alpha, \qquad \delta_{jt} = \delta_{jx}\cos\alpha + \delta_{jy}\sin\alpha,$$
$$T_j = -F_{jx}\sin\alpha + F_{jy}\cos\alpha, \qquad \delta_{jn} = -\delta_{jx}\sin\alpha + \delta_{jy}\cos\alpha,$$
$$M_j = M_j, \qquad \theta_j = \theta_j,$$

relații care pot fi exprimate matriceal sub forma

$$\bar{\mathbf{E}}_j = \mathbf{A}_0\mathbf{E}_j, \quad \text{unde} \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13.27}$$

sau $\bar{\mathbf{D}}_j = \mathbf{A}_0\mathbf{D}_j,$

reprezintă matricea de transformare ce corespunde unei rotiri a sistemului de axe.

(c) Între matricele de trecere $\bar{\mathbf{t}}_{jk}$ și $\mathbf{t}_{jk}$ se poate stabili o corelație, ținînd seama de transformarea (13.27). Din prima relație (13.25) rezultă

$$\bar{\mathbf{E}}_k = -\bar{\mathbf{t}}_{jk}\bar{\mathbf{E}}_j \quad \text{și deci} \quad \mathbf{A}_0\mathbf{E}_k = -\bar{\mathbf{t}}_{jk}\mathbf{A}_0\mathbf{E}_j,$$

unde premultiplicînd cu $\mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{A}_0^T$, se obține[1]

$$\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{E}_k = -\mathbf{A}_0^T\bar{\mathbf{t}}_{jk}\mathbf{A}_0\mathbf{E}_j, \text{ deci } \mathbf{t}_{jk} = \mathbf{A}_0^T\bar{\mathbf{t}}_{jk}\mathbf{A}_0, \tag{13.28}$$

deoarece $\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ și $\mathbf{E}_k = -\mathbf{t}_{jk}\mathbf{E}_j$.

(d) Dacă se consideră ansamblul eforturilor de capăt, sau a deplasărilor de capăt, se poate scrie pentru o anumită bară i

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_j \\ \bar{\mathbf{E}}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_j \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix}, \quad \text{sau} \quad \bar{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_j \\ \bar{\mathbf{D}}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_j \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix},$$

trecerea de la sistemul de axe al structurii la cel al barei având forma

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{A}\mathbf{E}_i, \quad \text{unde} \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{array}\right] \tag{13.29}$$

sau $\mathbf{D}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i,$

este o matrice globală de transformare, care cuprinde ca submatrice pe cele două matrice $\mathbf{A}_0$ corespunzătoare extremităților barei, așezate pe diagonală pentru a multiplica succesiv pe $\mathbf{E}_j$ și $\mathbf{E}_k$, respectiv pe $\mathbf{D}_j$ și $\mathbf{D}_k$.

b. **Matricea de rigiditate a barei.** Considerînd o bară cuprinsă între două noduri blocate j și k, se încarcă succesiv în j și în k cu fiecare dintre cele trei deplasări-unitate, admise în sistemul de axe al barei și se determină eforturile de capăt corespunzătoare (forță axială, forță tăietoare și moment încovoietor), care au caracter de reacțiuni unitare. Acestea măsoară rigiditatea barei pe direcțiile deplasărilor considerate.

[1] Este ușor de controlat că inversa matricei $\mathbf{A}_0$ este identică cu transpusa sa.

Corelația dintre eforturile de capăt și deplasări se scrie în formă matriceală

$$\bar{\mathbf{E}}_j=\bar{\mathbf{r}}_{jj}\bar{\mathbf{D}}_j+\bar{\mathbf{r}}_{jk}\bar{\mathbf{D}}_k \quad \text{și} \quad \bar{\mathbf{E}}_k=\bar{\mathbf{r}}_{kj}\bar{\mathbf{D}}_j+\bar{\mathbf{r}}_{kk}\bar{\mathbf{D}}_k, \tag{13.30}$$

unde $\bar{\mathbf{E}}_j$, $\bar{\mathbf{E}}_k$ și $\bar{\mathbf{D}}_j$, $\bar{\mathbf{D}}_k$ sînt matrice-coloană definite prin relațiile (13.24), iar $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$, $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$, $\bar{\mathbf{r}}_{kj}$ și $\bar{\mathbf{r}}_{kk}$ sînt matrice pătrate avînd dimensiuni (3.3), ale căror elemente sînt reacțiunile unitare obținute din încărcarea extremităților barei cu deplasări-unitate. Cele două relații (13.30) se pot cuprinde într-o singură relație de forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{E}}_j\\ \cdots\\ \bar{\mathbf{E}}_k\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{E}}_i}=\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\bar{\mathbf{r}}_{jj} & \bar{\mathbf{r}}_{jk}\\ \cdots & \cdots\\ \bar{\mathbf{r}}_{kj} & \bar{\mathbf{r}}_{kk}\end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{r}}_i}\underbrace{\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{D}}_j\\ \cdots\\ \bar{\mathbf{D}}_k\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_i} \tag{13.31}$$

unde matricele-coloană $\bar{\mathbf{E}}_i$ și $\bar{\mathbf{D}}_i$ cuprind succesiunea celor șase eforturi de capăt și respectiv deplasări de capăt ale barei i, iar matricea pătrată $\bar{\mathbf{r}}_i$ — *numită și matrice de rigiditate a barei*, care are dimensiuni (6.6), cuprinde ca submatrice pe $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$, $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$, $\bar{\mathbf{r}}_{kj}$ și $\bar{\mathbf{r}}_{kk}$.

Alcătuirea matricei $\bar{\mathbf{r}}_i$ se face de obicei direct pentru toate elementele, cum se arată în paragraful următor. Există și posibilitatea de a alcătui direct numai submatricea $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$, urmînd ca celelalte trei submatrice să fie determinate prin operații matriceale. Într-adevăr, pe baza relațiilor de echilibru a barei (13.25), se poate scrie

$$\bar{\mathbf{t}}_{jk}\bar{\mathbf{r}}_{jj}+\bar{\mathbf{r}}_{kj}=0 \quad \text{și} \quad \bar{\mathbf{t}}_{jk}\bar{\mathbf{r}}_{jk}+\bar{\mathbf{r}}_{kk}=0,$$

iar condiția de reciprocitate a reacțiunilor unitare arată că matricea $\bar{\mathbf{r}}_i$ este simetrică; înseamnă că submatricele $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$ sau $\bar{\mathbf{r}}_{kk}$ sînt simetrice și în consecință $\bar{\mathbf{r}}_{jj}=\bar{\mathbf{r}}_{jj}^T$, respectiv $\bar{\mathbf{r}}_{kk}=\bar{\mathbf{r}}_{kk}^T$, iar între submatricele $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$ și $\bar{\mathbf{r}}_{kj}$ există relația $\bar{\mathbf{r}}_{jk}=\bar{\mathbf{r}}_{kj}^T$, care asigură simetria elementelor față de diagonala principală. Rezultă deci

$$\bar{\mathbf{r}}_{kj}=-\bar{\mathbf{t}}_{jk}\bar{\mathbf{r}}_{jj},$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{jk}=\bar{\mathbf{r}}_{kj}^T=-\bar{\mathbf{r}}_{jj}\bar{\mathbf{t}}_{jk}^T, \qquad \bar{\mathbf{r}}_{kk}=-\bar{\mathbf{t}}_{jk}\bar{\mathbf{r}}_{jk}=\bar{\mathbf{t}}_{jk}\bar{\mathbf{r}}_{jj}\bar{\mathbf{t}}_{jk}^T. \tag{13.32}$$

Toate relațiile de mai sus sînt scrise în sistemul de axe al barei i. Pentru integrarea barei în structură trebuie să se treacă la sistemul de axe al structurii. Între eforturile de capăt și deplasările de capăt, definite în acest sistem de axe, se pot scrie corelații similare cu (13.30), anume

$$\mathbf{E}_j=\mathbf{r}_{jj}\mathbf{D}_j+\mathbf{r}_{jk}\mathbf{D}_k \quad \text{și} \quad \mathbf{E}_k=\mathbf{r}_{kj}\mathbf{D}_j+\mathbf{r}_{kk}\mathbf{D}_k, \tag{13.33}$$

care pot fi de asemenea grupate într-o singură relație de forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{E}_j\\ \cdots\\ \mathbf{E}_k\end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_i}=\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{r}_{jj} & \mathbf{r}_{jk}\\ \cdots & \cdots\\ \mathbf{r}_{kj} & \mathbf{r}_{kk}\end{array}\right]}_{\mathbf{r}_i}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{D}_j\\ \cdots\\ \mathbf{D}_k\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_i}, \tag{13.34}$$

unde matricea de rigiditate $\mathbf{r}_i$ are dimensiuni (6.6) pentru bare aparținînd structurilor plane.

Matricea $\mathbf{r}_i$ poate fi obținută pornind de la matricea $\bar{\mathbf{r}}_i$ și anume în două moduri:

(1) O primă cale urmărește determinarea separată a celor patru submatrice pornind numai de la submatricea $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$. Procedînd asemănător ca la stabilirea relațiilor (13.32), anume utilizînd condiția (13.25) de echilibru a barei scrisă în sistemul de axe al structurii, de asemenea condiția de simetrie a matricei $\mathbf{r}_i$, se găsește

$$\mathbf{r}_{kj} = -\mathbf{t}_{jk}\mathbf{r}_{jj}, \qquad \mathbf{r}_{jk} = -\mathbf{r}_{jj}\mathbf{t}_{jk}^T, \qquad \mathbf{r}_{kk} = \mathbf{t}_{jk}\mathbf{r}_{jj}\mathbf{t}_{jk}^T, \tag{13.35}$$

astfel că toate aceste trei submatrice pot fi determinate dacă se cunoaște matricea $\mathbf{r}_{jj}$. Această submatrice rezultă pornind de la relațiile (13.27) și (13.30), admițînd încărcarea cu deplasări în extremitatea j, anume

$$\bar{\mathbf{E}}_j = \bar{\mathbf{r}}_{jj}\bar{\mathbf{D}}_j \quad \text{și deci} \quad \mathbf{A}_0\mathbf{E}_j = \bar{\mathbf{r}}_{jj}\mathbf{A}_0\mathbf{D}_j,$$

unde premultiplicînd cu $\mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{A}_0^T$ se obține

$$\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{E}_j = \mathbf{A}_0^T\bar{\mathbf{r}}_{jj}\mathbf{A}_0\mathbf{D}_j, \quad \text{sau} \quad \mathbf{r}_{jj} = \mathbf{A}_0^T\bar{\mathbf{r}}_{jj}\mathbf{A}_0, \tag{13.36}$$

deoarece $\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ și $\mathbf{E}_j = \mathbf{r}_{jj}\mathbf{D}_j$. Înseamnă că submatricea $\mathbf{r}_{jj}$ poate fi obținută direct din submatricea $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$.

(2) O a doua cale urmărește formarea directă a matricei $\mathbf{r}_i$ din matricea $\bar{\mathbf{r}}_i$ admițînd că aceasta a fost alcătuită. De data aceasta se utilizează relația (13.29), unde intervine matricea globală de transformare $\mathbf{A}$, precum și relația (13.31), anume

$$\bar{\mathbf{E}}_i = \bar{\mathbf{r}}_i\bar{\mathbf{D}}_i \qquad \text{și deci} \qquad \mathbf{A}\mathbf{E}_i = \bar{\mathbf{r}}_i\mathbf{A}\mathbf{D}_i,$$

unde premultiplicînd cu $\mathbf{A}^{-1}$ se obține

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}_i = \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{r}}_i\mathbf{A}\mathbf{D}_i, \quad \text{sau} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{r}}_i\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_i\mathbf{A}, \tag{13.37}$$

deoarece $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ și $\mathbf{E}_i = \mathbf{r}_i\mathbf{D}_i$, iar $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ cum se arată mai jos.

Într-adevăr, inversarea matricei $\mathbf{A}$ poate fi realizată direct dacă se pornește de la relația de definiție

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{array}\right]}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]}_{\mathbf{A}^{-1}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]}_{\mathbf{I}},$$

din explicitarea căreia rezultă condițiile

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_0\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I} \quad \text{și} \quad \mathbf{A}_0\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_0\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0},$$

condiții care sînt îndeplinite pentru

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} = \mathbf{0} \quad \text{și} \quad \mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{A}_0^T,$$

deci

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_0^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0^T & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_0^T \end{array}\right] = \mathbf{A}^T \tag{13.38}$$

matrice care urmează a fi introdusă în relația (13.37).

Odată cunoscută matricea de rigiditate $\mathbf{r}_i$ în sistemul de axe general, se poate trece la încadrarea barei în structură.

3. Alcătuirea matricei de rigiditate a barei

Formarea matricei $\bar{\mathbf{r}}_i$, care intervine în relația (13.37) și care cuprinde ca una dintre submatrice pe $\mathbf{r}_{jj}$ utilizată în relațiile (13.35) și (13.36), implică încărcarea succesivă a extremităților barei — admise inițial blocate la orice deplasare — cu fiecare dintre deplasările-unitate și determinarea eforturilor de capăt corespunzătoare.

Se începe cu cazul uzual al unei bare făcînd parte dintr-o structură plană încărcată în planul său (mai întîi pentru o structură cu noduri rigide, apoi pentru o structură articulată), urmînd ca în continuare să se dea indicații și privitor la cazul general al structurilor spațiale cu noduri rigide, precum și al structurilor plane încărcate normal pe plan. Pentru comparație, se consideră cazul barei cu secțiune constantă. Totodată, în vederea uniformizării notațiilor, elementele matricelor-coloană $\bar{\mathbf{E}}$ sau $\bar{\mathbf{D}}$ se vor nota generic

$$\bar{\mathbf{E}}_j = \{\bar{E}_{j1},\ \bar{E}_{j2},\ldots\} \quad \text{și} \quad \bar{\mathbf{E}}_k = \{\bar{E}_{k1},\ \bar{E}_{k2},\ldots\},$$

respectiv

$$\bar{\mathbf{D}}_j = \{\bar{D}_{j1},\ \bar{D}_{j2},\ldots\} \quad \text{și} \quad \bar{\mathbf{D}}_k = \{\bar{D}_{k1},\ \bar{D}_{k2},\ldots\},$$

numărul elementelor aferente unei extremități de bară fiind de trei sau șase, după cum bara face parte dintr-o structură plană sau spațială. Semnificația acestor notații și ordinea de numerotare, care va fi luată totdeauna aceeași pentru o anumită categorie de structuri, se vede în figura 212, *a-c*, unde s-au indicat eforturile de capăt din extremitatea *j* a unei bare, considerînd trei ca-

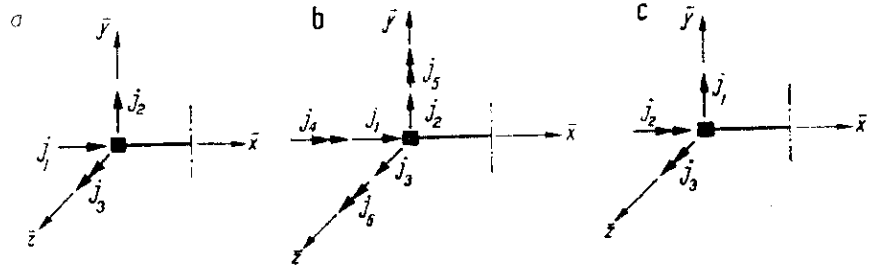
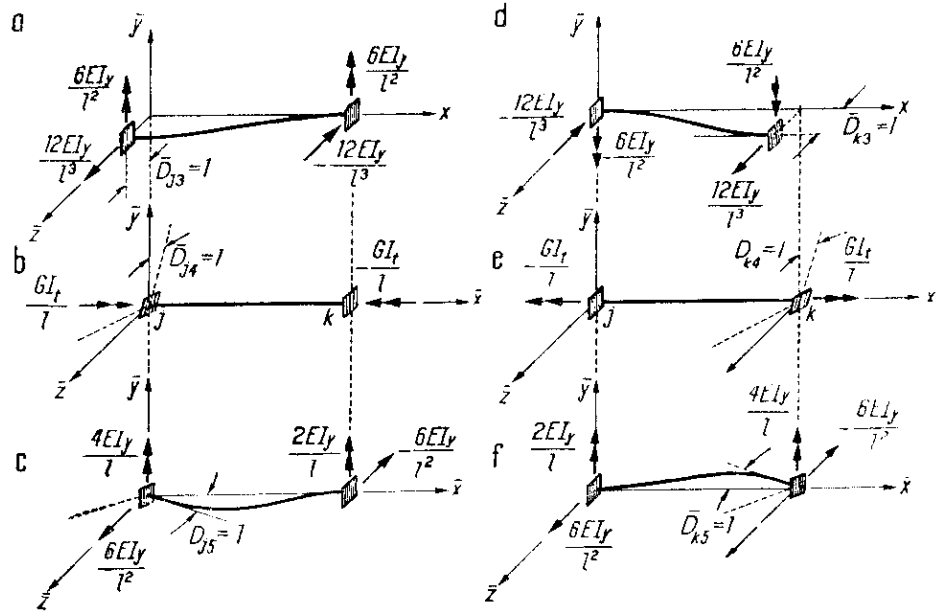


Fig. 212

tegorii de structuri: a) plane și încărcate în planul lor; b) spațiale oarecare; c) plane și încărcate normal pe plan. Aceeași numerotarea se admite și pentru deplasările respective.[1]

a. **Bară dintr-o structură plană.** Considerînd structura cu noduri rigide situată în planul *xoy*, în figura 213, *a-f* sînt arătate cele șase cazuri de încăr-

[1] Vectorii-moment sau rotire sînt însemnați pe figură cu săgeată dublă; pentru acești vectori se admite regula „invers burghiului".



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\bar{r}_{jj}}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\bar{r}_{jk}}} \\ (j_1) & (j_2) & (j_3) & (k_1) & (k_2) & (k_3) \end{array} \\
r_i = & \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{array}\right] \begin{array}{c} (j_1) \\ (j_2) \\ (j_3) \\ (k_1) \\ (k_2) \\ (k_3) \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{r}_{kj}}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{r}_{kk}}} \end{array}
\end{array}
$$

Fig. 213. Matrice de rigiditate pentru o bară dintr-o structură plană.

care, cîte trei pentru fiecare extremitate. Eforturile de capăt sînt figurate cu sensurile lor efective, înscriindu-se și semnele corespunzătoare pe baza convenției din figura 211, *a*. Determinarea eforturilor de capăt pentru încărcarea cu deplasări-unitate este cunoscută din capitolul precedent, intervenind aici sub formă particularizată corespunzătoare barelor cu secțiune constantă. Astfel, pentru încărcarea cu $\delta_{j1}=\bar{D}_{j1}=1$ (fig. 213, *a*), apar eforturile de capăt $E_{j1}=-\bar{E}_{k1}=EA/l$. Cazurile de încărcare cu $\delta_{j2}=\bar{D}_{j2}=1$ și cu $\theta_j=\bar{D}_{j3}=1$ corespund celor întîlnite anterior în figura 165, anume încărcare cu rotirea de bară $\psi_{jk}=1/l$ și încărcare cu rotirea de nod $\theta_j=1$, rezultînd eforturile de capăt înscrise în figura 213, *b* și *c*.

Cu aceste elemente se formează matricea de rigiditate $\bar{\mathbf{r}}_i$ din figura 213. Fiecărui caz de încărcare cu cîte o deplasare-unitate îi corespunde o coloană a matricei, elementele respective reprezentînd succesiv cele șase eforturi ce se dezvoltă în extremitățile barei. Fiecare rînd al matricei se referă la un anumit efort de capăt, elementele rîndului reprezentînd mărimile acestui efort pentru încărcarea succesivă cu cele șase deplasări-unitate.

Matricea $\bar{\mathbf{r}}_i$ din figura 213, cu dimensiuni (6.6), se referă la o bară cuprinsă între două noduri. Pentru bare ce leagă un nod j de o extremitate k perfect încastrată, din această matrice sînt utile numai primele trei coloane, deoarece deplasările componente ale matricei $\bar{\mathbf{D}}_k$ sînt toate nule. De fapt, pentru bare ce leagă noduri de rezemări, în ecuațiile de echilibru ale nodurilor intervin numai submatricele $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$, urmînd ca pentru extremitatea k eforturile de capăt să se determine pe baza primei relații (13.33), anume $\mathbf{r}_{kj}=-\mathbf{t}_{jk}\bar{\mathbf{r}}_{jj}$.

Forma generală a matricei $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$, pentru o bară care la extremitatea opusă nodului are o rezemare oarecare, se scrie

$$\bar{\mathbf{r}}_{jj}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E}{l^2}(\xi_{jk}+\xi_{kj}) & \frac{4E}{l}\xi_{jk} \\ 0 & \frac{4E}{l}\xi_{jk} & 4E\xi_{jk} \end{bmatrix} \tag{13.39}$$

unde coeficienții de rigiditate ξ și ξ se iau din tabela 8, corespunzător gradului de încastrare din capătul k. Astfel, pentru cele două cazuri uzuale $r_{jk}=1$ ($\xi_{jk}=1/4$, $\xi_{jk}=3I/2l$) și $r_{jk}=0$ ($\xi_{jk}=\xi_{jk}=3I/4l$), se obțin matricele

$$\bar{\mathbf{r}}_{jj}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (r_{jk}=1) \qquad \bar{\mathbf{r}}_{jj}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (r_{jk}=0) \tag{13.40}$$

În cazul unei structuri *articulate* plane situația se simplifică, în fiecare extremitate a barei intervenind numai cîte două deplasări, corespunzătoare nodu-

rilor respective, anume δ_{jt} și δ_{jn} (fig. 211, *c*), respectiv δ_{jx} și δ_{jy} (fig. 211, *d*). Asemănător, în fiecare extremitate intervin numai cîte două eforturi: N_j și $T_j = 0$ pentru sistemul de axe al barei, respectiv F_{jx} și F_{jy} pentru sistemul de axe al structurii. Înseamnă că matricele-coloană (13.24) cuprind fiecare numai primele două elemente, corespunzătoare direcțiilor j_1 și j_2 din figura 212, *a*. Totodată, matricele $\mathbf{t}_{jk}$, $\mathbf{A}_0$ și $\mathbf{A}$ date de relațiile (13.26) — (13.29) devin

$$\mathbf{t}_{jk} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_0 \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right], \quad \mathbf{A} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{A}_0 \end{array}\right] \tag{13.11}$$

Matricea de rigiditate $\mathbf{r}_i$ a barei dublu articulate are forma

$$\bar{\mathbf{r}}_i \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \frac{EA}{l} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{13.12}$$

deoarece încărcarea cu deplasări de forma $D_{j_2} = \delta_{j_2} = 1$ nu produce eforturi în bară. Pentru obținerea matricei $\mathbf{r}_i$, corespunzătoare sistemului de axe al structurii, se utilizează relația (13.37) și anume $\mathbf{r}_i = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{A}$, care în acest caz conduce la

$$\mathbf{r}_i \quad \frac{EA}{l} \left[\begin{array}{c|c} B & -B \\ \hline -B & B \end{array}\right], \quad \text{unde} \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} \cos^2\alpha & \cos\alpha \sin\alpha \\ \cos\alpha \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{array}\right]. \tag{13.13}$$

Toate celelalte relații rămîn neschimbate.

b. **Bară dintr-o structură spațială.** În acest caz, la fiecare extremitate de bară se dezvoltă cîte șase eforturi de capăt, reprezentate de trei forțe și trei momente, care vor fi considerate în ordinea: forță axială, forțe tăietoare dirijate respectiv după axele y și z, moment de torsiune, momente încovoietoare M_y și M_z. Numerotarea acestora, de la **1** la 6, se vede în figura 214, *a*; deplasările pe direcțiile respective se numerotează similar.

Intervin astfel cîte șase situații de încărcare cu deplasări-unitate la fiecare extremitate a barei. Dintre acestea, cîte trei situații sînt aceleași ca în figura 213, *a-f*, iar celelalte sînt arătate în figura 215, *a-f*, unde de asemenea s-au reprezentat eforturile de capăt corespunzătoare, cu semnele lor în raport cu convenția de semne admisă. Determinarea eforturilor de capăt pentru noile situații considerate se face în mod asemănător primelor, deoarece intervin aceleași cazuri de încărcare cu rotire de axă și rotire de nod, diferind numai axele după care acestea sînt aplicate. Pentru cazul torsiunii, intervine modulul de rigiditate GI_t al barei.

Înscriind rezultatele în coloanele corespunzătoare, se obține matricea de rigiditate $\bar{\mathbf{r}}_i$ din figura 216, cu dimensiuni (12.12), care poate fi descompusă în cele patru submatrice $\mathbf{r}_{jj}$, $\mathbf{r}_{jk}$, $\mathbf{r}_{kj}$ și $\mathbf{r}_{kk}$ de dimensiuni (6.6).

Este desigur posibil să se limiteze alcătuirea matricei $\bar{\mathbf{r}}_i$ numai la formarea submatricei $\mathbf{r}_{jj}$, ceea ce necesită determinarea celor șase eforturi de capăt din extremitatea j, utilizînd numai încărcările cu deplasări-unitate din această extremitate. În continuare, celelalte trei submatrice se stabilesc prin aplicarea relațiilor (13.32). Pentru aceasta este necesar să se cunoască matricele $\mathbf{t}_{jk}$ și $\mathbf{t}_{jk}$ corespunzătoare barei drepte în spațiu, care se obțin din condiția de echilibru a barei, similar cu relațiile (13.26).

În figura 214, *a* și *b* s-au reprezentat eforturile de capăt raportate la sistemul de axe al barei și respectiv la cel al structurii. Exprimînd în fiecare caz echilibrul prin reducerea tuturor eforturilor în extremitatea k, se obțin cîte șase ecuații care se pot scrie în formă matriceală

$$\overline{\mathbf{t}}_{jk}\,\overline{\mathbf{E}}_j+\overline{\mathbf{E}}_k=0 \quad \text{și} \quad \mathbf{t}_{jk}\,\mathbf{E}_j+\mathbf{E}_k=0,$$

unde intervin matricele de trecere $\overline{t}_{jk}$ și t_{jk} de dimensiuni (6.6), a căror alcătuire rezultă de forma

$$\overline{\mathbf{t}}_{jk}=\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \overline{\mathbf{C}} & \mathbf{I} \end{array}\right], \qquad \mathbf{t}_{jk}=\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{array}\right], \tag{13.44}$$

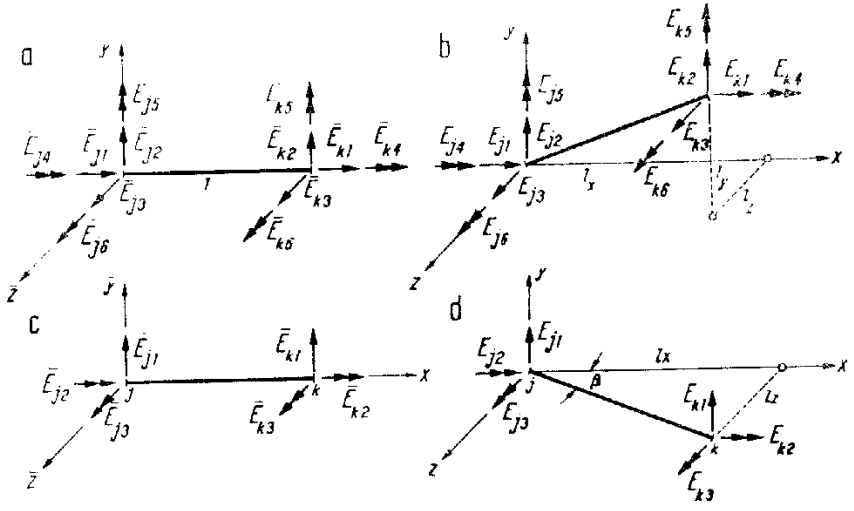


Fig. 214

în care pe diagonala principală apar submatrice unitare de dimensiuni (3.3), în timp ce submatricele $\overline{\mathbf{C}}$ și $\mathbf{C}$ sînt alcătuite astfel

$$\overline{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{13.45}$$

la prima intervenind lungimea l a barei, iar la a doua mărimile proiecțiilor l_x, l_y și l_z pe cele trei axe de referință ale structurii.

Mai rămîne să se stabilească și modalitatea de trecere de la sistemul de axe al barei la cel al structurii. Problema se reduce în fapt la a exprima cele trei componente ale unui vector, stabilite într-un sistem de axe, în funcție de componentele aceluiași vector în alt sistem de axe, rezultat din primul printr-o rotire oarecare în spațiu. Asemenea vectori intervin la fiecare extremitate de bară, fie pentru eforturile de capăt — anume vectorul componentelor-forțe și vectorul componentelor-momente, fie pentru deplasările de capăt — anume vectorul componentelor-deplasări liniare și vectorul componentelor-rotiri.

Pentru fiecare asemenea vector intervine o matrice de transformare $\mathbf{A}_1$ de dimensiuni (3.3), prin intermediul căreia componentele într-un sistem de axe se exprimă în funcție de componentele în celălalt sistem. Notînd cu $\overline{\mathbf{V}}$ matricea-coloană a componentelor în sistemul de axe

al barei și cu $\mathbf{V}$ matricea-coloană a componentelor în sistemul de axe al structurii, se definește matricea de transformare $\mathbf{A}_1$ sub forma

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}_1\mathbf{V}, \quad \text{unde} \quad \mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}. \tag{13.46}$$

Trecerea se face de la sistemul de axe al structurii la sistemul de axe al barei, iar elementele de pe fiecare rînd al matricei $\mathbf{A}_1$ sînt cosinusurile directoare ale cîte uneia dintre axele $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ față de sistemul de axe al structurii[1].

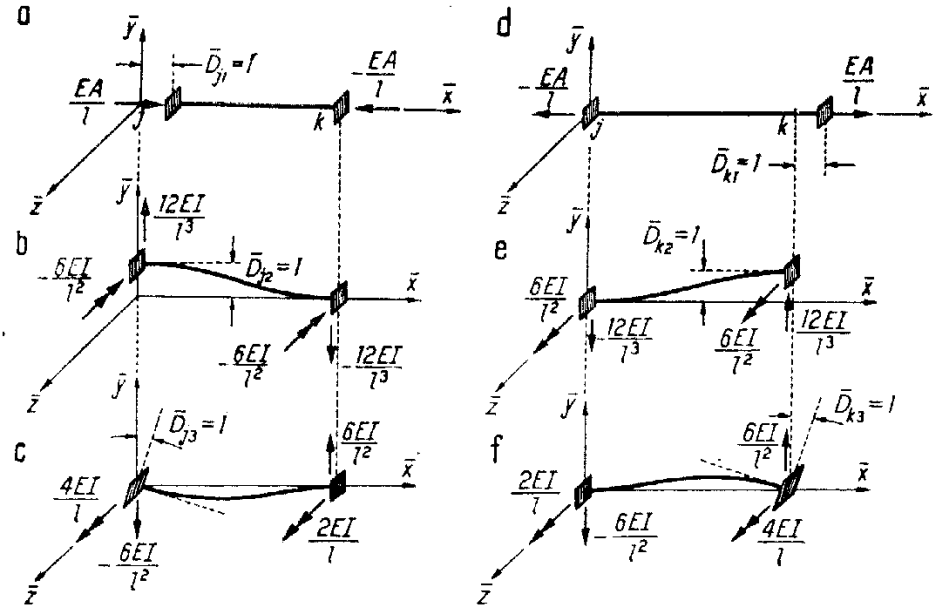


Fig. 215

La utilizarea matricei de transformare $\mathbf{A}_1$ trebuie ținut seama că, în cazul structurilor spațiale, ea a fost definită pentru grupe de cîte trei componente de același fel, spre deosebire de matricea $\mathbf{A}_0$ utilizată la structuri plane, care efectua transformarea pentru întreaga matrice-coloană a eforturilor de capăt dintr-o extremitate. În consecință, ținînd seama că în fiecare extremitate a barei dintr-o structură spațială eforturile de capăt reprezintă cîte doi vectori, relațiile (13.36) și (13.37) își păstrează aceeași formă, anume

$$\mathbf{r}_{jj}=\mathbf{A}_0^T\mathbf{r}_{jj}\mathbf{A}_0 \quad \text{și} \quad \mathbf{r}_i=\mathbf{A}^T\mathbf{r}_i\mathbf{A}.$$

[1] Stabilirea unei forme sistematizate a matricei $\mathbf{A}_1$, în care toate elementele să fie exprimate în funcție de un număr restrîns de date, este mai complicată; poate fi găsită în cărți de specialitate, pentru necesități de programare.

$\bar{r}_{jj}$ | $\bar{r}_{jk}$

(j_1)	(j_2)	(j_3)	(j_4)	(j_5)	(j_6)	(k_1)	(k_2)	(k_3)	(k_4)	(k_5)	(k_6)	
$\frac{EA}{l}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{l}$	0	0	0	0	0	(j_1)
0	$\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	(j_2)
0	0	$\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	(j_3)
0	0	0	$\frac{GI_t}{l}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GI_t}{l}$	0	0	(j_4)
0	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{4EI_y}{l}$	0	0	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{2EI_y}{l}$	0	(j_5)
0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{l}$	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{l}$	(j_6)
$-\frac{EA}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{l}$	0	0	0	0	0	(k_1)
0	$-\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	$\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	(k_2)
0	0	$-\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	(k_3)
0	0	0	$-\frac{GI_t}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_t}{l}$	0	0	(k_4)
0	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{2EI_y}{l}$	0	0	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{4EI_y}{l}$	0	(k_5)
0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{l}$	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{l}$	(k_6)

$\bar{r}_i =$

$\bar{r}_{kj}$ | $\bar{r}_{kk}$

Fig. 216. Matricea de rigiditate a unei bare dintr-o structură spațială.

cu condiția de a introduce pentru $\mathbf{A}_0$ și $\mathbf{A}$ următoarele matrice

$$\mathbf{A}_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{array}\right], \tag{13.47}$$

prima având dimensiunl (6.6), iar a doua (12.12). Formele date de relațiile (13.47) generalizează expresia (13.29) a matricei **A** pentru structuri plane.

c. **Bară dintr-o structură plană încărcată normal pe plan.** Acest caz rezultă prin particularizarea celor stabilite mai înainte pentru cazul general al barei dintr-o structură spațială. Admițînd că structura este situată în planul *xoz* și sarcinile acționează paralel cu axa *y*, în extremitățile barei apar numai cîte trei eforturi: forță tăietoare dirijată după axa *y*, moment de torsiune și moment încovoietor M_z; numerotarea este arătată în figura 214, *c*. Dacă se caută corespondentul acestei numerotări în figura 212, *b* și se reține din matricea dată în figura 216 numai rîndurile și coloanele aferente, rezultă matricea din figura 217, care corespunde barei de structură plană încărcată normal pe plan, cu dimensiuni (6.6), în care se identifică cele patru submatrice $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$, $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$, $\bar{\mathbf{r}}_{kj}$ și $\bar{\mathbf{r}}_{kk}$.

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ \hline -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{array}\right] \begin{array}{l} (j_1) \\ (j_2) \\ (j_3) \\ (k_1) \\ (k_2) \\ (k_3) \end{array}$$

$\bar{\mathbf{r}}_{ij}$ $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$ $\bar{\mathbf{r}}_{kj}$ $\bar{\mathbf{r}}_{kk}$

Fig. 217. Matrice de rigiditate pentru o bară dintr-o structură plană încărcată normal pe plan.

Asemănător cazului precedent, în figura 214, *c* și *d* se indică situația eforturilor din extremitățile barei, raportate atît la sistemul propriu de axe, cît și la cel al structurii. Condiția de echilibru a barei în cele două situații, cît și trecerea de la un sistem de axe la celălalt, conduc la matricele

$$\bar{\mathbf{t}}_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{t}_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_z & 1 & 0 \\ l_x & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}, \tag{13.48}$$

asemănătoare celor întîlnite la barele structurilor plane și care pot fi utilizate în același mod.

4. Stabilirea ecuațiilor de condiție

Se cunoaște că în metoda deplasărilor condiția de compatibilitate a structurii este permanent respectată, abaterea făcîndu-se de la condiția de echilibru static real prin introducerea reacțiunilor fictive din blocările ce împiedică deplasările nodurilor. Specificul procedeului utilizat aici, care studiază mai întîi bara ca element component al structurii și apoi trece la asamblarea barelor în noduri, impune un anumit mod de exprimare a condiției de compatibilitate: toate extremitățile de bare care concură în nod au aceleași deplasări ca și nodul însuși. Notînd pentru diferențiere cu $\mathbf{D}_j^{(i)}$, $\mathbf{D}_j^{(h)}$... matricele-coloană ale deplasărilor din extremitățile j ale barelor i, h...., în sistemul de axe al structurii și cu Δ_j matricea-coloană a deplasărilor nodului j, condiția de compatibilitate se scrie

$$\Delta_j = \mathbf{D}_j^{(i)} = \mathbf{D}_j^{(h)} = \ldots$$

și deci matricele $\mathbf{D}_j$ ale extremităților pot fi oricînd înlocuite cu matricea Δ_j a nodului, ale cărei elemente reprezintă necunoscute geometric nedeterminate. Pentru o structură cu n noduri vor fi deci $3n$, respectiv $6n$ necunoscute, după cum structura este plană sau spațială.

Ecuațiile de condiție se obțin prin exprimarea echilibrului nodurilor. Se regăsește aici, în formă generală, procedeul utilizat în prima parte a cursului la formularea matriceală a metodei izolării nodurilor pentru structuri articulate plane sau spațiale static determinate, anume în legătură cu relațiile (4.6) și (7.8). Condiția de echilibru a nodului apare sub forma: rezultanta eforturilor din extremitățile tuturor barelor care vin în nod trebuie să coincidă cu rezultanta sarcinilor aplicate pe nod. Pe baza relației (13.33), pentru un nod j se poate scrie în formă matriceală

$$\sum \mathbf{E}_j^{(i)} = \mathbf{P}_j, \quad \text{unde } \mathbf{E}_j^{(i)} = \mathbf{r}_{jj}\Delta_j + \mathbf{r}_{jk}\Delta_k, \tag{13.49}$$

astfel că în ecuații intervin atît deplasările nodului j, cît și cele ale nodurilor de la extremitățile opuse ale barelor ce concură în nod. Prima relație (13.49) cuprinde un număr de trei, respectiv șase ecuații de echilibru static, după cum nodul aparține unei structuri plane sau spațiale.

Dacă se exprimă echilibrul tuturor nodurilor, se ajunge la un sistem de ecuații liniare care are forma generală

$$\mathbf{R}\Delta = \mathbf{P} \qquad \text{și deci} \qquad \Delta = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}, \tag{13.50}$$

unde $\mathbf{R}$ reprezintă matricea de rigiditate a întregii structuri, Δ este matricea-coloană a tuturor necunoscutelor (formată din succesiunea matricelor Δ_j), iar $\mathbf{P}$ este matricea-coloană a sarcinilor aplicate la noduri (formată din succesiunea matricelor $\mathbf{P}_j$). Numărul ecuațiilor este egal cu cel al necunoscutelor, această egalitate găsindu-se în fiecare nod.

Din relația (13.49) se vede că matricea globală $\mathbf{R}$ este alcătuită din submatrice corespunzătoare extremităților de bare, avînd dimensiuni (3.3) sau (6.6)

după cum bara aparţine unei structuri plane sau spaţiale. Fiecare bară i cuprinsă între două noduri aduce patru submatrice, cum rezultă din relaţia (13.34) şi anume

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_j^{(i)} \\ \mathbf{E}_k^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{jj}^{(i)} & \mathbf{r}_{jk}^{(i)} \\ \mathbf{r}_{kj}^{(i)} & \mathbf{r}_{kk}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_j \\ \Delta_k \end{bmatrix}}_{\Delta_i},$$

unde toate elementele sînt scrise în sistemul general de axe. La identificarea submatricelor trebuie să se ţină seama care anume dintre extremităţile barei a fost considerată drept extremitate j[1].

Alcătuirea matricei globale $\mathbf{R}$ se obţine prin depunerea submatricelor, în funcţie de nodurile structurii şi anume:

— pe linia corespunzătoare unui anumit nod se găsesc toate submatricele capetelor de bară care se întîlnesc în nodul respectiv;

— pe coloana corespunzătoare unui anumit nod se găsesc toate submatricele capetelor de bară în care deplasările nodului produc eforturi.

Este astfel uşor de controlat că cele patru submatrice ale matricei $\mathbf{r}_i$ îşi găsesc poziţii diferite în matricea globală, anume: submatricele $\mathbf{r}_{jj}$ şi $\mathbf{r}_{jk}$ se depun pe linia nodului j, în coloanele corespunzătoare nodurilor j şi k, iar submatricele $\mathbf{r}_{kj}$ şi $\mathbf{r}_{kk}$ se depun în aceleaşi coloane, dar pe linia nodului k. Se poate deci organiza direct alcătuirea matricei globale $\mathbf{R}$ depunînd, pentru fiecare bară care leagă două noduri, cele patru submatrice în poziţiile indicate de figura 218, *a*. La bare care leagă un nod de o rezemare intervine numai matricea $\mathbf{r}_{jj}$, provenind de la rotirea extremităţii j din nod.

Pe această bază, matricea $\mathbf{R}$ rezultă alcătuită din submatrice principale $\mathbf{R}_{jj}$ şi submatrice secundare $\mathbf{R}_{jk}$, de forma

$$\mathbf{R}_{jj} = \sum_j \mathbf{r}_{jj}^{(i)} \text{ şi } \mathbf{R}_{jk} = \mathbf{r}_{jk}. \tag{13.51}$$

Primele sînt dispuse pe diagonala principală şi provin de la toate barele care se întîlnesc în nodul j, celelalte sînt aşezate în afara diagonalei principale şi provin de la cîte o singură bară, anume bara care leagă nodurile j şi k; simetria matricei $\mathbf{R}$ este asigurată de relaţia $\mathbf{R}_{kj} = \mathbf{R}_{jk}^T$.

Pentru exemplificarea alcătuirii matricei globale $\mathbf{R}$, fie cadrul plan din figura 218, *b*, care are patru noduri şi deci dimensiunea matricei va fi (4.3)(4.3). Ţinînd seama de numerotarea dată nodurilor şi admiţînd regula că la fiecare bară submatricele au fost alcătuite considerînd extremităţile j şi k astfel încît $j<k$, se obţine matricea din figura 218, *c*.

Odată alcătuită matricea globală $\mathbf{R}$, aceasta se inversează şi prin multiplicare cu matricea $\mathbf{P}$ a sarcinilor aplicate în noduri, se obţin mărimile deplasă-

[1] Obişnuit, se admite sensul $j \to k$ prin condiţia $j<k$, pe baza numerotării nodurilor. La numerotare trebuie ţinut seama ca, pentru barele ce leagă noduri de reazeme, extremitatea j să fie totdeauna în nod.

rilor nodurilor structurii. Rămîne să se determine eforturile din extremităţile tuturor barelor, operaţie simplă care pentru o bară i are forma

$$\bar{\mathbf{E}}_i = \bar{\mathbf{r}}_i \bar{\mathbf{D}}_i - \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{A} \mathbf{D}_i,$$

unde în matricea $\mathbf{D}_i$ intră deplasările nodurilor de la extremităţile barei i. Înseamnă că eforturile totale din extremităţile barei i sînt

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{E}}_j \\ \hline \bar{\mathbf{E}}_k \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \bar{\mathscr{E}}_j \\ \hline \bar{\mathscr{E}}_k \end{array}\right]}_{\bar{\mathscr{E}}_i} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \bar{r}_{jj} & \bar{r}_{jk} \\ \hline \bar{r}_{kj} & \bar{r}_{kk} \end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{r}}_i} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{array}\right]}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \Delta_j \\ \hline \Delta_k \end{array}\right]}_{\mathbf{D}_i} \tag{13.52}$$

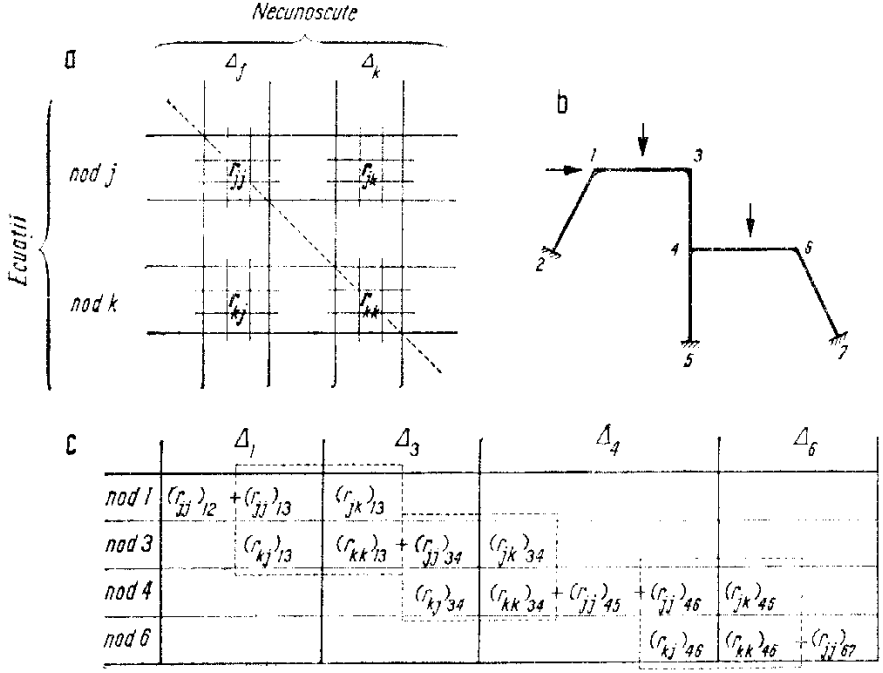


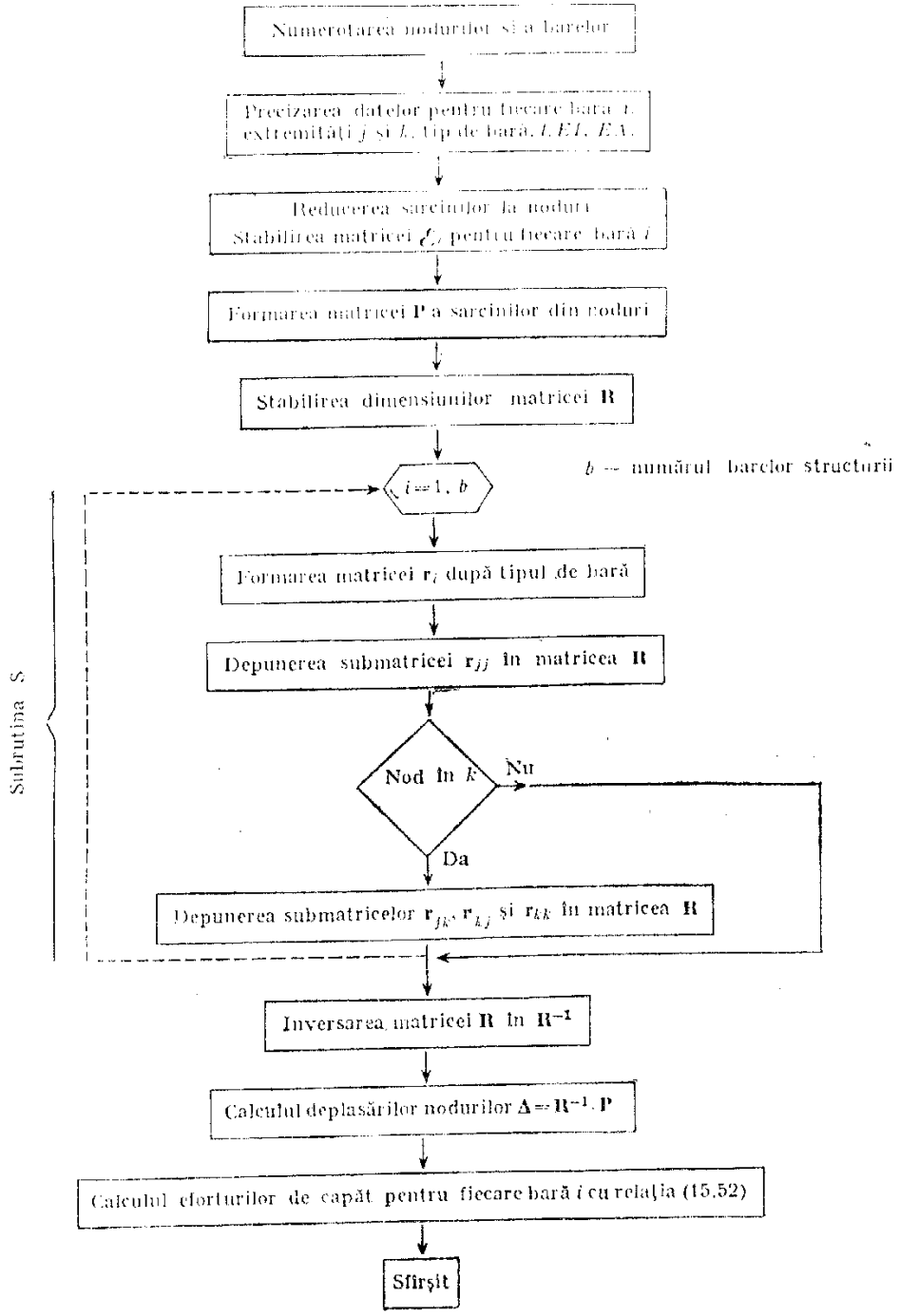
Fig. 218

relaţie în care la eforturile date de expresia (13.52) s-au adăugat şi eforturile de încastrare perfectă stabilite odată cu concentrarea sarcinilor la noduri.

Schema logică a metodei este dată în figura 219.

5. Alte aspecte legate de aplicarea metodei

La utilizarea practică a metodei expuse, care reprezintă o anumită formă de sistematizare a metodei generale a deplasărilor, adaptată calculului automatizat, pot interveni numeroase aspecte interesante, dintre care unele sînt


Numerotarea nodurilor și a barelor
Precizarea datelor pentru fiecare bară i, extremități j și k, tip de bară, EI, EA
Reducerea sarcinilor la noduri
Stabilirea matricei $\mathbf{r}_i$ pentru fiecare bară i
Formarea matricei $\mathbf{P}$ a sarcinilor din noduri
Stabilirea dimensiunilor matricei $\mathbf{R}$
$i = 1, b$
b — numărul barelor structurii
Formarea matricei $\mathbf{r}_i$ după tipul de bară
Depunerea submatricei $\mathbf{r}_{jj}$ în matricea $\mathbf{R}$
Nod în k
Nu
Da
Depunerea submatricelor $\mathbf{r}_{jk}$, $\mathbf{r}_{kj}$ și $\mathbf{r}_{kk}$ în matricea $\mathbf{R}$
Subrutina S
Inversarea matricei $\mathbf{R}$ în $\mathbf{R}^{-1}$
Calculul deplasărilor nodurilor $\Delta = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{P}$
Calculul eforturilor de capăt pentru fiecare bară i cu relația (15.52)
Sfîrșit

prezentate în cele ce urmează. Ca instrument de lucru, se utilizează partiționarea matricei globale **R** în diferite moduri, procedeu cu variate posibilități de aplicare.

a. **Considerarea reazemelor drept noduri.** Cît timp reazemele structurii sînt privite ca atare, apare o diferențiere între barele ce leagă noduri de puncte de rezemare, în funcție de natura legăturilor respective (încastrare, articulație). Aceasta implică utilizarea mai multor tipuri de matrice de rigiditate pentru bare, cum s-a arătat în legătură cu relațiile (13.39) — (13.40).

O simplificare prin unificare se obține dacă și punctele de rezemare sînt incluse în categoria nodurilor. În acest caz, trecerea la sistemul de bază implică și blocarea deplasărilor libere din rezemări, astfel că toate barele apar ca dublu încastrate și deci este suficient un singur tip de matrice de rigiditate pentru toate barele structurii. Desigur, numărul de necunoscute crește, adăugîndu-se atît deplasările libere din rezemări, cît și reacțiunile — care intervin acum drept forțe exterioare. Fiecare punct de rezemare h introduce astfel ambele matrice-coloană tipice unui nod, anume matricea deplasărilor $\mathbf{\Delta}_h$ și matricea forțelor exterioare $\mathbf{P}_h$, fiecare avînd unele elemente nule.

Ecuațiile de condiție se scriu sub forma generală (13.50), anume $\mathbf{R\Delta=P}$, care se poate divide în submatrice pe criteriul forțelor exterioare — cunoscute și necunoscute — după cum urmează

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \hline \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{array}\right]}_{\mathbf{R}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{\Delta}_1 \\ \hline \mathbf{\Delta}_2 \end{array}\right]}_{\mathbf{\Delta}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_1 \\ \hline \mathbf{P}_2 \end{array}\right]}_{\mathbf{P}}, \tag{13.53}$$

unde $\mathbf{P}_1$ cuprinde toate forțele exterioare cunoscute (diferite de zero sau nule), iar $\mathbf{P}_2$ — reacțiunile din rezemări; corespunzător, $\mathbf{\Delta}_1$ cuprinde toate deplasările libere din rezemări, în timp ce $\mathbf{\Delta}_2$ este o matrice *nulă* deoarece corespunde deplasărilor pe direcțiile reacțiunilor, care sînt împiedecate de legăturile din rezemări.

Organizarea sistemului ecuațiilor de condiție sub forma (13.53) implică o modificare în succesiunea ecuațiilor, pentru a grupa la urmă pe cele ce conțin reacțiunile. Simultan, trebuie modificată și matricea $\mathbf{\Delta}$, în sensul de a aduce în aceeași ordine și deplasările corespunzătoare. Aceasta înseamnă o *rearanjare* a matricei globale de rigiditate **R**, pe baza următoarelor norme[1].:

— mutarea unei forțe exterioare P_i antrenează mutarea întregii linii;

— mutarea unei deplasări Δ_j antrenează mutarea întregii coloane j.

Partiționarea din relația (13.53) se referă la matricea **R** rearanjată.

Dezvoltînd această relație, se obține

$$\mathbf{R}_{11}\mathbf{\Delta}_1=\mathbf{P}_1 \qquad \text{și} \qquad \mathbf{R}_{21}\mathbf{\Delta}_1=\mathbf{P}_2, \tag{13.54}$$

unde prima relație cuprinde de fapt sistemul ecuațiilor de condiție pentru rezolvarea structurii, din care se obțin mărimile deplasărilor necunoscute, cu

[1] Se referă la linii și coloane efective ale matricei **R**, iar nu la submatrice.

care se pot determina apoi eforturile din extremităţile tuturor barelor utilizînd relaţia (13.52). Pentru aceasta este deci suficientă matricea de rigiditate $\mathbf{R}_{11}$. Odată cunoscute deplasările Δ_1, se pot afla şi reacţiunile $\mathbf{P}_2$ folosind cea de a doua relaţie (13.54), unde intervine submatricea $\mathbf{R}_{21}$.

b. **Efectul cedărilor de reazeme.** De data aceasta sînt cunoscute deplasările pe direcţiile anumitor legături din rezemări, ele constituind date ale problemei. Rezolvarea este în totul similară celei precedente, aici apărînd firesc să se considere drept noduri şi rezemările. Utilizînd aceeaşi rearanjare a matricei $\mathbf{R}$ şi aceeaşi partiţionare, se ajunge la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \hline \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \hline \Delta_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{P}_2 \end{array}\right],$$

unde matricea $\mathbf{P}_1$ este nulă deoarece nu sînt sarcini aplicate pe structură. În schimb, matricea Δ_2 conţine atît elemente nule (pe direcţiile legăturilor fixe din rezemări), cît şi elemente de mărime cunoscută — cedările de reazeme.

Explicitînd sistemul, se obţin relaţiile

$$\mathbf{R}_{11}\Delta_1 + \mathbf{R}_{12}\Delta_2 = 0 \qquad \text{sau} \qquad \mathbf{R}_{11}\Delta_1 = -\mathbf{R}_{12}\Delta_2, \tag{13.55}$$

unde membrul al doilea este cunoscut şi deci pot fi aflate toate deplasările necunoscute cuprinse în matricea Δ_1. Comparînd cu prima relaţie (13.54), se vede că introducerea efectului cedărilor de rezemări apare echivalentă cu *considerarea unor sarcini convenţionale* reprezentate de matricea-coloană $-\mathbf{R}_{12}\Delta_2$. De observat că, la alcătuirea submatricei $\mathbf{R}_{12}$, interesează numai elementele care provin din încărcarea sistemului de bază cu deplasări-unitate pe direcţia cedărilor cuprinse în matricea Δ_2.

c. **Reducerea dimensiunilor matricei R.** La structuri mai complicate, sau cînd numărul de noduri este mărit prin considerarea unor noduri auxiliare pe parcursul anumitor bare, de exemplu în dreptul unor sarcini concentrate importante (pentru a calcula implicit şi deplasările din secţiunile respective), dimensiunile matricei $\mathbf{R}$ cresc şi inversarea sa necesită capacităţi mari la calculatorul electronic. O simplificare se obţine reducînd numărul necunoscutelor ce intervin într-o primă etapă de rezolvare, împărţind calculul în două; aceasta revine în fond la utilizarea unui sistem de bază geometric nedeterminat.

Fie formată sistemul $\mathbf{R}\Delta = \mathbf{P}$. De obicei, nu există în noduri forţe exterioare pe direcţiile tuturor deplasărilor din matricea Δ (se cuprind aici şi deplasările libere din punctele de rezemare). Se împart deci deplasările în două categorii: Δ_1 — deplasări pe direcţiile cărora sînt aplicate forţele exterioare $\mathbf{P}_1$ şi Δ_2 — deplasări pe direcţiile cărora nu sînt aplicate forţe exterioare. Înscriindu-le în această ordine în matricele-coloană Δ şi $\mathbf{P}$, şi rearanjînd în consecinţă matricea $\mathbf{R}$, se obţine sistemul

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \hline \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \hline \Delta_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_1 \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right],$$

care dezvoltat conduce la relaţiile

$$\mathbf{R}_{11}\Delta_1 + \mathbf{R}_{12}\Delta_2 = \mathbf{P}_1 \quad \text{şi} \quad \mathbf{R}_{21}\Delta_1 + \mathbf{R}_{22}\Delta_2 = 0.$$

Din a doua relație se obține

$$\mathbf{\Delta}_2 = -\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21}\mathbf{\Delta}_1 \quad \text{și deci}$$

$$\mathbf{R}_{11}\mathbf{\Delta}_1 - \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21}\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \text{sau} \quad (\mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21})\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{P}_1$$

care se mai poate scrie

$$\mathbf{R}_1\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \text{unde} \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21} \tag{13.56}$$

este o matrice care are dimensiunile matricei $\mathbf{R}_{11}$ și în consecință este mai ușor de inversat pentru a obține deplasările $\mathbf{\Delta}_1$.

Matricea $\mathbf{R}_1$ este matricea de rigiditate a structurii în cazul considerării unui sistem de bază geometric nedeterminat, în care sînt considerate libere (neblocate) deplasările pe direcțiile cărora nu sînt aplicate sarcini. Odată aflate deplasările $\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{P}_1$, se pot calcula și deplasările $\mathbf{\Delta}_2$ sub forma

$$\mathbf{\Delta}_2 = -\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21}\mathbf{\Delta}_1 = -\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{P}_1, \tag{13.57}$$

astfel că devin cunoscute toate deplasările nodurilor structurii și deci se poate trece la determinarea eforturilor din extremitățile de bare.

d. **Efectul variațiilor de temperatură.** Această încărcare se tratează în același mod ca reducerea la noduri a sarcinilor aplicate în cîmpul barelor. Se determină mai întîi eforturile de încastrare perfectă în sistemul de bază, pentru toate barele acționate de variații de temperatură, după care *inversele* acestora se aplică drept acțiuni exterioare asupra nodurilor de la capete.

Pentru o bară j-k a unei structuri plane, la care variațiile de temperatură sînt t_1° la fața inferioară și t_2° la fața superioară (privind bara dinspre partea din care sensul $j \to k$ se vede stînga⇒dreapta), corespund următoarele forțe exterioare aplicate asupra nodurilor de la capete, care rezultă din relația (12.56) și admițînd numerotarea din figura 212, *a*:

— bară încastrată la ambele capete

$$P_{j1} = -P_{k1} = -EA\alpha t^\circ, \qquad P_{j3} = -P_{k3} = EI\alpha\Delta t^\circ / d,$$

— bară încastrată în j și articulată în k

$$P_{j1} = -P_{k1} = -EA\alpha t^\circ, \qquad P_{j3} = 3EI\alpha\Delta t^\circ / 2d$$

unde $t^\circ = (t_1^\circ + t_2^\circ)/2$ și $\Delta t^\circ = t_1^\circ - t_2^\circ$, iar d reprezintă înălțimea secțiunii barei.

CAPITOLUL XIV

LINII DE INFLUENȚĂ LA STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

A. GENERALITĂȚI

1. Ecuația generală a liniilor de influență

a. **Stabilirea ecuației generale.** Construcția liniilor de influență pentru reacțiuni și eforturi la structuri static nedeterminate poate fi abordată în diferite moduri, folosind metodele de lucru din capitolele precedente. Astfel, se pot construi asemenea linii de influență utilizînd metoda generală a eforturilor sau metoda generală a deplasărilor, în variante ce depind de specificul sistemului de bază ales. O cale avantajoasă, care permite să se stabilească de la început semnificația concretă a liniilor de influență, constă în utilizarea teoremei generale a reciprocității (Betti), dată de relația (8.8).

Este cunoscut că teorema se referă la forțe exterioare; devine deci necesar ca și necunoscuta căutată să intre în această categorie, ceea ce se realizează considerînd suprimată legătura corespunzătoare și aplicînd necunoscuta ca acțiune exterioară. Se ajunge la un sistem cu $n-1$ nedeterminări, încărcat cu sarcina mobilă de 1^{kN}, călcînd în secțiunea curentă i și cu necunoscuta considerată; aceasta constituie prima situație de încărcare. A doua situație constă în aplicarea necunoscutei-unitate pe același sistem. Pentru claritate, fie grinda continuă din figura 220, *a* la care se caută linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea de pe reazemul *3*. Suprimînd legătura respectivă și aplicînd momentul M_3 ca acțiune exterioară, se obține sistemul echivalent din figura 220,*b*, care se deformează la fel ca structura dată, și deci poate fi considerat în locul acesteia drept situație reală de încărcare. Situația a doua se vede în figura 220,*c*, unde pe grinda continuă cu articulație în *3* s-a aplicat perechea de momente $M_3=1$, care produce deformata arătată în figură.

Se aplică acum teorema reciprocității între situațiile I și II de încărcare, admițînd că în situația II deplasările pe verticală $v_{t3,m}$ sînt pozitive în sensul de acțiune al sarcinii mobile de 1^{kN}. Se obține

$$1^{kN}\cdot v_{t3,m}+M_3\theta_{33,m}=0,\quad \text{deci}\quad M_3=-1^{kN}\cdot v_{t3,m}/\theta_{33,m},$$

deoarece deplasarea ce corespunde în situația I lui $M_3=1$ din situația II este nulă, datorită respectării continuității în legătura suprimată. Ordonata curentă a liniei de influență este dată de coeficientul de influență

$$m_{3i}=-v_{i3,m}/\theta_{33,m}, \tag{14.1}$$

în expresia căruia intervin numai elemente din situația auxiliară de încărcare. Numitorul $\theta_{33,m}$ este o constantă, care nu depinde de poziția pe structură

a sarcinii de 1^{kN}. Configurația liniei de influență este deci dată de numărătorul $v_{i3,m}$. Cînd sarcina de 1^{kN} parcurge structura, acest numărător reprezintă *diagrama deplasărilor elastice pe verticală din poziția deformată dată de situația auxiliară de încărcare.* Pentru a trece la linia de influență, ordonatele diagramei trebuie multiplicate cu $1 / \theta_{33,m}$ și semnele inversate, astfel că zonele pozitive rezultă deasupra axei de referință (fig. 220, *d*).

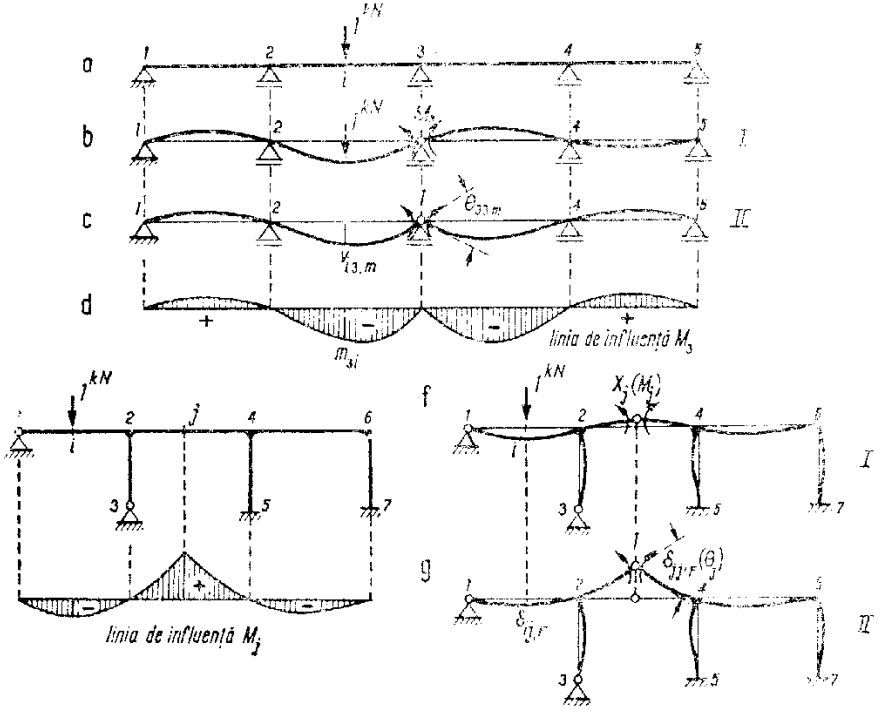


Fig. 220

Caracteristic pentru calea urmată este faptul că se recurge la o ecuație cu o singură necunoscută, care stabilește o corelație directă între această necunoscută și sarcina de 1^{kN}, indicînd de la început configurația liniei de influență, sub forma unei anumite poziții deformate a grinzii. După aceasta se trece la stabilirea ecuațiilor diferitelor porțiuni ale liniei de influență folosind tot ecuația generală.

Cele arătate mai înainte se pot generaliza. Fie o structură oarecare, de exemplu cea din figura 220, *e*, pentru care se cere linia de influență a necunoscutei X_j (în figură M_j). Sistemul echivalent se vede în figura 220,*f*, deformata sa fiind identică cu a structurii reale, deoarece X_j asigură continuitatea în legătura suprimată. Necunoscuta X_j poate fi o forță generalizată oarecare și se aplică

în sensul său pozitiv. A doua situație este arătată în figura 220,*g*; se consideră același sistem cu $n-1$ nedeterminări și se aplică necunoscuta-unitate $X_j=1$. Corespunzător forțelor din prima situație, din deformata situației a doua interesează deplasarea $\delta_{ij,F}$ pe direcția sarcinii de 1^{kN}, care se admite pozitivă *în sensul de acțiune al acestei sarcini*, precum și deplasarea $\delta_{jj,F}$ pe direcția necunoscutei X_j, care se produce în sensul pozitiv al acesteia[1]. În ceea ce privește necunoscuta-unitate $X_j=1$ din situația a doua, acesteia îi corespunde o deplasare nulă în deformata primei situații. Aplicînd teorema reciprocității, se obține

$$1^{kN}\cdot\delta_{ij,F}+X_j\,\delta_{jj,F}=0,\ \text{deci}\ X_j=-1^{kN}\cdot\delta_{ij,F}\,/\,\delta_{jj,F}, \qquad (14.2)$$

care reprezintă *ecuația generală a liniilor de influență pentru cantități static nedeterminate*.

Coeficientul de influență este $\eta_{ji}=-\delta_{ij,F}\,/\,\delta_{jj,F}$ și din interpretarea sa rezultă:

— Configurația liniei de influență este dată de poziția deformată corespunzătoare situației auxiliare de încărcare cu $X_j=1$ și este reprezentată de diagrama deplasărilor elastice — după direcția sarcinei mobile de 1^{kN} — a tuturor secțiunilor structurii parcurse de această sarcină.

— Semnele liniei de influență sînt inversate față de cele ale diagramei deplasărilor; cînd sarcina de 1^{kN} este verticală și dirijată în jos, zonele pozitive rezultă deasupra axei de referință.

— Ordonatele liniei de influență se obțin din cele ale diagramei deplasărilor prin multiplicare cu raportul $1\,/\,\delta_{jj,F}$, unde $\delta_{jj,F}$ este deplasarea pe direcția necunoscutei-unitate $X_j=1$ în situația auxiliară de încărcare.

Aceste elemente precizează modul de determinare a liniilor de influență la structuri static nedeterminate.

b. **Observații asupra ecuației generale.** Se poate ajunge la ecuația liniilor de influență și printr-o altă interpretare, echivalentă de fapt, utilizînd cazul particular al reciprocității deplasărilor unitare și al reacțiunilor unitare. Orice forță de legătură din cuprinsul structurii, deci și un efort oarecare, poate fi privită ca o *reacțiune*; cînd pe structură acționează sarcina mobilă egală cu unitatea, forța de legătură este o reacțiune unitară. Astfel, pentru cadrul din figura 220, *e*, încărcat cu o sarcină de 1^{kN} în secțiunea curentă *i*, momentul încovoietor din secțiunea *j* se scrie sub forma $M_j=1^{kN}\cdot m_{ji,f}$. Ordonata curentă pentru linia de influență M_j este coeficientul de influență $m_{ji,f}$; interesează deci variația acestuia cînd sarcina de 1^{kN} parcurge structura.

În loc de a studia direct variația cantității $m_{ji,f}$, este mai avantajos să se utilizeze reciprocitatea (8.12), care în acest caz are forma $m_{ji,f}=-\delta_{ij,0}$, și deci calculul cantității $m_{ji,f}$ se înlocuiește cu calculul cantității $\delta_{ij,0}$, luată cu semn schimbat. Prin aceasta, problema schimbă de aspect. Înseamnă că pe direcția legăturii de continuitate din secțiunea *j* trebuie produsă o rotire

[1] La deplasări s-a introdus un al treilea indice (F), spre a marca faptul că în situația auxiliară s-a încărcat cu forța generalizată $X_j=1$.

relativă $0_j=1$, iar în poziția deformată care rezultă se consideră deplasarea liniară a secțiunii i pe direcția sarcinei de 1^{kN}. Cînd această sarcină parcurge structura, $\delta_{ij,0}$ reprezintă succesiunea de deplasări a tuturor punctelor parcurse, deci diagrama deplasărilor elastice pe direcția sarcinii de 1^{kN}. S-a regăsit astfel poziția deformată din figura 220, g și diagrama de deplasări ce-i corespunde.

În general, pentru o necunoscută static nedeterminată oarecare X_j se poate scrie

$$X_j=1^{kN}\cdot r_{ji,j},\quad r_{ji,j}=-\delta_{ij,\Delta}\quad \text{și deci}\quad X_j=-1^{kN}\cdot\delta_{ij,\Delta} \tag{14.3}$$

unde cel de-al treilea indice (Δ) arată că $\delta_{ij,\Delta}$ corespunde poziției deformate ce se obține producînd o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii j. Relația (14.3) reprezintă noua formă a ecuației generale a liniilor de influență. Comparînd cu forma (14.2), se obțin pentru coeficientul de influență expresiile

$$\eta_{ji}=-\delta_{ij,F}/\delta_{jj,F}\quad \text{și}\quad \eta_{ji}=-\delta_{ij,\Delta} \tag{14.4}$$

care corespund aceleiași configurații de poziție deformată în situația auxiliară. Deosebirea constă în încărcarea ce se aplică pe direcția legăturii j: în primul caz, o încărcare *cu forțe* ($X_j=1$), în al doilea caz, o încărcare *cu deplasări* ($\Delta_j=1$).

Cele două forme sînt echivalente, putîndu-se trece de la una la alta. Astfel, dacă la prima alternativă se consideră în situația auxiliară o încărcare $X_j=X'$, în loc de $X_j=1$, deplasările se multiplică cu X', deci $\eta_{ji}=-X'\cdot\delta_{ij,F}/X'\cdot\delta_{jj,F}$. Este acum suficient de a alege pe X' astfel ca $X'\cdot\delta_{jj,F}=\Delta_j=1$, spre a ajunge la cealaltă alternativă.

Privitor la aplicarea practică, forma (14.2) a ecuației generale este indicată cînd calculul deplasărilor ce intervin se face cu ajutorul expresiei Maxwell-Mohr, care este specifică încărcării cu forțe. Forma (14.3) se dovedește avantajoasă cînd poziția deformată se determină cu ajutorul sistemelor conjugate; această cale este specifică încărcării cu deplasări.

Rămîne de făcut și o altă observație. Ecuația (14.3) a liniilor de influență pentru necunoscute static nedeterminate este analoagă cu ecuația (6.10) stabilită pentru liniile de influență la structuri static determinate. Se poate deci considera *o singură ecuație generală* pentru liniile de influență ale forțelor de legătură (reacțiuni sau eforturi), indiferent dacă structura dată este static determinată sau static nedeterminată. Aceasta este

$$X_j=-1^{kN}\cdot\delta_{ij,\Delta}/\Delta_j,\ \text{unde}\ \Delta_j=1,\ \text{deci}\ \eta_{ji}=-\delta_{ij,\Delta}, \tag{14.5}$$

arătînd că *linia de influență este dată de diagrama deplasărilor pe direcția sarcinii de 1^{kN}, care rezultă cînd se impune o deplasare $\Delta_j=1$ pe direcția și în sensul pozitiv al necunoscutei X_j*. Pentru impunerea deplasării este necesar să se considere suprimată legătura corespunzătoare; în funcție de alcătuirea structurii, caracterul diagramei deplasărilor diferă:

— la structuri static determinate, suprimarea legăturii introduce un grad de libertate, astfel că trecerea în poziția deplasată are caracter *cinematic* (fig. 221, *a*), părțile componente ale sistemului fiind considerate rigide;

— la structuri static nedeterminate, suprimarea legăturii conduce la sisteme fără grade de libertate, astfel că trecerea în poziția deplasată are caracter *elastic* (fig. 221, *b*), producîndu-se prin deformarea barelor.

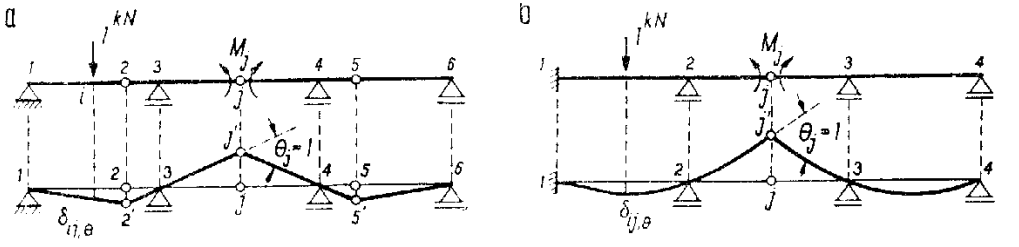


Fig. 221

2. Modalități de construire a liniilor de influență

Ecuațiile generale (14.2) și (14.3) au avantajul de a da direct imaginea configurației liniei de influență căutate, care rezultă dintr-o anumită poziție deformată a structurii. Se poate deci începe cu schițarea liniei de influență și deseori aceasta poate fi suficientă pentru aprecierea pozițiilor celor mai defavorabile ale sarcinilor. În ceea ce privește determinarea efectivă a liniei de influență (ecuațiile diferitelor sale ramuri), se poate proceda în mai multe feluri.

Atît pe baza metodei eforturilor, cît și pe baza metodei deplasărilor, se pot stabili procedee de construire a liniilor de influență, care se dovedesc avantajoase în anumite situații.[1] O cale specifică de determinare a liniilor de influență la structuri static nedeterminate constă în utilizarea sistemelor conjugate[2]. Aici vom prefera să utilizăm direct ecuația generală (14.2). Ecuațiile liniei de influență vor fi date de numărătorul $\delta_{ij,F}$, care variază în funcție de poziția sarcinii de 1^{kN} pe structură, în timp ce numitorul $\delta_{jj,F}$ este o constantă ce intervine la stabilirea scării ordonatelor.

Deplasările $\delta_{ij,F}$ și $\delta_{jj,F}$ trebuie calculate pe sistemul obținut prin suprimarea legăturii corespunzătoare necunoscutei X_j; acest sistem este de $n-1$ ori static nedeterminat și trebuie rezolvat în prealabil pentru încărcarea cu $X_j=1$. Înseamnă că determinarea liniilor de influență la structuri static nedeterminate comportă *efectuarea a două etape distincte*. În prima etapă se rezolvă sistemul cu $n-1$ nedeterminări, folosind metodele cunoscute din capitolele precedente; în a doua etapă se determină poziția deformată corespunzătoare situației auxiliare de încărcare, cu ajutorul expresiei Maxwell-Mohr și apoi se trece la linia de influență prin aplicarea expresiei (14.2).

[1] A se vedea S.C. 2 (p. 292—296 și 590—597).
[2] A se vedea S.C-2 (p. 472—486).

Se obţin simplificări substanţiale de calcul dacă pentru cele două deplasări se aplică expresiile

$$\delta_{ij,F}=\int m_{xj,F}\,m_{xi,f}\,ds/EI=\int m_{xj,F}\;m^0_{xi,f}\;ds/EI,$$
$$\delta_{jj,F}=\int m^2_{xj,F}\,ds/EI=\int m_{xj,F}\,m^0_{xj,F}\;ds/EI, \tag{14.6}$$

unde s-a ţinut seama de expresiile (9.21), care permit ca una dintre diagrame să fie trasată pe un sistem static determinat. Calculul constantei $\delta_{jj,F}$ se face o singură dată pentru toată structura; calculul numărătorului $\delta_{ij,F}$ trebuie făcut separat pe porţiuni de structură, delimitate prin condiţia ca pentru fiecare dintre acestea expresia lui $m^0_{xi,f}$ să fie aceeaşi.

Nu este totdeauna necesar să se recurgă la ecuaţia generală a liniilor de influenţă. Se întîlnesc şi cazuri cînd, la anumite structuri, există stabilite expresii pentru necunoscutele static nedeterminate, obţinute pe baza rezolvării generale a structurii respective încărcate cu sarcini oarecare. S-au văzut asemenea cazuri în capitolele precedente, de exemplu la rezolvarea grinzilor continue prin puncte fixe, la rezolvarea arcului dublu încastrat prin metoda centrului elastic etc. Expresiile necunoscutelor pot fi utilizate şi la construirea liniilor de influenţă respective, particularizîndu-le pentru încărcarea cu sarcina mobilă de 1^{kN}; admiţînd ca variabilă poziţia acestei sarcini, se obţin ecuaţiile corespunzătoare.

Folosind aceste căi, se poate construi direct linia de influenţă a oricărei cantităţi static nedeterminate. Cînd se cer mai multe linii de influenţă la aceeaşi structură, este indicat să se traseze separat numai liniile de influenţă ale necunoscutelor suplimentare, urmînd ca celelalte să se obţină prin suprapuneri, pe bază de corelaţii statice, cum se arată în paragrafele următoare.

B. LINII DE INFLUENŢĂ LA GRINZI CONTINUE

1. Linia de influenţă *M* din secţiunea de pe un reazem intermediar

Fie cazul general al unei grinzi continue cu un număr oarecare de deschideri, la care urmează să se determine linia de influenţă M_5 (fig. 222, *a*). Alura liniei de influenţă este dată de poziţia deformată din figura 222, *b*, produsă de către perechea de momente $M_5=1$ aplicată pe feţele articulaţiei introduse pe reazemul *5*. Diagrama $m_{x5,m}$ ce corespunde acestei poziţii deformate se vede în figura 222, *c*; ea este formată din variaţii liniare ce pornesc din vîrful ordonatei *1* în reazemul *5* şi se anulează în dreptul punctelor fixe, cum se ştie din figura 158. Înseamnă că diagrama este cunoscută; astfel, ordonatele din dreptul reazemelor *4*, *3*, ... au respectiv mărimile $-1/k_4$, $+1/k_4k_3$, ...

Pentru calculul deplasărilor din ecuaţia generală (14.2), expresiile (14.6) arată că trebuie construite diagramele m^0_{x5}, şi $m^0_{xi,f}$ pe un sistem static deter-

minat. Acesta rezultă din grinda continuă, introducînd articulații pe toate reazemele intermediare. Diagrama $m^0_{x5,m}$ se întinde numai pe deschiderile alăturate reazemului 5 (fig. 222, *d*); diagrama $m^0_{x1,f}$, dată de sarcina-unitate aplicată în secțiunea curentă *i*, se întinde numai pe deschiderea în care calcă sarcina (fig. 222, *e*).

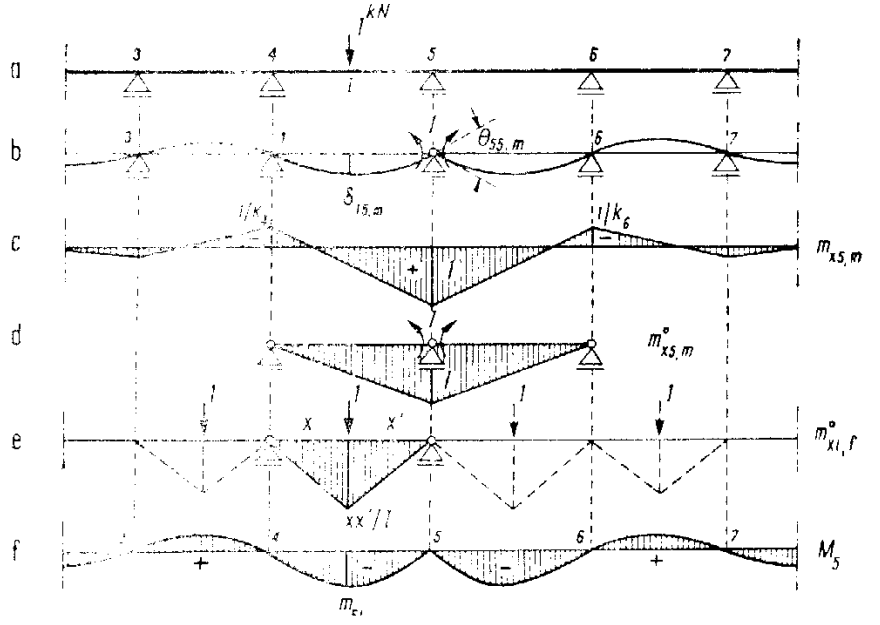


Fig. 222

Aplicînd a doua expresie (14.6), se obține

$$6EI_c\theta_{55,m} = \lambda_{45}(2 - 1/k_4) + \lambda_{56}(2 - 1/k'_6),$$

unde, ținînd seama de relațiile (10.23) și (10.26) de recurență a punctelor fixe, anume

$$k_5 = 2 + \frac{\lambda_{45}}{\lambda_{56}}\left(2 - \frac{1}{k_4}\right) \text{ și } k'_5 = 2 + \frac{\lambda_{56}}{\lambda_{45}}\left(2 - \frac{1}{k'_6}\right),$$

se obțin relațiile

$$\lambda_{56}(k_5 - 2) = \lambda_{45}(2 - 1/k_4) \text{ și } \lambda_{45}(k'_5 - 2) = \lambda_{56}(2 - 1/k'_6).$$

Introducînd succesiv prima și apoi a doua din aceste relații în expresia lui $\theta_{55,m}$, se obțin forme ale expresiei, și anume

$$\begin{aligned} &\text{stînga:} \quad 6EI_c\theta_{55,m} = \lambda_{45}(k_4k'_5 - 1)/k_4, \\ &\text{dreapta:} \quad 6EI_c\theta_{55,m} = \lambda_{56}(k_5k'_6 - 1)/k'_6 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

fiecare conținînd elemente dintr-o singură deschidere; vor fi folosite pentru ramura din stînga, respectiv ramura din dreapta a linie de influență.

Se trece la a doua expresie (14.6). Este necesar să se stabilească mai întîi caracteristicile de încărcare ale diagramei $m^0_{xt,f}$; considerînd o deschidere oarecare h-k a grinzii, se poate scrie

$$m_h = \frac{6}{l^2}\cdot\frac{xx'}{l}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}(l+x') = l_{hk}\,\xi\xi'(1+\xi') = l_{hk}\,\omega^{st},$$
$$m_k = \frac{6}{l^2}\cdot\frac{xx'}{l}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}(l+x) = l_{hk}\,\xi\xi'(1+\xi) = l_{hk}\,\omega^{dr}, \qquad \text{(b)}$$

unde pentru simplificarea scrierii s-au introdus notațiile

$$\omega^{st} = \xi\xi'(1+\xi') \text{ și } \omega^{dr} = \xi\xi'(1+\xi),$$

care reprezintă parabole cubice. Integrarea se face tot pentru deschiderea oarecare h-k, notînd cu M_h și M_k ordonatele din dreptul reazemelor h și k ale diagramei $m_{x_5,m}$ admise *pozitive*. Se obține

$$6\,EI_c\,\delta_{i5,m} = \lambda_{hk}l_{hk}[M_h\omega^{st} + M_k\omega^{dr}]. \qquad \text{(c)}$$

Introducînd în expresia generală (14.2) numărătorul (c) și una dintre formele numitorului (a), se obțin ecuațiile celor două ramuri ale liniei de influență din figura 222, f:

— ramura stîngă $\quad m_{5i} = -l_{hk}\frac{\lambda_{hk}}{\lambda_{45}}\cdot\frac{k_4}{k_4k'_5-1}[M_h\omega^{st} + M_k\omega^{dr}],$

— ramura dreaptă $\quad m_{5i} = -l_{hk}\frac{\lambda_{hk}}{\lambda_{56}}\cdot\frac{k'_6}{k_5k'_6-1}[M_h\omega^{st} + M_k\omega^{dr}].$ (14.7)

Pentru găsirea ecuației de pe o anumită deschidere a grinzii, urmează să se introducă valorile M_h și M_k respective. Astfel, pentru deschiderile *4-5* și *5-6*, se introduce $M_h = -1/k_4$ și $M_k = 1$ în primul caz, respectiv $M_h = 1$ și $M_k = -1/k'_6$ în al doilea. Se obțin ecuațiile

$$(4\text{-}5)\quad m_{5i} = -l_{45}\frac{k_4\omega^{dr} - \omega^{st}}{k_4k'_5-1}, \qquad (5\text{-}6)\quad m_{5i} = -l_{56}\frac{k'_6\omega^{st} - \omega^{dr}}{k_5k'_6-1}, \qquad (14.8)$$

unde apar diferențe de parabole cubice; trasarea acestora se face prin puncte.

Din configurația diagramei $m_{x_5,m}$ rezultă că, pe măsura îndepărtării de reazemul considerat, mărimile ordonatelor linie de influență scad repede de la o deschidere la alta. Înseamnă că, după 3-4 deschideri de fiecare parte, ramurile liniei de influență se confundă practic cu linia de referință.

2. Liniile de influență M_j și T_j în secțiunea curentă

a. **Linia de influență M_j.** Pentru o anumită secțiune j din deschiderea *4-5* (fig. 223, *a*), se utilizează formula de suprapunere (10.3), anume

$$M_j = M^0_j + M_4\xi'_j + M_5\xi_j,$$

care este valabilă pentru orice încărcare. Înseamnă că formula se aplică și liniilor de influență, stabilind corelația dintre ordonata curentă a liniei de influență M_j și ordonatele curente ale liniilor de influență M_j^0, M_4 și M_5. Dintre acestea, ultimele două se întind pe toată grinda (fig. 223, *b* și *c*), în timp ce linia de influență M_j^0 (corespunzătoare grinzii simplu rezemate *4-5*) este dată de conturul triunghiular *4-j'-5* din figura 223, *d*.

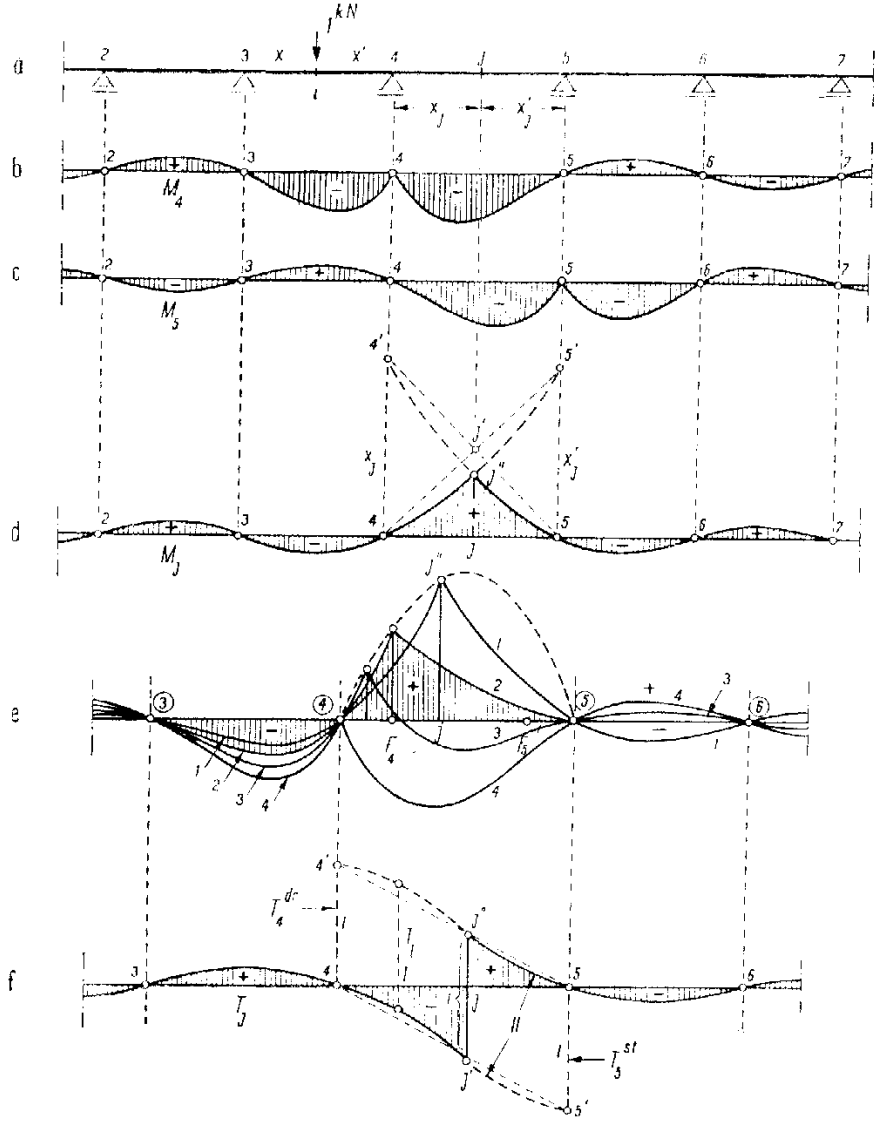


Fig. 223

Aplicarea relației de suprapunere $m_{ji}=m^0_{ji}+m_{4i}\xi'_j+m_{5i}\xi_j$ se poate face fie direct, calculînd numeric mărimile ordonatelor m_{ji} pe baza ordonatelor liniilor de influență componente, determinate în prealabil, fie sub formă generală, stabilind ecuațiile liniei de influență M_j, cum se arată în continuare.

Pentru *deschiderea 4-5* (care conține secțiunea j) se utilizează expresiile de forma (14.8); la grinzi cu deschideri de secțiune *constantă* se scrie

$$(4-j)\qquad m^0_{ji}=\xi'_j x,\qquad (j-5)\qquad m^0_{ji}=\xi_j x',$$

$$m_{4i}=-l_{45}\,\frac{k'_5\omega^{st}-\omega^{dr}}{k_4k'_5-1},\qquad m_{5i}=-l_{45}\,\frac{k_4\omega^{dr}-\omega^{st}}{k_4k'_5-1},$$

care, introduse în relația de suprapunere, conduc la ecuația

$$m_{ji}=\begin{cases}\xi'_j x\\ \xi_j x'\end{cases}-\frac{l_{45}}{k_4k'_5-1}\left[(k'_5\xi'_j-\xi_j)\omega^{st}+(k_4\xi_j-\xi'_j)\,\omega^{dr}\right]. \tag{14.9}$$

unde apar cele două ramuri ale linie de influență din deschiderea secțiunii. În ecuații intervin numai rapoartele k_4 și k'_5 ale punctelor fixe din această deschidere, care sintetizează caracteristicile elastice ale celor două porțiuni neîncărcate de grindă.

Pentru *celelalte deschideri*, relația de suprapunere se reduce la

$$M_j=M_4\xi'_j+M_5\xi_j,$$

deci intervin numai liniile de influență ale cantităților static nedeterminate M_4 și M_5. În afara deschiderii care conține secțiunea, se poate face o sistematizare în modul următor. Cînd sarcina-unitate calcă la *stînga* deschiderii *4-5*, momentele încovoietoare M_4 și M_5 sînt legate prin raportul $-M_4/M_5=k'_5$; cînd sarcina-unitate calcă la *dreapta* deschiderii *4-5*, aceleași momente încovoietoare sînt legate prin raportul $-M_5/M_4=k_4$. Se poate deci scrie

$$\text{stînga: } M_j=M_5(\xi_j-k'_5\xi'_j),\qquad \text{dreapta: } M_j=M_4(\xi'_j-k_4\xi_j). \tag{14.10}$$

Aceleași relații sînt valabile și pentru ordonatele curente ale liniei de influență, astfel că ramurile liniei de influență de la stînga și de la dreapta deschiderii *4-5* vor fi definite de expresiile

$$\begin{aligned}&\text{ramura din stînga}\qquad m_{ji}=m_{5i}\cdot\xi'_j(\beta-k'_5),\\ &\text{ramura din dreapta}\qquad m_{ji}=m_{4i}\cdot\xi_j(\beta'-k_4),\end{aligned} \tag{14.11}$$

unde s-a notat $\beta=\xi_j/\xi'_j$ și $\beta'=1/\beta=\xi'_j/\xi_j$. Rezultă că pentru construcția ramurilor liniei de influență M_j *este suficient să se multiplice cu cîte o constantă ordonatele corespunzătoare din liniile de influență* M_5, *respectiv* M_4.

Pentru o secțiune din zona centrală a deschiderii *4-5*, linia de influență M_j are forma din figura 223, *d*. Expresiile (14.11) permit să se stabilească și modul cum variază configurația liniei de influență, în funcție de poziția secțiunii pe deschidere (definită prin raportul $\beta=1/\beta'$), față de punctele fixe F_4 și F_5. Această variație este ilustrată în figura 223, *e* și poate fi caracterizată astfel:

— Cît timp secțiunea se află între cele două puncte fixe, $\beta' < k_4$ și deci ramura din dreapta a liniei de influență M_j este de semn contrar ramurii corespunzătoare din linia de influență M_4. Înseamnă că sarcinile aplicate pe grindă la dreapta reazemului *5* nu dau moment încovoietor în secțiunea F_4.

— Cînd secțiunea ajunge în punctul fix F_4, $\beta' = k_4$ și deci paranteza din a doua relație (14.10) se anulează, astfel că ramura din dreapta a liniei de influență M_j *dispare* în întregime.

— Cînd secțiunea este situată între reazemul *4* și punctul fix F_4, $\beta' > k_4$, astfel că ramura din dreapta a liniei de influență M_j devine de același semn cu ramura corespunzătoare din linia de influență M_4; în deschiderea *4-5* apare un punct de anulare.

— Cînd secțiunea ajunge în reazemul *4*, se regăsește linia de influență M_4, așa cum rezultă din expresiile (14.9) și (14.10) pentru $\xi_j = 0$ și $\xi_j' = 1$.

În toate aceste cazuri $\beta < k_5'$, astfel că ramura din stînga a liniei de influență M_j este mereu de semn contrar ramurii corespunzătoare din linia de influență M_5. Pe măsură ce secțiunea se apropie de reazemul *4*, diferența $(\beta - k_5')$ crește și ordonatele ramurii se măresc.

Configurațiile liniilor de influență M_i pentru diferite poziții ale secțiunii, permit să se identifice situațiile cele mai defavorabile de încărcare cu sarcini utile, cum se arată mai departe în legătură cu figura 226. De remarcat că, pentru secțiunile situate între reazeme și punctele fixe ale deschiderii, situația defavorabilă rezultă încărcînd parțial deschiderea care conține secțiunea, în timp ce pentru secțiunile situate între cele două puncte fixe, situația defavorabilă corespunde încărcării complete a acestei deschideri.

b. Linia de influență T_j. Forța tăietoare din secțiunea j a deschiderii *4-5* poate fi exprimată prin relația (10.2), care în acest caz se scrie

$$T_j = T_j^0 + (M_5 - M_4) / l_{45}.$$

Înseamnă că linia de influență T_j se poate găsi prin suprapunerea liniei de influență T_j^0, care se întinde numai pe deschiderea *4-5* și are conturul *4-j'-j''-5* (fig. 223, *f*), cu liniile de influență M_5 și $-M_4$ (fig. 223, *b* și *c*), avînd ordonatele împărțite cu constanta l_{45}. Corelația dintre ordonatele curente ale acestor linii de influență are deci forma $l_{ji} = l_{ji}^0 + (m_{5i} - m_{4i}) / l_{45}$.

Pentru *deschiderea 4-5* (care conține secțiunea i) rezultă în cazul grinzii cu deschideri de secțiune *constantă*

$$(4-j) \qquad l_{ji}^0 = -\xi, \qquad (j-5) \qquad l_{ji}^0 = -\xi',$$

$$m_{4i} = -l_{45} \frac{k_5' \omega^{st} - \omega^{dr}}{k_4 k_5' - 1}, \qquad m_{5i} = -l_{45} \frac{k_4 \omega^{dr} - \omega^{st}}{k_4 k_5' - 1},$$

care, introduse în relația de suprapunere, conduc la ecuația

$$l_{ji} = \begin{matrix} -\xi \\ +\xi' \end{matrix} \Big\rangle + \frac{1}{k_4 k_5' - 1} [(1 + k_5')\omega^{st} - (1 + k_4)\omega^{dr})], \qquad (14.12)$$

unde apar cele două ramuri ale liniei de influență din această deschidere.

Pentru *celelalte deschideri*, relația de suprapunere se reduce la

$$T_j = (M_5 - M_4)/l_{45},$$

deci intervin numai liniile de influență din figurile 223, *b* și *c*. Pe baza acelorași considerente folosite la stabilirea relațiilor (14.10), cînd sarcina-unitate calcă la stînga sau la dreapta deschiderii *4-5*, se poate scrie

$$\text{stînga } T_j = M_5(1 + k_5')/l_{45}, \qquad \text{dreapta } T_j = -M_4(1 + k_4)/l_{45},$$

astfel că ramurile liniei de influență T_j de la stînga și de la dreapta deschiderii *4-5* vor fi definite de expresiile

$$\begin{aligned} &\text{ramura din stînga} && l_{ji} = m_{5i}\cdot(1 + k_5')/l_{45}, \\ &\text{ramura din dreapta} && l_{ji} = -m_{4i}\cdot(1 + k_4)/l_{45}. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Rezultă că pentru aceste ramuri ale liniei de influență construcția se reduce la multiplicarea cu cîte o constantă a ramurilor corespunzătoare din liniile de influență M_5, respectiv $-M_4$.

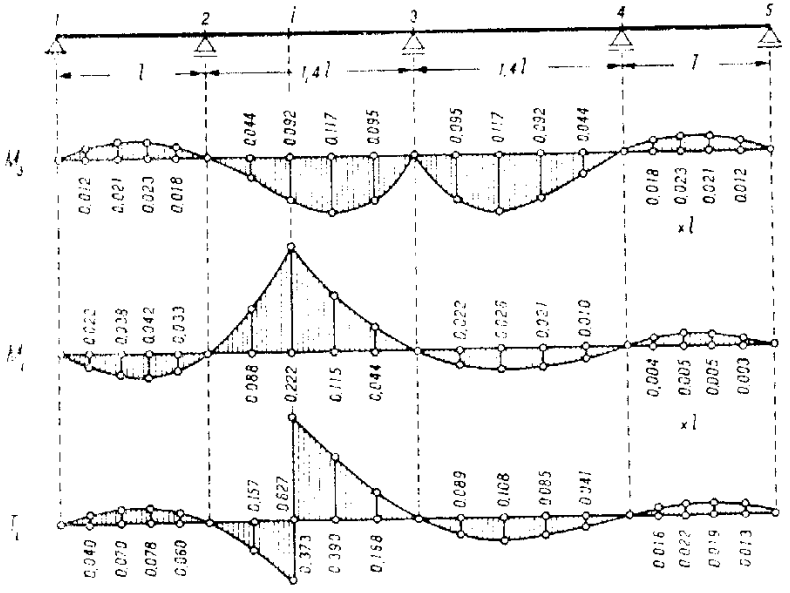


Fig. 224

Linia de influență T_j are forma din figura 223, *f*. De remarcat că în ecuațiile (14.12) și (14. 13) nu apar abscisele secțiunii *j*, astfel că cele două ramuri ale liniei de influență rămîn aceleași pe toată lungimea grinzii continue, oricare ar fi poziția secțiunii. Între aceste ramuri apare un salt, de mărime egală cu unitatea, în secțiunea *j*. Cînd saltul se produce imediat la dreapta reazemului *4*, rezultă linia de influență T_4^{dr}, iar cînd saltul intervine imediat la stînga reazemului *5*, se obține linia de influență T_5^{st}.

Aceste din urmă linii de influență pot servi la construirea liniei de influență a reacțiunii dintr-un reazem intermediar al grinzii continue. Astfel, pentru reacțiunea V_4 se aplică relația $T_4^{st} + V_4 = T_4^{dr}$, deci $V_4 = T_4^{dr} - T_4^{st}$; în consecință, linia de influență V_4 se obține prin suprapunerea liniilor de influență T_4^{dr} și $-T_4^{st}$.

Pentru aprecierea variației ordonatelor în liniile de influență ale grinzilor continue, în figura 224 s-au trasat liniile de influență M_3, M_i și T_i pentru o grindă continuă cu patru deschideri, având secțiune constantă pe toată lungimea (poziția secțiunii i este definită de $\xi_i = 0{,}4$ și $\xi_i' = 0{,}6$). Se recomandă să se regăsească aceste linii de influență folosind expresiile generale stabilite mai înainte.

3. Diagrame de momente încovoietoare maxime

Cercetarea configurației liniilor de influență, precum și posibilitatea rezolvării simple și rapide a grinzii continue cu o singură deschidere încărcată, prin metoda punctelor fixe, pot sta la baza examinării comparative a mai multor situații de încărcare, conducînd la trasarea diagramei de momente încovoietoare maxime. Asemenea diagrame se referă de obicei la încărcarea cu sarcini uniform distribuite care pot ocupa diferite deschideri, concomitent cu sarcina permanentă aplicată pe întreaga lungime a grinzii continue. Este cazul curent întîlnit la construcții civile și industriale, de asemenea la poduri cînd convoaiele mobile se înlocuiesc — pentru calcul — prin sarcini echivalente.

Liniile de influență din figurile 223, *b*, *c* și *d*, corespunzătoare momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazeme intermediare, sau dintr-o secțiune oarecare din deschidere, arată că situațiile cele mai defavorabile se pot reduce la tipurile de încărcări din figura 225, *a*, dintre care primele patru se referă la sarcini utile p. Fiecare dintre acestea trebuie luată împreună cu situația E, care reprezintă sarcina permanentă g. Rezultă:

(a) Se obțin momente încovoietoare maxime *pozitive* într-o deschidere, dacă se încarcă *alternativ* (din două în două) deschiderile grinzii continue, între acestea fiind cuprinsă și deschiderea considerată (de exemplu, cazul *A* pentru deschiderea *4-5*).

(b) Se obțin momente încovoietoare maxime *negative* într-o deschidere, dacă se încarcă *alternativ* deschiderile grinzii continue, astfel ca deschiderea considerată să rămînă neîncărcată (de exemplu, cazul *B* pentru deschiderea *4-5*).

(c) Se obține moment încovoietor maxim *negativ* în secțiunea de pe un reazem intermediar încărcînd deschiderile alăturate reazemului, apoi alternativ pe cele următoare (de exemplu, cazul *C* pentru reazemul *5*).

(d) Se obține moment încovoietor minim (sau maxim pozitiv) în secțiunea de pe un reazem intermediar, lăsînd neîncărcate deschiderile alăturate reazemului și încărcînd alternativ pe cele următoare (de exemplu, cazul *D* pentru reazemul *5*).

Diagramele de momente încovoietoare, corespunzătoare situațiilor de încărcare menționate, se stabilesc prin suprapunere. Pentru aceasta se încarcă

succesiv numai cîte o singură deschidere a grinzii continue și se determină momentele încovoietoare de pe toate reazemele intermediare, așa cum s-a procedat în figura 159. Calculul se face pentru una din sarcini (permanentă sau utilă), valorile corespunzătoare pentru cealaltă rezultînd prin multiplicare cu raportul intensităților celor două sarcini. Cu valorile găsite se pot apoi efectua diferitele combinări necesare, conform tipurilor *A-D* din figură; la fiecare

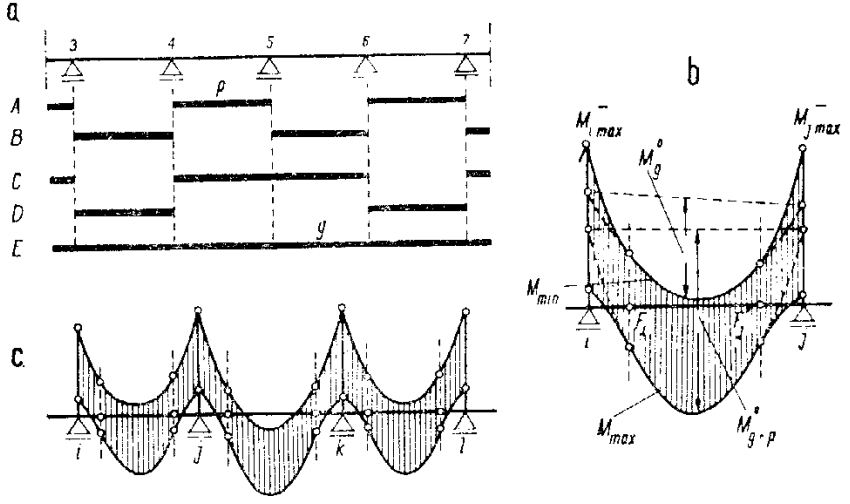


Fig. 225

combinare se va adăuga și efectul încărcării *E* date de sarcina permanentă. Pentru momentele încovoietoare maxime și minime din fiecare deschidere sînt necesare numai două situații de încărcare cu sarcini utile (*A* și *B*), în timp ce pentru reazeme intermediare trebuie formate situații diferite, de tipurile *C* și *D*.

În fiecare situație de încărcare, suprapunerea de efecte se operează numai pentru valorile necesare trasării diagramei de momente încovoietoare maxime, anume momentul încovoietor din secțiunea de pe reazemul considerat, respectiv momentele încovoietoare din secțiunile de pe reazemele care mărginesc deschiderea considerată. În acest din urmă caz, de la linia determinată de cele două ordonate se trasează diagramă M^0_{g+p} sau M^0_g, după cum deschiderea este încărcată sau neîncărcată cu sarcina utilă (fig. 225, *b*).

Determinarea momentelor încovoietoare maxime sau minime, făcută pe această cale, nu este exactă pentru toate secțiunile grinzii continue, deoarece nu totdeauna situația cea mai defavorabilă corespunde cazului cînd sarcina utilă ocupă întreaga lungime a deschiderii. Din examinarea liniilor de influență M_j, trasate în figura 223, *d* pentru diferite poziții ale secțiunii *j*, rezultă:

(a) Pentru toate secțiunile situate *între cele două puncte fixe ale deschiderii*, cît și pentru secțiunile de pe reazeme, valorile maxime provin de la sarcini utile care încarcă *complet* deschiderile indicate de figura 225, *a*:

(b) Pentru secțiunile situate între reazeme și punctele fixe, valorile maxime rezultă din încărcarea *parțială* a deschiderii care conține secțiunea și încărcarea completă a celorlalte deschideri indicate de tipul de încărcare folosit.

Înseamnă că situațiile de încărcare din figura 225, *a* nu dau rezultate exacte pentru porțiunile de grindă cuprinse între reazeme și punctele fixe ale deschiderilor. Aceste porțiuni, avînd fiecare o lungime de circa 1/5 din deschidere, intervin mai puțin la dimensionare, astfel că pentru ele se admite o soluție aproximativă, prin racordarea celor două ordonate exacte ale diagramei (cea de pe reazem și cea din dreptul punctului fix).

Pe baza celor arătate, trasarea diagramei de momente încovoietoare maxime se face ca în figura 225, *b*, și anume:

— pentru deschideri, se determină diagramele M_{max} și M_{min} folosind situațiile de încărcare corespunzătoare (A sau B, împreună cu E), din care se reține porțiunile cuprinse între ordonatele punctelor fixe;

— pentru reazeme se calculează ordonatele M^{-}_{max} și M^{-}_{max} (M^{-}_{min});

— din dreptul punctelor fixe, diagramele se completează ducînd curbe de racordare (sau — mai simplu — linii drepte) pînă la ordonatele corespunzătoare găsite pentru secțiunile de pe reazeme.

Aspectul unei diagrame de momente încovoietoare maxime este arătat în figura 225, *c*.

C. LINII DE INFLUENȚĂ LA ARCE STATIC NEDETERMINATE

1. Arcul cu două articulații

a. **Linia de influență a împingerii H.** Pentru cazul uzual al arcului cu articulații de nivel (fig. 226, *a*), se începe cu linia de influență a cantității statice nedeterminate H. În acest scop se face referire la situația auxiliară arătată în figura 226, *b*, unde s-a suprimat împiedicarea de deplasare pe orizontală din extremitatea 1 și s-a aplicat sarcina-unitate $H=1$. Poziția deformată care rezultă, caracterizată prin deplasarea $u_{11,H}$ pe direcția legăturii suprimate, conduce la diagrama deplasărilor pe verticală $\delta_{i1,H}$ (i este secțiunea în care calcă sarcina mobilă de 1^{kN}). Coeficientul de influență din ecuația generală (14.2) se scrie pentru acest caz

$$h_{1i}=-\frac{\delta_{i1,H}}{u_{11,H}}=-\frac{\int m_{x1,H}\, m_{xi,f}\,\mathrm{d}\omega}{(1+\nu)\int y^2\mathrm{d}\omega}=-\eta_i\frac{\int m_{xi,f}\, y\,\mathrm{d}\omega}{\int y^2\mathrm{d}\omega}, \qquad (14.14)$$

unde numitorul și numărătorul sînt multiplicați cu El_c, de asemenea s-a ținut seama că $m_{x1,H}=-y$; pentru numitor s-a folosit expresia (11.14). Diagrama $m_{xi,f}$ se vede în figura 226, *c*, iar ordonatele în secțiunea curentă sînt

$$(1-i)\qquad m_{xi,f}=x_i'x/l=x_i'\xi, \qquad (i-2)\qquad m_{xi,f}=x_ix''/l=x_i\xi'. \qquad (14.15)$$

Rămîn de precizat legile de variație pentru y și $d\omega = ds \cdot I_c/I$, necesare la efectuarea integrărilor.

Este util de observat că expresia (14.14) se poate scrie și direct, folosind rezolvarea generală făcută pentru arcul dublu articulat în legătură cu figura 166, unde s-a stabilit expresia

$$H = \frac{\int M_{xs}\, y\, d\omega}{(1+\nu)\int y^2 d\omega} = \eta_1 \frac{\int M_{xs}\, y\, d\omega}{\int y^2 d\omega}.$$

În această expresie, diagrama M_{xs} corespunde aplicării pe sistemul de bază din figura 226, *c* a unor sarcini oarecare; cînd acționează numai sarcina mobilă de 1^{kN}, $M_{xs} = m_{xi,f}$, și deci se ajunge la aceeași expresie.

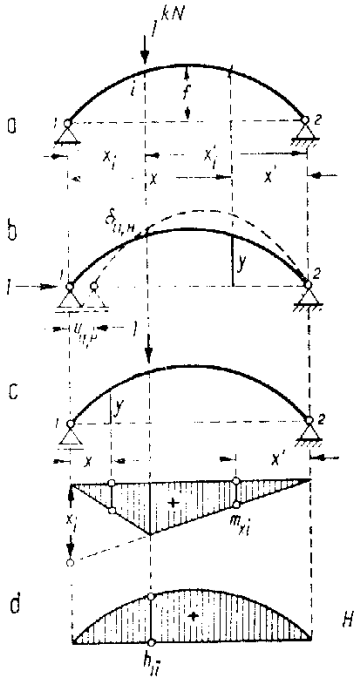


Fig. 226

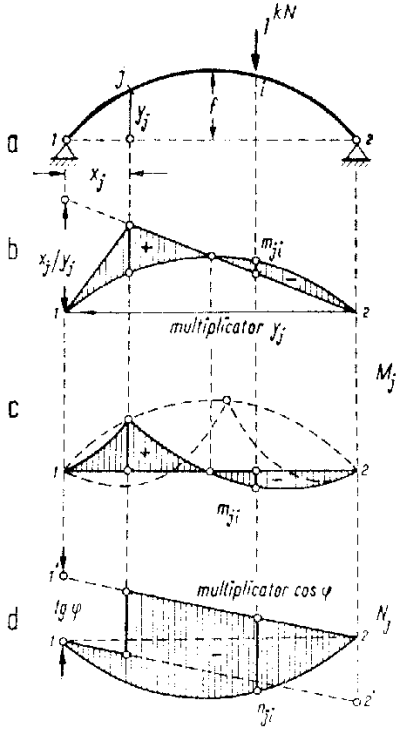


Fig. 227

Pentru exemplificare, fie arcul *parabolic* simetric la care ecuația axei este $y = 4f\xi(1-\xi)$, dacă se admite legea de variație $I = I_c/\cos\varphi$, se obține $d\omega = dx$. Introducînd în expresia numărătorului și ținînd seama de (14.15), rezultă

$$\int m_{xi,f}\, y\, dx = 4 f x_i' l \int_0^{\xi_i} \xi^2 (1-\xi) d\xi + 4 f x_i l \int_0^{\xi_i'} \xi'^2 (1-\xi')\, d\xi' =$$

$$= f l^2 \xi_i (1-\xi_i)(1+\xi_i-\xi_i^2)/3 = f l^2 \xi_i \xi_i' (1+\xi_i \xi_i')/3.$$

Numitorul are în acest caz valoarea $\int y^2 dx = 8\, f^2 l/15$. Admițînd că secțiunea i devine secțiunea curentă x, ecuația liniei de influență capătă forma

$$h_{1x} = \eta_i \frac{15}{8\, f^2 l} \int m_{xi}\, y\, dx = \eta_i \frac{5\, l}{8\, f}\, \xi\xi'(1 + \xi\xi'), \qquad (a)$$

care poate fi trasată prin puncte. Configurația liniei de influență H se vede în figura 226, d, așa cum rezultă din poziția deformată arătată în figura 226, b. Ordonata din secțiunea de la mijlocul deschiderii este $h_{1c} = \eta \cdot 25l/128f \simeq \eta \cdot l/5{,}12\, f$.

b. **Liniile de influență ale eforturilor.** Cunoscînd linia de influență a împingerii H, se pot construi liniile de influență ale eforturilor dintr-o anumită secțiune j prin suprapunere, folosind expresiile (11.5) și anume

$$M_j = M_j^0 - H y_j \quad y_j (M_j^0 y_j - H),$$
$$N_j = -T_j^0 \sin\varphi - H\cos\varphi = -\cos\varphi\,(T_j^0 \operatorname{tg}\varphi + H),$$
$$T_j = T_j^0 \cos\varphi - H\sin\varphi = \sin\varphi\,(T_j^0 \operatorname{ctg}\varphi - H).$$

Cînd linia de influență H se trasează prin puncte, este mai avantajos să se efectueze suprapunerea direct peste aceasta, folosind forma a doua a relațiilor, deoarece liniile de influență ale grinzii simplu rezemate sînt formate din variații liniare.

În figura 227, b este arătată construirea prin suprapunere a liniei de influență M_j. Ordonatele obținute trebuie măsurate la scara lui H și multiplicate cu y_j. Dacă se raportează la o axă orizontală, linia de influență capătă forma din figura 227, c (haşurat), avînd atît zonă pozitivă, cît și zonă negativă. Forma liniei de influență variază cu poziția secțiunii; în figură s-a arătat punctat și configurația liniei de influență pentru o secțiune din partea centrală, care are o zonă pozitivă și două zone negative.

În figura 227, d se vede determinarea liniei de influență N_j, care rezultă în întregime negativă. Configurația depinde de mărimea tangentei la arc în secțiunea j; cînd $\varphi = 0$, deci pentru secțiunea de la cheie, linia de influență N_c coincide cu linia de influență H, diferind numai ca semn.

Pentru exemplificare, se consideră și aici arcul *parabolic* simetric la care trebuie stabilite ecuațiile liniei de influență M_j aplicînd suprapunerea $m_{jx} = m_{jx}^0 - h_{1x}\, y_j$, unde s-a considerat că sarcina de 1kN calcă în secțiunea curentă x. Pentru grinda simplu rezemată se utilizează expresiile

$$(i-1) \quad m_{jx}^0 = x_j' \xi, \qquad (i-2) \quad m_{jx}^0 = x_j \xi',$$

iar corecția dată de împingere rezultă ținînd seama de ecuația

$$h_{1x} y_j = \eta_i \frac{5\, l}{8\, f}\, \xi\xi'(1 + \xi\xi') \cdot 4\, f \xi_j \xi_j = \eta_i \frac{5\, l}{2}\, \xi_j \xi_j' \omega_p. \qquad (a)$$

unde pentru simplificarea scrierii s-a notat $\xi\xi'(1 + \xi\xi') = \omega_p$. Se obțin ecuațiile

$$(i-1) \qquad m_{jx} = x_j' \xi - \eta_i \frac{5\, l}{2}\, \xi_j \xi_j' \omega_p = l(1 - \xi_j)(\xi - 2{,}5\eta_i \xi_j \omega_p),$$

$$(j-2) \qquad m_{jx} = x_j \xi' - \eta \frac{5\, l}{2}\, \xi_j \xi_j' \omega_p = l(1 - \xi_j')(\xi' - 2{,}5\eta_i \xi_j' \omega_p), \qquad (b)$$

care pot fi particularizate pentru diferite poziții ale secțiunii j.

2. Arcul dublu încastrat

Este avantajos să se utilizeze metoda centrului elastic și la construirea liniilor de influență, în sensul că se determină mai ușor liniile de influență ale necunoscutelor din acest punct, după care toate celelalte linii de influență se obțin prin suprapunere. Pentru necunoscutele din centrul elastic dispunem de expresiile generale (11.38), astfel că se poate porni direct de la acestea, particularizîndu-le pentru cazul încărcării cu sarcina mobilă de 1^{kN}. Rezultă următorii coeficienți de influență pentru necunoscutele X_1, X_2, X_3

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1s}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{i1}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2s}}{\delta_{22}} = -\frac{\delta_{i2}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3s}}{\delta_{33}} = -\frac{\delta_{i3}}{\delta_{33}}, \tag{14.16}$$

unde s-a ținut seama de reciprocitățile $\delta_{1i}=\delta_{i1}$, $\delta_{2i}=\delta_{i2}$, $\delta_{3i}=\delta_{i3}$. În acest mod, fiecare numărător reprezintă deplasarea pe verticală a secțiunii i, unde calcă sarcina de 1^{kN}, cînd sistemul de bază este încărcat cu sarcina-unitate corespunzătoare necunoscutei considerate. Numitorii au aceleași semnificații ca în cazul sarcinilor cu poziție fixă și sînt dați de relațiile (11.39).

Este ușor de controlat că expresiile (14.16) pot fi obținute și din ecuația generală (14.2). Folosind sistemul de bază sub forma din figura 228, *a*, s-au reprezentat în figurile 228, *b-d* cele trei cazuri de încărcare cu necunoscute-unitate, precum și deformatele corespunzătoare. S-a ținut seama de proprietatea centrului elastic, că aplicarea fiecărei necunoscute pe sistemul de bază produce deplasare numai pe propria sa direcție. Astfel, pentru încărcarea cu $X_1=1$ (fig. 228, *b*), bara rigidă convențională capătă o translație orizontală de mărime δ_{11}, și deci în extremitatea *1* tangenta la deformată rămîne paralelă cu tangenta inițială la axa arcului. Asemănător, pentru încărcarea cu $X_2=1$ (fig. 228, *c*), bara rigidă convențională suferă o translație pe verticală δ_{22}, iar pentru încărcarea cu $X_3=1$ (fig. 228, *d*) bara se rotește în jurul centrului elastic *O* cu rotirea δ_{33}. Pe cele trei poziții deformate s-au însemnat deplasările care intervin în rapoartele (14.16). Aceste deformate, văzute sub forma diagramelor de deplasări pe verticală, permit să se aprecieze forma liniilor de influență căutate.

Calculul numărătorilor δ_{ik} se face folosind expresia

$$\delta_{ik} = \int m_{xi}\, m_{xk}\, \mathrm{d}s/EI = -\int (x_1 - x_{1i})\, m_{xk}\, \mathrm{d}s/EI,$$

unde s-a ținut seama că $m_{xi} = -(x_1 - x_{1i})$. Pentru m_{xk} se introduc mărimile cunoscute: $m_{x1} = -y_1$, $m_{x2} = x_1$ și $m_{x3} = 1$, astfel că ecuațiile celor trei linii de influență sînt

$$X_1 = -\eta_i \frac{\int (x_1 - x_{1i}) y_1 \,\mathrm{d}\omega}{\int y_1^2 \,\mathrm{d}\omega}, \quad X_2 = \frac{\int (x_1 - x_{1i}) x_1 \,\mathrm{d}\omega}{\int x_1^2 \,\mathrm{d}\omega}, \quad X_3 = \frac{\int (x_1 - x_{1i}) \,\mathrm{d}\omega}{\int \mathrm{d}\omega} \tag{14.17}$$

Rămîne să se precizeze forma axei arcului și legea de variație a momentului de inerție, spre a se putea trece la efectuarea integralelor de la numărător.

O dată stabilite liniile de influență ale necunoscutelor din centrul elastic, se poate trece la determinarea liniilor de influență pentru reacțiuni și eforturi. Astfel, pentru reacțiunile din cele două încastrări, $H=X_1$, $V_1=X_2$, $V_2=1-X_2$ și

$$M_1=X_3+X_1c-X_2\cdot l/2,\quad M_2=X_3+X_1c+X_2\cdot l/2-(l-2x_1)/2, \qquad (14.18)$$

iar pentru eforturile M_j și N_j dintr-o secțiune oarecare j se folosesc suprapunerile:

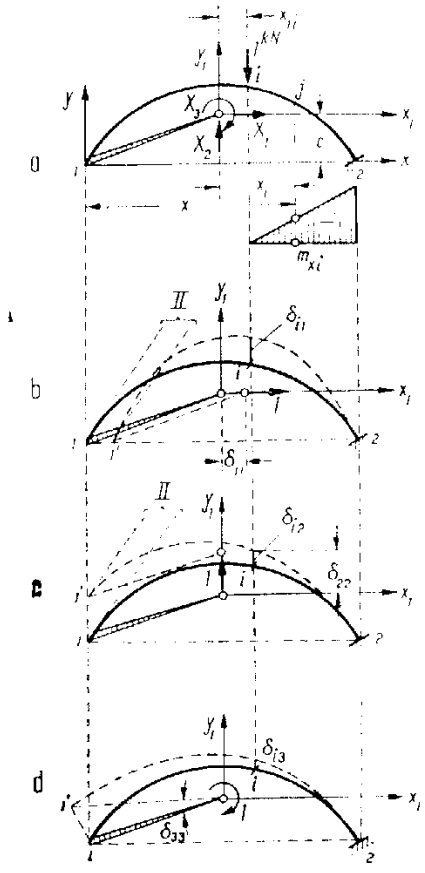


Fig. 228

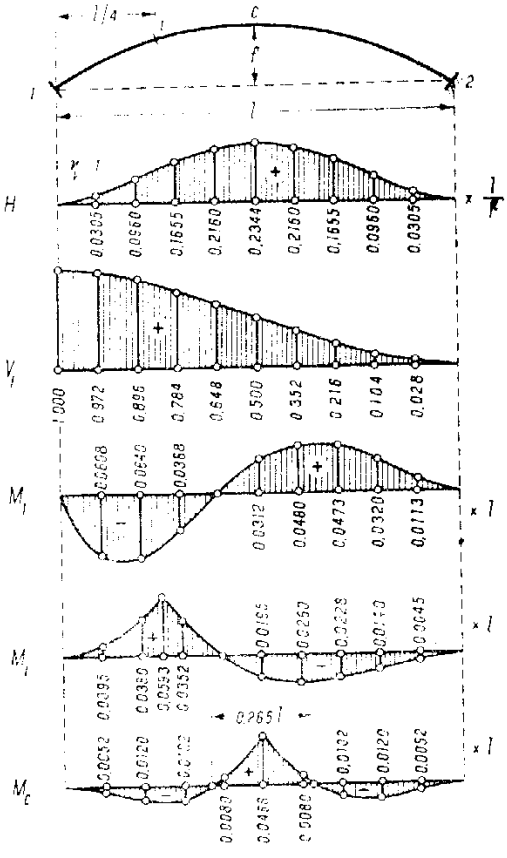


Fig. 229

(*1-j*) $M_j=X_3-X_1y_{1j}+X_2x_{1j}-(x_{1j}-x_1)$, $N_j=-X_1\cos\varphi-(X_2-1)\sin\varphi$,

(*j-2*) $M_j=X_3-X_1y_{1j}+X_2x_{1j}$, $N_j=-X_1\cos\varphi-X_2\sin\varphi$. (14.19)

Pentru secțiunea de la cheie rezultă

(*1—c*) $M_c=X_3-X_1(f-c)-x_1$, (*c—2*) $M_c=X_3-X_1(f-c)$, (14.20)

precum și $N_c=-X_1$

Pentru exemplificare, fie cazul arcului *parabolic* simetric ($I=I_c/\cos\varphi$). La efectuarea integralelor din expresiile (14.17) se foloseşte sistemul de referinţă cu originea în extremitatea 1. Introducînd relaţiile

$$x_1=x_{1i}=x-x_i, \qquad y_1=y-2f/3, \qquad x_1=x-l/2,$$

şi ţinînd seama că $y=4f\xi(1-\xi)$, se obţine

$$\int(x-x_i)\,(y-2f/3)\,\mathrm{d}x=\frac{2fl^2}{3}\int_{\xi_i}^{1}(\xi-\xi_i)\,(6\xi-6\xi^2-1)\mathrm{d}\xi=-\frac{fl^2}{3}\,\xi_i^2(1-\xi_i)^2,$$

$$\int(x-x_i)\,(x-l/2)\mathrm{d}x=\frac{l^3}{2}\int_{\xi_i}^{1}(\xi-\xi_i)(2\xi-1)\mathrm{d}\xi=\frac{l^3}{12}\,(1-\xi_i)\,(1+\xi_i-2\,\xi_i^2),$$

$$\int(x-x_i)\mathrm{d}x=l^2\int_{\xi_i}^{1}(\xi-\xi_i)\,\mathrm{d}\xi=\frac{l^2}{2}\,(1-\xi_i)^2,$$

astfel că din expresiile (11.46) rezultă următoarele ecuaţii ale liniilor de influenţă pentru necunoscutele din centrul elastic

$$X_1=\eta\,\frac{15\,l}{4\,f}\,\xi^2(1-\xi)^2, \quad X_2=(1-\xi)\,(1+\xi-2\,\xi^2), \quad X_3=\frac{l}{2}\,(1-\xi)^2, \tag{a}$$

unde abscisa ξ_i a secţiunii în care calcă sarcina de 1kN a fost înlocuită cu abscisa secţiunii curente.

Se pot găsi acum ecuaţiile liniilor de influenţă ale reacţiunilor şi eforturilor. Pentru reacţiunile din încastrări se aplică relaţiile (11.18); rezultă

$$h_x=\eta\,\frac{15\,l}{4\,f}\,\xi^2(1-\xi)^2, \qquad v_{1x}=(1-\xi)^2(1+2\,\xi), \qquad v_{2x}=(1-\xi')^2(1+2\,\xi'),$$

$$m_{1x}=\frac{l}{2}\,\xi(1-\xi)^2(5\,\eta\xi-2), \qquad m_{2x}=\frac{l}{2}\,\xi'(1-\xi')^2\,(5\eta\xi'-2). \tag{b}$$

Datorită simetriei arcului, liniile de influenţă V_1 şi V_2, respectiv M_1 şi M_2, sînt aceleaşi dar inversate (pentru V_1 şi M_1 originea este în extremitatea 1, iar pentru V_2 şi M_2 originea este în extremitatea 2).

Pentru linia de influenţă a momentului încovoietor dintr-o secţiune j se aplică relaţiile (14.19), din care se obţin ecuaţiile:

$$(1-j) \qquad m_{jx}=\frac{l}{2}\,(1-\xi')^2\,[2\,\xi_j+2\,(2\,\xi_j'-1)\xi'+5\eta_i(1-6\,\xi_j\xi_j')\xi'^2],$$

$$(j-2) \qquad m_{jx}=\frac{l}{2}\,(1-\xi)^2\,[2\,\xi_j+2\,(2\,\xi_j-1)\xi+5\,\eta_i(1-6\,\xi_j\xi_j')\xi^2], \tag{c}$$

corespunzătoare celor două ramuri ale liniei de influenţă. Ordonata din dreptul secţiunii j este dată de oricare dintre aceste ecuaţii, făcînd $\xi=\xi_j$ sau $\xi'=\xi_j'$; rezultă

$$m_{jj}=\frac{l}{2}\,\xi_j^2\,\xi_j'^2\,[4+5\,\eta_i(1-6\,\xi_j\xi_j')].$$

Precizînd poziţia secţiunii, din ecuaţiile *(c)* se obţine linia de influenţă respectivă. Astfel, pentru secţiunea de la *cheie* ($\xi_j=\xi_j'=1/2$) se găseşte ecuaţia

$$(1-c) \qquad m_{cx}=\frac{l}{2}\,\xi^2\left(1-\frac{5\,\eta}{2}\,\xi'^2\right)\simeq-\frac{l}{4}\,\xi^2(3-10\,\xi+5\,\xi^2), \tag{d}$$

pentru prima jumătate a deschiderii; pe a doua jumătate linia de influenţă este simetrică.

În figura 229 sînt trasate liniile de influenţă H, V_1, M_1, M_c, precum şi linia de influenţă a momentului încovoietor din secţiunea de la sfertul deschiderii, considerînd $\eta_i=1$.

PARTEA A TREIA

COMPORTAREA NELINIARĂ A STRUCTURILOR. SOLICITĂRI DINAMICE

CALCULUL DE ORDINUL II, STABILITATEA ECHILIBRULUI STRUCTURILOR

A. GENERALITĂȚI

1. Calculul pe axa deformată

Metodele de calcul prezentate în capitolele precedente au fost stabilite admițînd ipotezele simplificatoare ale Staticei construcțiilor, anume: (1) ecuațiile de echilibru static pot fi scrise în raport cu poziția inițială a structurii; (2) în condițiile echilibrului elastic, se poate admite proporționalitatea între sarcini și deplasări, astfel că este aplicabilă suprapunerea liniară a efectelor. Aceste ipoteze definesc domeniul *staticei liniare*, în care efectele (eforturi, deplasări) se exprimă prin relații liniare în funcție de sarcini, ceea ce conduce la un *calcul de ordinul I*.

Ipotezele simplificatoare menționate au la bază premisa că poziția deformată a structurii se încadrează în domeniul *micilor deplasări*, deci că — în raport cu dimensiunile geometrice ale structurii — deplasările diferitelor secțiuni pot fi asimilate unor infiniți mici. S-a atras însă de la început atenția și anume în legătură cu figura 108, *c*, că pot interveni și situații cînd deformarea structurii influențează modul de acțiune al sarcinilor, astfel că nu mai pot fi admise ca independente efectele unor sarcini aplicate concomitent.

Situații de acest fel se întîlnesc la structuri zvelte care au bare *puternic comprimate*, cum sînt structurile metalice de hale industriale cu poduri rulante grele, structurile etajate ce suportă sarcini gravitaționale mari etc. Experiența arată că în barele unor asemenea structuri se dezvoltă eforturi ce pot depăși substanțial pe cele determinate în condițiile primei ipoteze simplificatoare, anume utilizînd ecuații de echilibru static raportate la poziția inițială. Devine astfel necesar să se renunțe la această ipoteză și să se considere situația de echilibru static din poziția deformată.

Fie de exemplu bara din figura 230, *a*, încărcată atît cu sarcini transversale, cît și cu perechea de sarcini axiale P. Cît timp forțele exterioare sînt raportate la poziția inițială, sarcinilor transversale le corespunde diagrama de momente încovoietoare M_x^0, iar perechea de sarcini P produce o forță axială $N_x^0 = -P$. Raportînd forțele exterioare la poziția deformată a barei, se constată că perechea de sarcini P produce și încovoiere, reprezentată de diagrama suplimentară de momente încovoietoare M_x^*, astfel că diagrama totală este

$$M_x = M_x^0 - M_x^*, \qquad \text{unde} \qquad M_x^* = P v_x, \tag{15.1}$$

în timp ce corecția de forță axială este neglijabilă și deci $N_x \simeq N_x^0 = -P$.

Compararea celor doi termeni din expresia lui M_x arată că:

— Pentru sarcini axiale mici și bară puțin deformabilă, corecția M_x^* este neglijabilă față de M_x^0 și se ajunge la același rezultat ca în cazul raportării la poziția inițială; se poate deci utiliza calculul de ordinul I, unde ordonatele diagramei $M_x = M_x^0$ sînt proporționale cu sarcinile transversale.

— Pentru sarcini axiale puternice și bară mai flexibilă, surplusul de moment incovoietor M_x^* devine apreciabil și nu mai poate fi neglijat; înseamnă că,

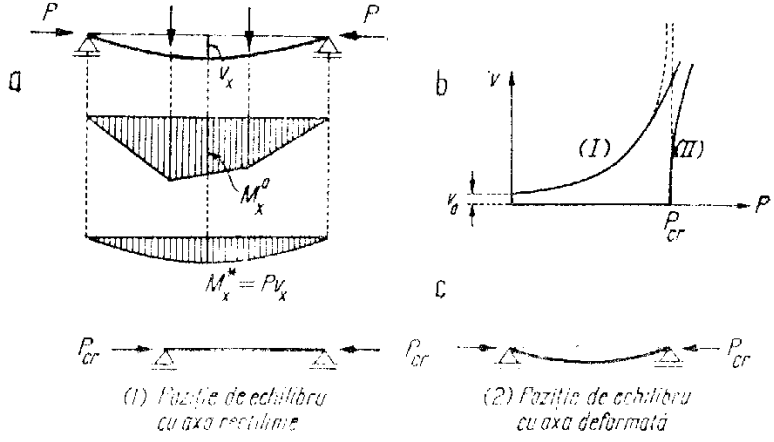


Fig. 230

pentru aplicarea condiției de echilibru static, forțele exterioare trebuie raportate la poziția deformată a barei.

Se ajunge astfel la *calculul de ordinul II*, unde proporționalitatea ordonatelor diagramei totale M_x cu sarcinile transversale dispare, datorită diagramei suplimentare M_x^* produsă de sarcinile axiale. Desigur, calculul de ordinul II este mai complicat, deoarece intervin deplasările ce caracterizează poziția deformată, care inițial nu sînt cunoscute. Aceste deplasări pot fi de asemenea exprimate printr-o sumă de doi termeni, anume

$$v_x = v_x^0 + v_x^*, \tag{15.2}$$

unde v_x^0 corespunde diagramei M_x^0 și este deci proporțională cu sarcinile transversale, în timp ce v_x^* reprezintă surplusul de deplasare provenit din efectul de ordinul II corespunzător diagramei M_x^*.

Relațiile (15.1) și (15.2) arată că nici cea de a doua ipoteză simplificatoare nu mai este aplicabilă, deoarece efectele (eforturi, deplasări) nu mai sînt proporționale cu sarcinile transversale. Înseamnă că suprapunerea efectelor nu mai poate fi utilizată, decît în condițiile restrictive ce vor fi arătate în continuare.

Calculul pe axa deformată, la structuri cu bare flexibile și puternic comprimate, conduce la determinarea unor eforturi mai apropiate de realitate, contribuind astfel la o dimensionare mai justă, care diferă deseori sensibil față

de rezultatele obținute pe baza unui calcul de ordinul I. În consecință, este necesar să se stabilească modalități sistematizate pentru calculul de ordinul II, care *introduce efectul forțelor axiale asupra deformării de încovoiere a barelor*, prin diagramele suplimentare M_x^*.

Alături de acest prim aspect, mai trebuie subliniat un al doilea. Să admitem că perechea de sarcini axiale P crește. Rezultatele experimentale arată că variația săgeții barei — care nu mai respectă proporționalitatea cu sarcinile transversale — se accentuează ca în figura 230, *b* (I), astfel că în vecinătatea unei anumite valori P_{cr} săgeata devine foarte mare și bara își pierde capacitatea portantă.

Se ajunge la un fenomen asemănător fenomenului de *flambaj*, cunoscut din Rezistența materialelor, cînd bara este considerată încărcată numai cu perechea de sarcini axiale P și rămîne nedeformată cît timp $P<P_{cr}$; pentru $P=P_{cr}$ devin posibile două forme de echilibru, ca în figura 230, *c*, în prima bară rămînînd rectilinie ($v_x=0$), iar a doua deformîndu-se ($v_x\neq 0$). Această situație, numită și *bifurcare a echilibrului*, este reprezentată în figura 230, *b* (II), unde liniile punctate corespund fenomenului teoretic, iar liniile pline — fenomenului real.

De fapt, fenomenul pur de flambaj al unei bare încărcate la capete cu sarcini axiale constituie o schematizare teoretică, ce ar corespunde momentului cînd devin posibile două poziții de echilibru distincte, bara putînd trece brusc de la una la alta. În realitate, prima situație (păstrarea axei nedeformate) nu este fizic posibilă datorită inevitabilelor imperfecțiuni privind centrarea sarcinilor, eliminarea oricărei excentricități în alcătuirea barei, eliminarea oricăror acțiuni transversale, etc. Întotdeauna fenomenul este precedat de o anumită deformare laterală a barei, chiar dacă nu sînt aplicate și sarcini transversale, astfel că cele două cazuri din figura 230, *b* se apropie într-o anumită măsură.

Pot exista totuși și cazuri de pierdere bruscă de stabilitate, de exemplu la un cadru cu noduri deplasabile simetric și simetric încărcat, care se deformează simetric și unde creșterea sarcinilor peste o anumită limită produce trecerea bruscă la o deformată antisimetrică, cum se arată mai departe în legătură cu figura 253.

În raport cu modul de acțiune a sarcinilor și prin schematizarea fenomenului real, se pot deosebi deci două situații de pierdere a stabilității la bare puternic comprimate:

— prin trecere bruscă de la poziția nedeformată la cea deformată, cînd pe bară nu acționează sarcini transversale;

— prin accentuare puternică a deformării, cînd în cursul barei acționează sarcini transversale (fenomen analog cu o scădere a rigidității la încovoiere).

Pentru aceeași structură și aceeași distribuție de sarcini axiale, valoarea P_{cr} este aceeași în ambele situații, indiferent dacă se consideră sau nu sarcini transversale aplicate pe bare. În consecință, fenomenul de pierdere a stabilității se studiază obișnuit în absența sarcinilor transversale, ceea ce simplifică substanțial calculul. Sarcini transversale în cursul barelor apar numai în calculul de ordinul II.

Sintetizînd, trebuie reținută deosebirea esențială dintre cele două aspecte examinate mai sus, anume între calculul de stabilitate și calculul de ordinul II.

(a) În calculul de stabilitate mărimea sarcinilor axiale nu este cunoscută, urmînd să se determine valoarea P_{cr} a acestora pentru care intervine fenomenul de pierdere a stabilității, în accepția de fenomen de flambaj.

(b) În calculul de ordinul II sarcinile transversale și axiale sînt cunoscute, urmînd să se determine mărimile eforturilor și ale deplasărilor ce apar cînd raportarea forțelor exterioare se face la poziția deformată.

Dacă, într-un calcul de ordinul II și pentru anumite mărimi ale sarcinilor axiale, eforturile și deplasările devin foarte mari (teoretic tînd spre infinit), înseamnă că s-a ajuns la pierderea stabilității. Rezultă că pierderea de stabilitate a structurii apare ca o situație limită în calculul de ordinul II.

2. Conceptul de stabilitate

În construcțiile moderne, utilizarea materialelor de înaltă rezistență și reducerea dimensiunilor elementelor au adus pe primul plan — în special la construcții metalice — necesitatea *verificării* la stabilitate a elementelor de construcție și a structurilor în ansamblu. Această verificare este deseori esențială, deoarece pierderea stabilității echilibrului poate surveni pentru mărimi de sarcini cărora le corespund eforturi unitare mult mai mici decît cele admisibile pe baza condiției de rezistență.

Fenomenul de pierdere a stabilității poate apare pe neașteptate, fără a fi precedat de producerea unor deformări sau defecte care să atragă atenția, deci fără posibilitatea de a se interveni la timp pentru întărirea sau sprijinirea construcției. Fenomenul poate apare localizat la o anumită parte sau la un anumit element al structurii, iar alteori chiar în formă cu totul locală, dar care antrenează apoi fenomene de ansamblu ce pot compromite parțial sau total construcția. La structuri ușoare, practic toate accidentele ce se produc sînt datorite pierderilor de stabilitate.

Pierderea de stabilitate se poate produce în moduri diferite. De fapt, această denumire generică include fenomene variate, dar care au toate în comun faptul că se manifestă prin producerea unei deformări accentuate a structurii, sau a unor elemente ale acesteia, periclitîndu-le grav. O structură încărcată în planul său își poate pierde stabilitatea în acest plan, dar fenomenul poate apare și normal pe plan. La o structură spațială, de exemplu la un turn, pierderea de stabilitate se poate produce prin deformare laterală, dar și prin torsiune generală. O grindă încovoiată își poate pierde stabilitatea și prin ieșire din plan, cu intervenția unor fenomene de torsiune, după cum la o grindă cu inimă plină poate interveni valoarea inimii.

Multe fenomene de pierdere a stabilității se preîntîmpină prin măsuri constructive luate la alcătuirea elementelor structurii și se concretizează prin introducerea de rigidizări. Verificarea propriu-zisă prin calcul intervine de obicei referitor la stabilitatea echilibrului de ansamblu al structurii.

Capitolul de față se limitează la studiul stabilității structurilor plane în planul lor, în strînsă legătură cu problema calculului de ordinul II al acestor structuri.

O structură acționată de sarcini trebuie să fie *în echilibru*, iar acest echilibru trebuie să fie *stabil*. Cînd echilibrul este *nestabil*, poziția de echilibru este numai momentană și nu poate fi asigurată, deoarece o cauză cît de mică duce la îndepărtarea de această poziție. În cazul limită — echilibru *indiferent*, structura se menține în poziția inițială de echilibru, sau poate trece în altă poziție de echilibru, rămînînd în oricare dintre acestea.

Natura unei anumite stări de echilibru se poate identifica utilizînd următorul procedeu: se impune structurii trecerea din poziția inițială într-o poziție vecină foarte apropiată, după care este lăsată liberă. Pot surveni trei situații, cărora le corespund cele trei caracterizări ale naturii echilibrului:

— echilibru *stabil*, cînd structura revine la poziția inițială;
— echilibru *nestabil*, cînd structura se îndepărtează în continuare;
— echilibru *indiferent*, cînd structura rămîne în poziția vecină.

Această ultimă situație este cea care interesează pentru verificare, deoarece reprezintă *limita echilibrului stabil*, căreia îi corespunde mărimea P_{cr} a sarcinii axiale, numită și *sarcină critică*.[1]

Mijlocul de determinare a mărimii sarcinii critice constă în cercetarea efectului trecerii structurii din poziția inițială în poziția vecină ce i se impune. Sînt două căi principale de studiu și anume:

— *criteriul echilibrului static*, care cercetează situația de echilibru a forțelor raportată la poziția deplasată a structurii;
— *criteriul energetic*, care cercetează variația energiei totale a sistemului ce corespunde trecerii din poziția inițială în poziția deplasată.

Specificul acestor căi poate fi pus în evidență prin examinarea unui caz simplu, anume o bară rigidă articulată în *1* și legată cu un resort elastic în *2* (constanta resortului este c — forța ce produce variația de lungime $\delta=1$). Se cercetează natura stării de echilibru în poziția inițială (fig. 231, *a*). Pentru aceasta, se consideră impusă deplasarea în poziția vecină (fig. 231, *b*) și se aplică condiția ce caracterizează echilibrul indiferent, spre a afla mărimea P_{cr} a sarcinii axiale P.

(1) *Criteriul echilibrului static.* Considerînd forțele care acționează bara în poziția deplasată, se disting două tendințe. Pe de o parte, forțele exterioare (aici sarcina P) tind să îndepărteze bara în continuare, deoarece prin noua lor poziție creează o solicitare în acest sens (aici — un moment de răsturnare); pe de altă parte, reacțiunile ce apar datorită trecerii în poziția deplasată (aici reacțiunea $R=c\delta$) tind să readucă bara în poziția inițială. În loc de a căuta care tendință predomină, deci a stabili dacă echilibrul este stabil sau

[1] Dacă structura are mai multe bare puternic comprimate și deci sînt mai multe sarcini axiale, dar a căror variație depinde de un singur parametru, mărimea maximă a acestuia — care corespunde atingerii situației de echilibru indiferent — se numește *parametru (factor) de încărcare critic*.

nestabil pentru o anumită mărime a sarcinii P, apare indicat să se lase nedeterminată această sarcină și să se egaleze cele două tendințe, exprimînd astfel echilibrul static în poziția deplasată drept criteriu spre a obține mărimea P_{cr}.

Faptul că situația de echilibru indiferent corespunde unei *anumite* mărimi a sarcinii P, rezultă deoarece tendința de îndepărtare depinde direct de această sarcină, în timp ce tendința de revenire depinde numai de poziția deplasată impusă barei.

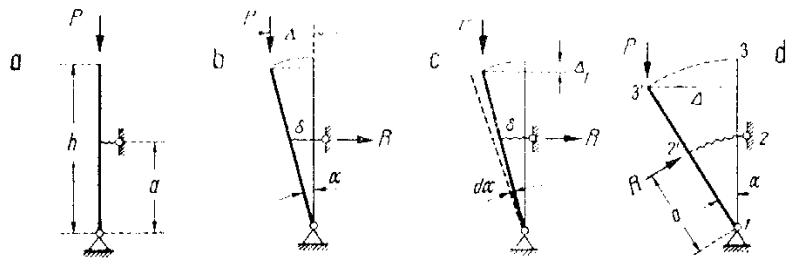


Fig. 231

Exprimarea echilibrului static în poziția deplasată se poate face fie utilizînd ecuațiile obișnuite de echilibru, fie prin deplasări virtuale. Mai jos sînt aplicate ambele alternative, pentru cunoașterea specificului lor:

— Se utilizează ecuația de echilibru prin momente în raport cu articulația 1. Tendința de îndepărtare este $M_r=P\Delta$, iar tendința de revenire $M_s=Ra$; egalîndu-le pentru $P=P_{cr}$, se obține

$$P_{cr}\Delta=Ra, \qquad \text{sau} \qquad P_{cr}=Ra/\Delta=c\delta a/\Delta=ca^2/h,$$

deoarece $\delta=\Delta\, a/h$.

— Se utilizează deplasările virtuale. Trebuie considerată situația de echilibru *din poziția deplasată* și deci pornind *de la aceasta* se dă deplasarea virtuală, sub forma unei deplasări suplimentare $d\alpha$. Înseamnă că forțele P și $R=c\delta$ parcurg *variațiile* deplasărilor Δ_1 și δ (fig. 231, *c*), deci $d\Delta_1/d\alpha$ și $d\delta/d\alpha$. Rezultă

$$\Delta_1=h(1-\cos\alpha)\simeq h[1-(1-\alpha^2/2)]=h\alpha^2/2 \text{ și } \delta=a\alpha,$$

unde $\cos\alpha$ a fost dezvoltat în serie și s-au reținut numai primii doi termeni. Variațiile deplasărilor sînt

$$d\Delta_1/d\alpha=h\alpha \qquad \text{și} \qquad d\delta/d\alpha=a,$$

astfel încît condiția de echilibru prin deplasări virtuale devine

$$P_{cr}\,h\alpha=Ra=ca^2\alpha, \qquad \text{sau} \qquad P_{cr}=ca^2/h,$$

regăsind același rezultat.

Se constată că mărimea P_{cr} depinde de rigiditatea resortului (constanta c). Cît timp $P<P_{cr}$, resortul asigură stabilitatea echilibrului barei rigide prin

însăși prezența sa și bara rămîne verticală dacă este acționată centric de P. În această situație, resortul nu are efort; capacitatea sa de a prelua efort pentru o deplasare laterală face ca echilibrul să fie stabil.

(2) *Criteriul energetic*. Cînd bara trece în poziția deplasată, variază energia potențială a sistemului și anume:

— energia potențială de poziție a sarcinilor *scade*, deoarece îndepărtarea de poziția de echilibru are loc în sensul în care s-ar produce fenomenul de pierdere a stabilității; scăderea energiei potențiale de poziție se măsoară prin lucrul mecanic *pozitiv* dat de sarcini (L_e);

— energia potențială a sistemului *crește* prin deformare (aici lungirea resortului), creșterea fiind măsurată printr-un lucru mecanic *negativ* (L_i).

Conform teoremelor lui Dirichlet și Liapunof, echilibrul inițial este stabil, instabil sau indiferent, după cum energia totală a sistemului crește, scade sau rămîne constantă cînd sistemul trece în poziția deplasată. Sarcina critică corespunde deci unei variații nule a energiei totale, criteriu care duce la condiția $L_e+L_i=0$.

Evaluarea lucrului mecanic pozitiv L_e rezultă observînd că sarcina P parcurge cu întreaga sa intensitate deplasarea $\Delta_1=h\alpha^2/2$, în timp ce L_i este produs de reacțiunea R parcurgînd deplasarea δ, ambele variind de la valoarea inițială 0 la valorile finale $R=c\delta=ca\alpha$, respectiv $\delta=a\alpha$. Se poate deci scrie

$$L_e=P\Delta_1=Ph\alpha^2/2 \quad \text{și} \quad L_i=-R\delta/2=-ca^2\alpha^2/2,$$

de unde

$$L_e+L_i=P_{cr}h\alpha^2/2-ca^2\alpha^2/2=0, \quad \text{sau} \quad P_{cr}=ca^2/h,$$

obținînd aceeași valoare ca și prin metoda echilibrului static.

În legătură cu specificul problemei de stabilitate, așa cum apare din examinarea făcută pînă aici, este necesară o observație esențială și anume: în toate variantele de calcul utilizate, se vede că *parametrul geometric* α nu apare în mărimea sarcinii critice. Înseamnă deci că poziția deplasată ce rezultă prin pierderea stabilității rămîne nedeterminată, cunoscîndu-se numai *configurația* acesteia. Problema de stabilitate se reduce astfel la *determinarea sarcinii critice* și nu la stabilirea poziției deplasate efective ce-i corespunde, definită prin mărimea deplasărilor.

Această situație este datorită unei *aproximații* admise în calcul, care provine de la considerarea unei poziții deplasate foarte apropiată de poziția inițială; pentru deplasări se aplică deci regulile de lucru cu infiniți mici. De îndată ce se consideră o deplasare *finită* de la poziția inițială, aceasta intervine în mărimea sarcinii critice, astfel că se poate urmări variația poziției deplasate în funcție de variația mărimii acestei sarcini.

Reluînd același exemplu în figura 231, *d*, dar admițînd că unghiul α este finit, rezultă că un resort *scurt* ia poziție după coarda arcului de cerc descris de punctul *2* cînd trece de *2'*. **Înseamnă că reacțiunea R acționează în *2'* normal**

pe poziția deplasată $1-3'$ a barei rigide. Condiția de echilibru este $P\Delta = Ra$, unde

$$\Delta = h \sin \alpha, \qquad \delta = a\alpha, \qquad R = c\delta = ca\alpha$$

și deci

$$P_{cr} = R\Delta/a = c\frac{a^2}{h}\frac{\alpha}{\sin\alpha}.$$

Cînd poziția deplasată este foarte apropiată de cea inițială, α este mic și se poate admite $\alpha \simeq \sin\alpha$, regăsind valoarea P_{cr} stabilită mai înainte. Pentru o deplasare finită, $\sin\alpha \neq \alpha$ și α crește mai repede decît $\sin\alpha$, deci P_{cr} *crește* pe măsură ce bara se îndepărtează de poziția inițială. Pentru un anumit P_{cr} este deci determinată poziția deplasată corespunzătoare. La verificarea de stabilitate interesează de fapt P_{cr} *minim*, astfel că este suficient să se considere o poziție deplasată foarte apropiată, care permite simplificări importante de calcul pentru determinarea sarcinii critice.

Examinarea făcută scoate în evidență un aspect esențial al fenomenului real; pentru deplasări finite, mărimea deplasării variază cu mărimea sarcinii și deci — odată cu trecerea în noua configurație de echilibru — se revine la un echilibru *stabil*, dar deformabilitatea sistemului se accentuează rapid. Acest fenomen este reprezentat în figura 230, *b* prin linii pline.

Dintre cele două căi examinate mai sus pentru identificarea situației de echilibru indiferent, în cele ce urmează se va utiliza de preferință criteriul echilibrului static, care concordă cu modul de tratare din capitolele precedente.

B. ELEMENTE PRELIMINARE DE CALCUL

1. Sarcini critice și forme proprii de pierdere a stabilității

În cazul din figura 231, poziția deplasată de pierdere a stabilității nu a depins decît de un parametru geometric, deoarece în alcătuirea sistemului există un singur element elastic (resortul). Sistemul are astfel un grad de libertate, căruia îi corespunde o singură poziție deplasată posibilă. De obicei sistemele au mai multe grade de libertate și deci pot interveni mai multe poziții deplasate distincte cînd se studiază problema stabilității echilibrului.

Este util de precizat că *prin grade de libertate se înțelege aici numărul de parametri independenți care pot defini poziția tuturor punctelor unui sistem, cînd acesta trece din poziția inițială într-o poziție vecină.* În această accepție, un sistem format din mai multe porțiuni rigide, prinse între ele prin elemente elastice, are un număr *finit* de grade de libertate. Astfel, bara din figura 232, *a*, unde cele trei porțiuni rigide sînt legate prin elementele elastice din secțiunile *i* și *j* (care se pot deforma, cu dezvoltare de momente încovoietoare proporționale cu rotirile relative ce intervin), are două grade de libertate cu parametrii geometrici δ_i și δ_j; sînt posibile deci cele două poziții deplasate distincte indicate în figură.

În aceeași semnificație, o bară în întregime elastică are un număr *infinit* de grade de libertate, deoarece o configurație deformată poate fi complet definită numai cunoscînd poziția tuturor elementelor care o compun, prin deplasările lor față de poziția inițială. În figura 232, *b* sînt arătate anumite deformate posibile de pierdere a stabilității; este ușor de văzut că — mărind numărul punctelor de inflexiune — se ajunge la un număr infinit de asemenea deformate, care toate satisfac condiția de compatibilitate.

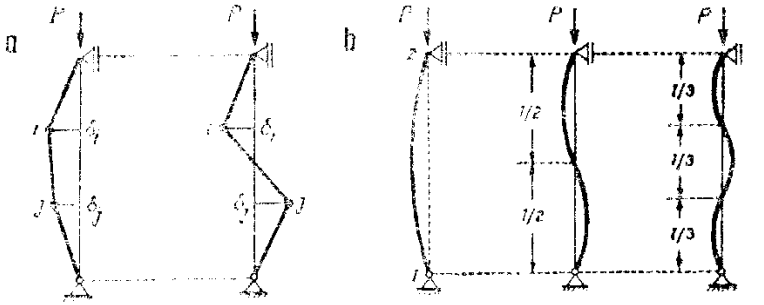


Fig. 232

Cercetarea situației de echilibru indiferent implică considerarea unei poziții deplasate compatibile. Cînd sînt posibile mai multe asemenea poziții, aplicarea criteriului echilibrului static conduce pentru fiecare dintre poziții la cîte o valoare P_{cr}. Dacă aceste valori se așază în ordine crescătoare, rezultă

$$P_{cr}^{(1)} < P_{cr}^{(2)} < P_{cr}^{(3)} < \dots,$$

pozițiile deplasate corespunzătoare purtînd numele de *forme proprii* de pierdere a stabilității. Dintre acestea, apare evident că pentru verificarea stabilității unei structuri interesează sarcina critică *minimă*, căreia îi corespunde prima formă proprie. Criteriul de verificare este deci

$$P < P_{cr} = (P_{cr})_{min} = P_{cr}^{(1)}. \tag{15.3}$$

Odată atins acest nivel de încărcare, capacitatea portantă a structurii este epuizată datorită deformabilității mari la care se ajunge prin trecerea inevitabilă în poziția deplasată corespunzătoare și nu mai prezintă interes practic faptul că, pentru un nivel superior de încărcare, ar corespunde altă formă proprie de pierdere a stabilității. În consecință, întreaga operație de verificare la stabilitate este axată pe *identificarea valorii minime a sarcinii critice*.

Numai dacă anumite situații locale, al căror efect ar fi echivalent cu introducerea unor legături în plus, împiedică sistemul să ia forma proprie ce corespunde sarcinii $P_{cr}^{(1)}$, atunci pierderea de stabilitate se produce pentru o încărcare superioară și anume pentru cea mai mică dintre valorile următoare P_{cr} la care trecerea în poziția deplasată corespunzătoare este liberă. Cunoașterea formelor proprii de pierdere a stabilității poate fi deci utilă pentru adoptarea de măsuri care să mărească în mod eficient rigiditatea structurii, sporindu-i capacitatea portantă.

Determinarea mărimii sarcinilor critice se obține pe baza criteriului de echilibru static ce trebuie să existe între forțele exterioare și forțele interioare ce se nasc datorită trecerii sistemului în poziția deplasată, situație care caracterizează echilibrul indiferent. Modul de aplicare a condiției depinde de alcătuirea sistemului, deoarece exprimarea echilibrului trebuie făcută pentru toate elementele (legăturile) elastice ale acestuia.

a. **Sisteme cu număr finit de grade de libertate.** Deși asemenea sisteme nu se întîlnesc frecvent, examinarea lor este interesantă deoarece clarifică modul de aplicare al criteriului. Sistemul este compus din porțiuni rigide legate prin elemente elastice și trecerea în poziția deplasată este posibilă numai datorită deformării acestor elemente. În consecință poziția deplasată este definită de un număr de parametri geometrici, care corespund elementelor elastice ale sistemului. Exprimînd echilibrul static pentru fiecare element (legătură) elastic, se obține un sistem de ecuații *omogene* în funcție de parametri, deoarece atît acțiunea forțelor exterioare asupra elementului, cît și reacțiunea reprezentată de forțele interioare, depind direct de mărimile parametrilor.

Soluția banală a sistemului omogen de ecuații — parametri nuli, nu este interesantă deoarece corespunde poziției inițiale a sistemului. Existența unei poziții deplasate de echilibru indiferent impune ca mărimile parametrilor să fie diferite de zero; aceasta este posibil numai dacă matricea coeficienților din sistemul de ecuații este *singulară*. Din condiția $D=0$, care conduce la *ecuația caracteristică*, se obțin valorile $P_{cr}^{(1)}$, $P_{cr}^{(2)}$, ... în număr egal cu al parametrilor. În continuare, pe baza rapoartelor de parametri, se poate identifica și configurația formelor proprii corespunzătoare.

Pentru exemplificare, în figura 233, *a* se reia cazul barei cu două grade de libertate din figura 232 *a*. Elementele elastice *1* și *2* au aceeași rigiditate la încovoiere m (moment încovoietor ce corespunde la o rotire relativă $\theta=1$). Sînt doi parametri distincți, reprezentați prin deplasările δ_1 și δ_2. Pentru o poziție deplasată arbitrară (fig. 233, *b*), perechea de sarcini axiale P este echilibrată de reacțiunile-moment $m\theta_1$ și $m\theta_2$ ce se dezvoltă în elementele elastice drept consecință a trecerii în poziția deplasată.

Pe baza dimensiunilor geometrice, rezultă următoarele înclinări ale celor trei porțiuni rigide

$$\alpha_1=\delta_1/l_1, \qquad \alpha_2=(\delta_2-\delta_1)/l_2, \qquad \alpha_3=-\delta_3/l_1,$$

unde pentru uniformitate s-a admis că rotirile α sînt pozitive în sens orar. Rotirile relative dintre fețele elementelor elastice sînt

$$\begin{aligned}\theta_1&=\alpha_1-\alpha_2=\delta_1\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}-\frac{\delta_2}{l_2}=\frac{1}{l_2}[\delta_1(1+\beta)-\delta_2],\\ \theta_2&=\alpha_2-\alpha_3=\delta_2\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}-\frac{\delta_1}{l_2}=\frac{1}{l_2}[-\delta_1+\delta_2(1+\beta)],\end{aligned} \tag{a}$$

unde s-a introdus raportul $\beta=l_2/l_1$.

Ecuațiile de echilibru static ce corespund în cele două elemente elastice sînt

$$P\delta_1=m\theta_1=\frac{m}{l^2}[\delta_1(1+\beta)-\delta_2] \quad \text{și} \quad P\delta_2=m\theta_2=\frac{m}{l^2}[-\delta_1+\delta_2(1+\beta)].$$

care se pot scrie în funcție de parametrii δ_1 și δ_2 sub forma

$$\delta_1\left|\frac{Pl_2}{m}-(1+\beta)\right|+\delta_2=0 \quad \text{și} \quad \delta_1+\delta_2\left|\frac{Pl_2}{m}-(1+\beta)\right|=0, \tag{b}$$

sau $\begin{vmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{vmatrix}=[0]$, cu notația $c=\dfrac{Pl_2}{m}-(1+\beta)$.

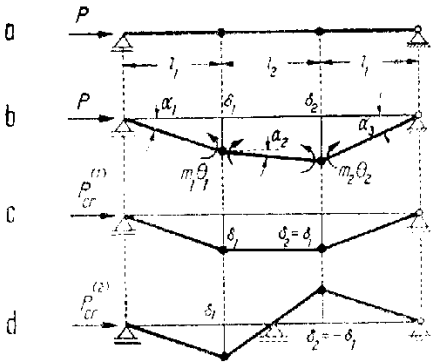


Fig. 233

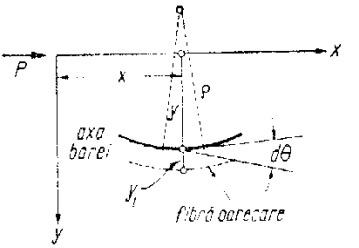


Fig. 234

Condiția de existență a unei deformate de echilibru critic impune ca parametrii δ_1 și δ_2 să fie diferiți de zero, deci ca determinantul matricei coeficienților să fie nul. Se obține $c^2-1=0$, cu soluțiile $c=\pm 1$, din care rezultă

$$c=\frac{Pl_2}{m}-(1+\beta)=-1, \quad \text{sau} \quad P_{cr}^{(1)}=\frac{m}{l_2}\beta=\frac{m}{l_1}=(P_{cr})_{min},$$
$$c=\frac{Pl_2}{m}-(1+\beta)=+1, \quad \text{sau} \quad P_{cr}^{(2)}=\frac{m}{l_2}(2+\beta)>P_{cr}^{(1)}. \tag{c}$$

astfel că s-au obținut mărimile celor două sarcini critice, dintre care prima este cea care interesează pentru verificarea stabilității barei.

Formele proprii corespunzătoare se pot găsi, formînd raportul parametrilor pentru fiecare dintre cele două sarcini critice (c), anume

$$P_{cr}^{(1)} \quad \delta_1/\delta_2=-c=+1, \qquad P_{cr}^{(2)} \quad \delta_1/\delta_2=-c=-1 \tag{d}$$

rezultînd formele proprii din figura 233, *c* și *d*, dintre care prima este simetrică și a doua antisimetrică. Forma proprie simetrică este cea după care se produce efectiv pierderea de stabilitate. Cea de a doua formă proprie ar trebui luată în considerare numai dacă în secțiunea de la mijlocul barei deplasarea laterală ar fi împiedicată (de exemplu prin adăugarea unui reazem simplu), astfel încît prima formă nu s-ar putea produce.

b. **Bare elastice.** În acest caz, numărul gradelor de libertate este infinit și parametrii geometrici care definesc poziția fiecăruia dintre elementele ds sînt reprezentați de succesiunea de ordonate y (fig. 234), ce satisfac condiția de compatibilitate a deformatei $y=f(x)$. Relația de echilibru static trebuie scrisă în *toate* secțiunile grinzii, egalînd acțiunea forțelor exterioare în secțiune cu reacțiunea rezultantă a forțelor interioare produse de trecerea în poziția deformată. Aceasta revine la a scrie condiția în secțiunea curentă.

Momentul încovoietor dat de forțele exterioare, raportate la poziția deformată, este M_x și acesta trebuie echilibrat de momentul forțelor interioare de pe secțiune, care are mărimea

$$\int_A \sigma \mathrm{d}A y_1 = E\omega \int_A y_1^2 \mathrm{d}A = EI\omega, \text{ deoarece } \sigma = E\varepsilon = E\omega y_1,$$

unde ω reprezintă încovoierea specifică în secțiunea curentă, y_1 este înălțimea unei fibre oarecare față de axa neutră, iar I este momentul de inerție al secțiunii barei.

Pentru axele din figură și sensul de încovoiere considerat, $M_x \gtrless 0$ și $\omega = \mathrm{d}\theta / \mathrm{d}s = 1/\rho \lessgtr 0$, astfel că ecuația de echilibru se scrie

$$M_x = -EI\omega \qquad \text{și deci} \qquad \frac{1}{\rho} = -\frac{M_x}{EI}.$$

Expresia exactă a curburii este

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} \left| 1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2 \right|^{-\frac{3}{2}},$$

dar pentru poziții deformate apropiate de poziția inițială, așa cum se consideră simplificat în calculele de stabilitate, cel de al doilea termen din paranteză devine neglijabil față de 1 și deci se poate scrie

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = y'' = -\frac{M_x}{EI}, \tag{15.4}$$

regăsind ecuația fibrei medii deformate. Înseamnă că această ecuație reprezintă forma de exprimare a criteriului echilibrului static pentru studiul stabilității barelor elastice, cu mențiunea că M_x este evaluat raportînd forțele exterioare la poziția deformată.

Ecuația diferențială se integrează, obținînd expresia $y = f(x)$ și se pun condițiile de margine în funcție de legăturile existente la capetele barei. Se obține astfel un grup de relații liniare și omogene în raport cu constantele de integrare și cele ale rezemărilor. Condiția ca acestea să fie diferite de zero, deci să existe o deformată critică, impune ca matricea coeficienților să fie singulară. Dezvoltînd determinantul matricei și egalînd cu zero, se obține și în acest caz o ecuație caracteristică, ce dă o succesiune de valori pentru sarcina critică, dintre care trebuie reținută cea mai mică pentru verificarea de stabilitate.

2. Stabilitatea barelor drepte

Se consideră cazul general al unei bare drepte puternic comprimate, cu legături elastice la extremități (fig. 235, *a*), caracterizate prin constantele c, m_1 și m_2; aceste constante reprezintă mărimile reacțiunilor ce se dezvoltă în legăturile respective, cînd pe direcțiile acestora se produc deplasările $\delta = 1$, $\theta_1 = 1$ sau $\theta_2 = 1$. Cînd bara trece într-o poziție deformată, caracterizată de deplasări pozitive pe direcțiile legăturilor elastice, se ajunge la situația din figura 235, *b*, căreia îi corespunde ansamblul de forțe exterioare în echilibru din figura 235, *c*.

Momentul încovoietor în secțiunea curentă are expresia

$$M_x = Py - c\delta x - m_1\theta_1,$$

astfel încît ecuația de echilibru static din elementul curent ds, dată de relația (15.4), are forma

$$y'' = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y + \frac{c\delta x + m_1\theta_1}{EI},$$

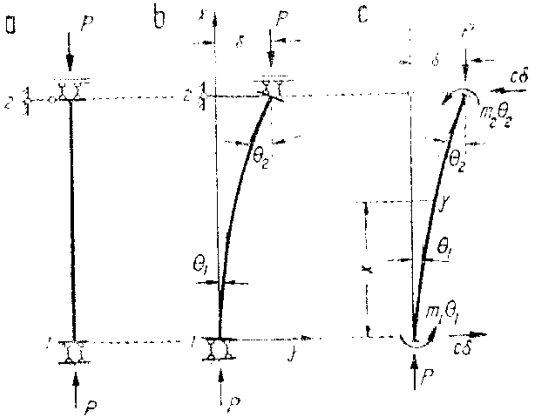


Fig. 235

care se mai poate scrie

$$y'' + k^2 y = (c\delta x + m_1\theta_1)/EI, \quad \text{unde } k^2 = \frac{P}{EI} \tag{15.5}$$

caracterizează bara puternic comprimată. Integrînd ecuația diferențială, se obține expresia

$$y = A\cos kx + B\sin kx + (c\delta x + m_1\theta_1)/P, \tag{15.6}$$

ale cărei derivate succesive sînt

$$y' = -Ak\sin kx + Bk\cos kx + c\delta/P,$$

$$y'' = -Ak^2\cos kx - Bk^2\sin kx,$$

cu ajutorul cărora se poate controla că soluția (15.6) satisface ecuația (15.5).

Se impun acum condițiile din extremitățile barei și anume:

— pentru extremitatea *1* ($x=0$)

$$y = 0 \qquad A + m_1\theta_1/P = 0,$$

$$y' = \theta_1 \qquad Bk + c\delta/P = \theta_1;$$

— pentru extremitatea 2 ($x=l$)

$$y=\delta \qquad A\cos kl + B\sin kl + (c\delta + m_1\theta_1)/P = \delta,$$

$$y'=\theta_2 \qquad -Ak\sin kl + Bk\cos kl + c\delta/P = \theta_2.$$

La aceste patru relații mai trebuie adăugată condiția de echilibru a ansamblului barei sub acțiunea forțelor exterioare din figura 235, *c*, care este

$$P\delta - cl\delta - m_1\theta_1 - m_2\theta_2 = 0,$$

astfel că se dispune de un grup de cinci relații *omogene* în funcție de cele cinci cantități arbitrare A, B, δ, θ_1 și θ_2 ce caracterizează deformata critică a barei în cazul general.

În exprimare matriceală, relațiile se pot scrie

$$\mathbf{CY} = 0, \qquad \text{unde } \mathbf{Y} = \{A,\ B,\ \delta,\ \theta_1,\ \theta_2\}$$

este matricea-coloană a cantităților inițial nedeterminate, iar $\mathbf{C}$ este o matrice pătrată de dimensiuni (5.5) care conține coeficienții acestor cantități cuprinși în cele cinci relații. Condiția de existență a unei deformate critice impune ca matricea-coloană $\mathbf{Y}$ să nu fie nulă; rezultă astfel în mod necesar că matricea $\mathbf{C}$ trebuie să fie *singulară* și deci determinantul său să se anuleze, condiție care conduce la formarea ecuației caracteristice.

Pentru aceasta, unele relații mai simple pot fi folosite la eliminarea unora dintre variabile din restul relațiilor. Astfel, din primele două relații se obține

$$A = -\frac{m_1\theta_1}{P} \qquad \text{și} \qquad B = \frac{1}{k}\left(\theta_1 - \frac{c\delta}{P}\right), \tag{15.7}$$

iar din ultima rezultă

$$\theta_2 = (P\delta - m_1\theta_1 - cl\delta)/m_2,$$

care introduse în relațiile corespunzătoare extremității 2 conduc la sistemul

$$\begin{vmatrix} \frac{c}{P}\left(1-\frac{\sin kl}{k}\right)-1 & \frac{m_1}{P}(1-\cos kl)+\frac{\sin kl}{k} \\ \frac{c}{P}(1-\cos kl) & \frac{m_1}{m_2}+\frac{m_1}{P}k\sin kl+\cos kl-\frac{P-cl}{m_2} \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \delta \\ \theta_1 \end{Vmatrix} = \|0\|. \tag{15.8}$$

Dezvoltînd determinantul matricei coeficienților și ordonînd în raport cu $\sin kl$ și $\cos kl$, se ajunge la ecuația caracteristică

$$k\cos kl\left[(P-cl)(m_1+m_2)-\frac{2}{P}cm_1m_2\right]+\sin kl\left[c(m_1+m_2)+\right.$$

$$\left.+(P-cl)\left(\frac{k^2}{P}m_1m_2-P\right)\right]-\frac{2k}{P}cm_1m_2=0, \tag{15.9}$$

unde pentru P trebuie introdusă valoarea k^2EI dată de relația (15.5).

Această ecuație corespunde unui caz cu totul general, urmînd ca pentru cazuri concrete să se particularizeze prin precizarea constantelor c, m_1 și m_2 în raport cu legăturile efective din extremitățile barei considerate. Referitor la aceasta trebuie observat că, dacă o anumită legătură este rigidă și nu elastică așa cum s-a admis în figura 235, constanta respectivă devine infinită și deplasarea corespunzătoare este nulă. Într-un asemenea caz, forța de legătură de forma $c\delta$ sau $m\theta$ este cantitatea nedeterminată ce trebuie introdusă în matricea **Y**, în locul deplasării. Aceasta revine la a împărți toți termenii ecuației (15.9) cu constanta c sau m corespunzătoare, înainte de a introduce pentru această constantă valoarea infinită.

În ecuația caracteristică particularizată se va pune în evidență drept necunoscută cantitatea

$$\nu = kl = l\sqrt{\frac{P}{EI}}, \tag{15.10}$$

care reprezintă *factorul de compresiune* al barei și se va face rezolvarea ecuației direct — sau prin încercări — după caz, urmînd să se determine valoarea ν_{min}. Odată aceasta cunoscută, sarcina critică rezultă din relația (15.10) sub forma

$$P_{cr} = (kl)^2 EI/l^2 = \nu^2 EI/l^2. \tag{15.11}$$

În alternativă, se poate exprima sarcina critică și sub forma Euler, anume

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2}, \text{ unde } l_f = \frac{\pi}{\nu} l \tag{15.12}$$

este lungimea de flambaj, anume distanța dintre două puncte de inflexiune consecutive ale deformatei critice. Pentru proiectare această formă este de obicei preferată, deoarece intervine direct la dimensionare.

În aplicațiile practice intervin anumite cazuri uzuale de bare drepte, cu condiții tip de rezemare la extremități. În tabela 9 sînt date cinci asemenea cazuri, indicîndu-se elementele de particularizare, forma ecuației caracteristice precum și valoarea ν_{min} corespunzătoare, de asemenea sarcina critică și lungimea de flambaj. Cazurile din tabelă sînt deosebit de utile și pentru aprecierea altor situații intermediare, mai complicate, fie la stabilirea aproximativă a sarcinii critice, fie ca orientare pentru alegerea valorilor ν la rezolvarea prin încercări a ecuației caracteristice.

Din relațiile (15.3) și (15.11) se vede că pentru verificarea de stabilitate interesează numai valoarea ν_{min}, din care rezultă $P_{cr}^{(1)}$. Desigur, este posibil să se stabilească și mărimile sarcinilor $P_{cr}^{(2)}$, $P_{cr}^{(3)}$, ..., de asemenea să se determine configurațiile corespunzătoare ale deformatei de pierdere a stabilității.

Pentru exemplificare, fie bara încastrată la o extremitate și liberă la cealaltă, încărcată cu sarcina axială P (cazul *1* din tabela 9). Ecuația caracteristică este

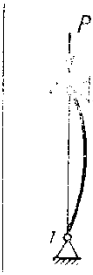
$$\cos \nu = 0, \quad \text{deci} \quad \nu = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad P_{cr} = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2},$$

unde n poate lua valorile 0, 1, 2, ..., cărora le corespunde succesiunea de mărimi a sarcinii critice

$$P_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \qquad P_{cr}^{(2)} = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}, \qquad P_{cr}^{(3)} = \frac{25\pi^2 EI}{4l^2}, \ldots \tag{a}$$

Tabela 9

Cazuri tip de bare puternic comprimate

Tipul de bară					
Condiții de rezemare	$c=\infty$ $m_1=m_2=0$	$c=m_1=\infty$ $m_2=0$	$c=m_1=m_2=\infty$	$m_1=\infty$ $c=m_2=0$	$m_1=m_2=\infty$ $c=0$
Ecuație caracteristică	$\sin \nu=0$	$\operatorname{tg} \nu=\nu$	$2(1-\cos \nu)=\nu \sin \nu$	$\cos \nu=0$	$\sin \nu=0$
ν_{min}	π	4,493	2π	$\frac{\pi}{2}$	π
Sarcină critică	$P_{cr}=\pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$P_{cr}=4,493^2 \frac{EI}{l^2}$	$P_{cr}=4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$P_{cr}=\frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}$	$P_{cr}=\pi^2 \frac{EI}{l^2}$
Lungime de flambaj	$l_f=l$	$l_f=0,7\ l$	$l_f=0,5\ l$	$l_f=2\ l$	$l_f=l$

Formele proprii corespunzătoare se obțin pornind de la expresia generală (15.6)

$$y=A \cos kx+B \sin kx+(c\delta x+m_1\theta_1)/P,$$

unde constantele A și B au forma (15.7). Pentru cazul considerat, cantitatea $m_1\theta_1$ reprezintă reacțiunea din încastrarea 1 și are mărimea $m_1\theta_1=P\delta$; în același timp $\theta_1=0$ și $c=m_2=0$. Mărimile constantelor devin $A=-\delta$ și $B=0$, astfel că ecuația deformatei critice are forma

$$y=\delta(1-\cos kx), \text{ unde } k=(2n+1)\pi/2l$$

și deci

$$y=\delta\left|1-\cos(2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right|. \tag{b}$$

Dînd diferite valori lui n, se obțin formele proprii corespunzătoare; astfel:

Pentru $P_{cr}^{(1)}$ corespunde $n=0$ și $y=\delta\left(1-\cos\frac{\pi}{2l}x\right)$

$y=0$ cînd $\cos\frac{\pi}{2l}x=1$, sau $x=4\ h\leqslant l$, deci $x=0$,

$y=\delta$ cînd $\cos\frac{\pi}{2l}x=0$, sau $x=(2\ h+1)l\leqslant l$, deci $x=l$;

Pentru $P_{cr}^{(2)}$ corespunde $n=1$ și $y=\delta\left(1-\cos\frac{3\pi}{2l}x\right)$

$y=0$ cînd $\cos\frac{3\pi}{2l}x=1$, sau $x=\frac{4h}{3}l\leqslant l$, deci $x=0$,

$y=\delta$ cînd $\cos\frac{3\pi}{2l}x=0$, sau $x=\frac{2k+1}{3}l\leq l$, deci $x=\frac{l}{3}$ și $x=l$;

— Pentru $P_{cr}^{(3)}$ corespunde $n=2$ și $y=\delta\left(1-\cos\frac{5\pi}{2l}x\right)$

$y=0$ cînd $\cos\frac{5\pi}{2l}x=1$, sau $x=\frac{1\,k}{5}l\leq l$, deci $x=0$ și $x=\frac{4\,l}{5}$,

$y=\delta$ cînd $\cos\frac{5\pi}{2l}x=0$, sau $x=\frac{2k+1}{5}l\leq l$,

condiție satisfăcută pentru $x=l/5$, $x=3\,l/5$ și $x=l$. Pentru $x=2\,l/5$ se obține $y=2\,\delta$.

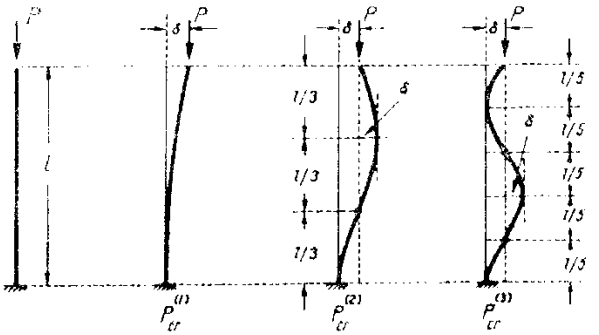


Fig. 236

Cu aceste valori s-au construit formele proprii din figura 236. Dacă se consideră lungimile de flambaj cuprinse între două puncte succesive de inflexiune, rezultă

$$P_{cr}^{(1)}\quad l_f=2\,l,\quad P_{cr}^{(2)}\quad l_f=\frac{2\,l}{3},\ P_{cr}^{(3)}\quad l_f=\frac{2\,l}{5},\ \ldots,$$

așa cum se poate obține și din relația (15.12) introducînd $\nu=(2\,n+1)\,\pi/2$.

Asemănător se pot studia și celelalte cazuri din tabela 9.

Observație. Formele proprii obținute în figura 236 sînt toate date în funcție de deplasarea δ a extremității libere, care rămîne astfel nedeterminată. Explicația este similară celei date în legătură cu figura 231, *d*, anume că la exprimarea echilibrului static din elementul curent al barei s-a admis că deformata critică se menține în domeniul micilor deplasări și în consecință la stabilirea relației (15.4) s-a neglijat în expresia curburii $(y')^2$ în raport cu 1. Dacă în calcul se introduce expresia completă a curburii, considerînd deformata caracterizată prin deplasări *finite*, se găsește că mărimile δ și θ_2 depind de valoarea P_{cr}.

Pentru cazul barei din figura 237, *a*, un studiu amănunțit în acest sens a fost făcut de Timoshenko, care a sintetizat rezultatele obținute în tabloul din figură, pentru diferite valori ale lui θ_2. Mărimea P'_{cr} reprezintă sarcina critică determinată considerînd deplasări finite, iar P_{cr} este sarcina critică ce corespunde cazului *4* din tabela 9. Se constată că pe măsură ce P'_{cr} crește deformata se îndepărtează de poziția inițială, ca în figura 237, *b*, ceea ce înseamnă că această deformată corespunde unei situații de echilibru *stabil*. Totodată, este pusă sugestiv în evidență accentuarea puternică a deformării barei pentru creșteri reduse ale mărimii sarcinii critice.

Rămîn de făcut unele observaţii importante.

(1) Studiul efectuat se referă în întregime la stabilitatea barelor în *domeniul elastic*, deci numai la structuri cu bare puternic comprimate *zvelte*. Devine astfel necesar să se precizeze condiţia pe care aceste bare trebuie să o îndeplinească, spre a li se putea aplica datele din tabela 9 pentru verificarea la stabilitate.

θ_2	20°	40°	60°	80°
P_{cr}/P_{cr}	1,015	1,063	1,152	1,293
x_2/l	0,970	0,881	0,741	0,560
y_2/l	0,220	0,422	0,593	0,719

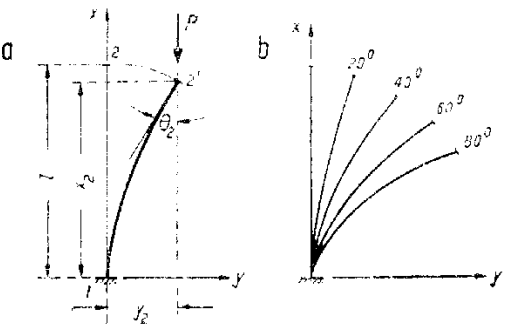


Fig. 237

Bara se găseşte în domeniul elastic cît timp $\sigma_{cr} \leqslant \sigma_p$, unde σ_p reprezintă limita de proporţionalitate a materialului (astfel, pentru oţelul obişnuit de construcţii OL37 se prescrie $\sigma_p = 1900$ daN/cm^2). Ţinînd seama de relaţia (15.12), se obţine

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \quad \text{şi deci} \quad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2 A} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l_f}\right)^2,$$

unde s-a notat cu $i^2 = I/A$ raza de inerţie a secţiunii barei. Rezultă condiţia

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_p \text{ şi deci } \lambda \geqslant \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}, \tag{15.13}$$

în care s-a introdus *coeficientul de zvelteţe* al barei $\lambda = l_f / i$. Această condiţie permite să se controleze dacă pierderea de stabilitate a barei se produce în domeniul elastic (de exemplu, pentru bare confecţionate din OL37 rezultă $\lambda \geqslant 105$).

De reţinut că acest capitol se referă în întregime la stabilitatea structurilor *în domeniul elastic*.

(2) Ecuaţia caracteristică (15.9), stabilită pentru bare puternic comprimate cu legături elastice la extremităţi, permite să se studieze şi stabilitatea unor structuri în a căror alcătuire intră o singură bară puternic comprimată. Aceasta revine la a determina în prealabil constantele corespunzătoare capătului barei legat de restul structurii, impunînd acolo deplasări egale cu unitatea pe direcţia legăturilor şi calculînd reacţiunile corespunzătoare.

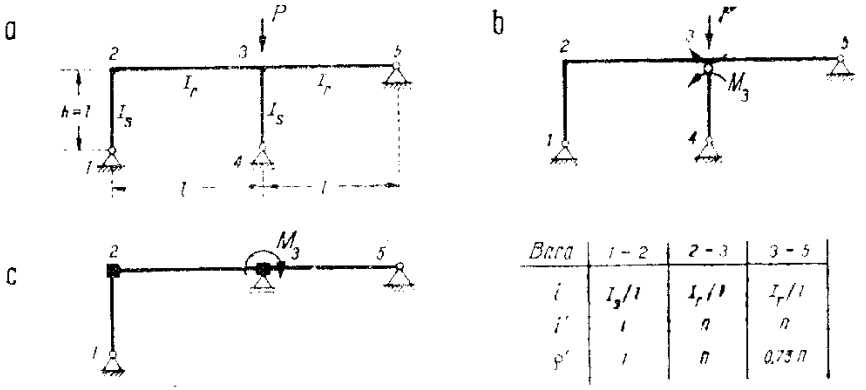
Pentru exemplificare, fie cadrul din figura 238, *a* acţionat de sarcina axială P. În extremitatea *3* a barei *3-4* trebuie determinate constantele c şi m_3; deoarece cadrul are noduri fixe, $c \to \infty$ şi deci rămîne de determinat numai m_3. Pentru aceasta se pune în evidenţă forţa de

legătură M_3 (fig. 238, *b*) și se consideră porțiunea de structură *1-2-3-5* ca simplu rezemată în *3* și încărcată cu M_3 (fig. 238, *c*), urmînd să se determine rotirea θ_3.

S-a ajuns astfel la o problemă cunoscută de statică liniară, ce se poate rezolva prin metoda deplasărilor, considerînd ca necunoscute rotirile nodurilor *2* și *3*. Pe baza tabelei de rigidități a barelor, unde s-a notat $n=I_r/I_s$ și ținînd seamă de relațiile (12.33), se formează sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}(1+n)\theta_2'+0{,}5\,n\theta_3' &= 0,\\ 0{,}5\,\theta_2'+1{,}75n\theta_3' - M_3' &= 0.\end{aligned} \quad \text{de unde} \quad \theta_2' = -\frac{0{,}5}{1+n}\theta_3',$$

și deci $$M_3' = n\,\frac{1{,}75+1{,}5\,n}{1+n}\,\theta_3' = n\,\frac{1{,}75+1{,}5\,n}{1+n}\cdot\frac{4EI_s}{l}\theta_3.$$



Bara	1 - 2	2 - 3	3 - 5
i	I_s/l	I_r/l	I_r/l
i'	1	n	n
φ'	1	n	$0{,}75\,n$

Fig. 238

Ținînd seamă că pentru $\theta_3'=1$ momentul M_3 reprezintă chiar constanta m_3 căutată, se obține

$$m_3=(7+6\,n)\,\frac{n}{1+n}\,\frac{EI_s}{l}=\alpha\,\frac{EI_s}{l}, \quad \text{unde} \quad \alpha=(7+6\,n)\,\frac{n}{1+n}$$

poate avea diferite valori în funcție de raportul n.

Se poate trece la aplicarea ecuației caracteristice (15.9), în care $c=\infty$, $m_3=0$, și $m_3\neq 0$; se găsește

$$-kl\,\cos kl\cdot m_3+\sin kl\,(m_3+Pl)=0,$$

de unde $$\operatorname{tg}\nu=\nu\,\frac{m_3}{m_3+Pl}=\nu\,\frac{\alpha}{\alpha+\nu^2}, \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg}\nu\,(\alpha+\nu^2)-\alpha\nu=0,$$

unde s-a ținut seama că $P=k^2EI_s$, $m_3=\alpha EI_s/l$ și $kl=\nu$.

Admițînd de exemplu $n=1$, rezultă $\alpha=6{,}5$ și ecuația caracteristică devine

$$\operatorname{tg}\nu(6{,}5+\nu^2)-6{,}5\nu=0,$$

care prin încercări dă soluția $\nu=1{,}00$, astfel că sarcina critică a structurii este $P_{cr}=16\,EI_s/l^2$, respectiv lungimea de flambaj a barei *3-4* este $0{,}785\,l$.

3. Calculul de ordinul II al grinzii simplu rezemate

Se consideră un caz uzual de încărcare cu sarcini transversale a grinzii puternic comprimate, anume o sarcină uniform distribuită (cazul *1* din tabela

10). Momentul încovoietor în secțiunea curentă, scris în raport cu poziția deformată a grinzii, este

$$M_x = M_x^0 + M_x^* = px(l-x)/2 + Py.$$

astfel că ecuația de echilibru static (15.4) din elementul curent al grinzii este

$$y'' = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{p}{2EI}x(l-x) - \frac{P}{EI}y$$

și deci se ajunge la ecuația diferențială

$$y'' + k^2 y = -px(l-x)/2EI, \tag{15.14}$$

unde s-a introdus notația $k^2 = P/EI$ dată de relația (15.5).

Integrarea ecuației diferențiale conduce la expresia

$$y = A\cos kx + B\sin kx - \frac{p}{P}\left[\frac{1}{2}x(l-x) + \frac{1}{k^2}\right], \tag{15.15}$$

care prin derivare succesivă dă

$$y' = -Ak\sin kx + Bk\cos kx - \frac{p}{P}\cdot\frac{1}{2}(l-2x),$$

$$y'' = -Ak^2\cos kx - Bk^2\sin kx + \frac{p}{P},$$

expresii cu care se poate controla satisfacerea ecuației (15.14) de către soluția (15.15).

Din condițiile de extremitate, impuse la cele două capete ale barei, se obține

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \text{deci} \qquad A - p/Pk^2 = 0,$$

$$x = l, \qquad y = 0, \qquad \text{deci} \qquad A\cos kl + B\sin kl - p/Pk^2 = 0,$$

astfel că rezultă două ecuații cu necunoscutele A și B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p/Pk^2 \\ p/Pk^2 \end{bmatrix} = [0], \quad \text{unde} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix} \neq 0 \tag{15.16}$$

reprezintă condiția de *unicitate* a soluțiilor

$$A = \frac{p}{Pk^2} \quad \text{și} \quad B = \frac{p}{Pk^2}\cdot\frac{1-\cos kl}{\sin kl} = \frac{p}{Pk^2}\operatorname{tg}\frac{kl}{2}.$$

Introducînd notațiile

$$kl = \nu, \qquad kx = \xi\nu, \qquad kl/2 = \nu/2 = u, \qquad P = k^2 EI, \tag{15.17}$$

se obține ecuația deformatei grinzii, precum și derivatele sale

$$y=\frac{pl^4}{EI}\cdot\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{1}{\nu^2}(\cos\xi\nu+\operatorname{tg}u\cdot\sin\xi\nu-1)-\frac{1}{2}\xi(1-\xi)\right],$$

$$y'=-\frac{pl^3}{EI}\cdot\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{1}{\nu}(\sin\xi\nu-\operatorname{tg}u\cdot\cos\xi\nu)+\frac{1}{2}(1-2\xi)\right], \qquad (15.18)$$

$$y''=-\frac{pl^2}{EI}\cdot\frac{1}{\nu^2}(\cos\xi\nu+\operatorname{tg}u\cdot\sin\xi\nu-1),$$

ultima relație servind la determinarea diagramei de momente încovoietoare a grinzii, sub forma

$$M_x=-EIy''=\frac{pl^2}{\nu^2}(\cos\xi\nu+\operatorname{tg}u\cdot\sin\xi\nu-1), \qquad (15.19)$$

care reprezintă expresia momentului încovoietor total $M_x=M_x^0+M_x^*$ în calculul de ordinul II.

Pe baza expresiilor (15.18) și (15.19), se obține pentru secțiunea de la mijlocul grinzii ($\xi=1/2$):

$$M_{max}=\frac{pl^2}{\nu^2}(\cos u+\operatorname{tg}u\cdot\sin u-1)=\frac{pl^2}{\nu^2}\left(\frac{1}{\cos u}-1\right),$$

sau

$$M_{max}=\frac{pl^2}{8}\cdot\frac{8}{\nu^2}\left(\frac{1}{\cos u}-1\right)=M_{max}^0\cdot\frac{2}{u^2}\left(\frac{1}{\cos u}-1\right), \qquad (15.20)$$

$$y_{max}=\frac{pl^4}{EI}\cdot\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{1}{\nu^2\cos u}-\frac{1}{8}-\frac{1}{\nu^2}\right]=\frac{pl^4}{EI}\cdot\frac{1}{\nu^4}\left[\frac{1}{\cos u}-\frac{u^2}{2}-1\right],$$

sau

$$y_{max}=-\frac{5\,pl^4}{384\,EI}\cdot\frac{24}{5\,u^4}\left(\frac{1}{\cos u}-\frac{u^2}{2}-1\right)=y_{max}^0\cdot\frac{24}{5u^4}\left(\frac{1}{\cos u}-\frac{u^2}{2}-1\right), \qquad (15.21)$$

unde M_{max} și y_{max} din calculul de ordinul II apar exprimate în funcție de M_{max}^0 și y_{max}^0 din calculul de ordinul I, prin multiplicare cu anumiți coeficienți de corecție, care depind de factorul de compresiune al grinzii.

Pentru aprecierea mărimii acestor corecții, fie cazul particular:

$$P=P_{cr}/3, \quad \text{unde} \quad P_{cr}=\pi^2EI/l^2, \quad \text{deci} \quad k^2=P/EI=\pi^2/3l^2,$$

$$\nu^2=(kl)^2=\pi^2/3=3{,}29, \quad \nu=1{,}815 \quad \text{și} \quad u=0{,}908.$$

Cu aceste valori se obține pentru relațiile (15.20) și (15.21)

$$u^2=0{,}824, \quad u^4=0{,}679, \quad \cos u=0{,}615, \quad \operatorname{tg}u=1{,}281$$

$$M_{max}=1{,}52\,M_{max}^0 \quad \text{și} \quad y_{max}=1{,}52\,y_{max}^0,$$

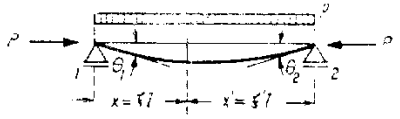
deci în acest caz efectele cresc cu circa 50%. Apare astfel limpede importanța unui calcul de ordinul II la bare puternic comprimate.

În mod asemănător pot fi studiate și alte cazuri de încărcare pe grinda simplu rezemată puternic comprimată. În tabela 10 sînt date și rezultatele corespunzătoare încărcării cu o sarcină concentrată transversală P_j.

Cazuri tip de încărcare cu sarcini

Tabela 10

Cazul 1



$$y = \frac{pl^4}{EI} \cdot \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{1}{\nu^2}(\cos\ \xi\nu + \operatorname{tg} u \sin\ \xi\nu - 1) - \frac{1}{2}\xi(1-\xi)\right]$$

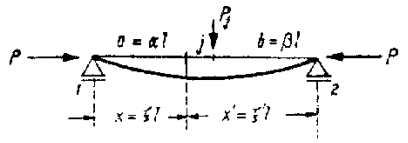
$$y_{max} = \frac{5\,pl^4}{384\,EI} \cdot \frac{24}{5u^4}\left(\frac{1}{\cos u} - \frac{u^2}{2} - 1\right)$$

$$M_x = \frac{pl^2}{\nu^2}(\cos\ \xi\nu + \operatorname{tg} u \sin\ \xi\nu - 1)$$

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2}\left(\frac{1}{\cos u} - 1\right)$$

$$m_1 = m_2 = \frac{pl^2}{4} \cdot \frac{3}{u^3}(\operatorname{tg} u - u)$$

Cazul 2



$$(1-j)\quad y = \frac{P_j l^3}{EI} \cdot \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\sin\beta\nu}{\nu\sin\nu}\sin\ \xi\nu - \beta\xi\right]$$

$$(j-2)\quad y = \frac{P_j l^3}{EI} \cdot \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\sin\alpha\nu}{\nu\sin\nu}\sin\ \xi'\nu - \alpha\xi'\right]$$

$$y_j = \frac{P_j l^3}{EI} \cdot \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\sin\alpha\nu \cdot \sin\beta\nu}{\nu\sin\nu} - \alpha\beta\right]$$

$$(a=b)\quad y_{max} = \frac{P_j l^3}{48\,EI} \cdot \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3}$$

$$(1-j)\quad M_x = P_j l \frac{\sin\beta\nu}{\nu\sin\nu}\sin\ \xi\nu, \qquad M_j = P_j l \frac{\sin\alpha\nu \cdot \sin\beta\nu}{\nu\sin\nu}$$

$$(a=b)\quad M_{max} = \frac{P_j l}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} u}{u}$$

$$m_1 = P_j l \cdot \frac{6}{\nu^2}\left[\frac{\sin\beta\nu}{\sin\nu} - \beta\right], \qquad m_2 = P_j l \cdot \frac{6}{\nu^2}\left[\frac{\sin\alpha\nu}{\sin\nu} - \alpha\right]$$

Notaţii: $k = \sqrt[4]{P/EI}$, $\nu = kl$, $u = kl/2 = \nu/2$

Rămîn de făcut unele observații importante.

(1) Din relațiile de forma (15.18) — (15.21) se vede că eforturile și deplasările sînt date de *relații liniare în funcție de sarcinile transversale și neliniare în funcție de* $\nu=kl$, deci de sarcina axială P. Înseamnă că pentru $P=const.$, expresiile sînt liniare în raport cu sarcinile transversale și deci — în aceste condiții — *este aplicabilă suprapunerea de efecte*. Această constatare are caracter general.

(2) Cînd grinda ar fi supusă numai la sarcina axială P, ecuația de stabilitate se obține din relația (15.14) eliminînd membrul din dreapta, deoarece lipsesc sarcinile transversale; rezultă

$$y''+k^2y=0, \quad \text{cu soluția} \quad y=A\cos kx+B\sin kx.$$

Condițiile de extremitate puse la cele două capete ale grinzii, anume $y=0$ pentru $x=0$ și $x=l$, conduc la sistemul *omogen* de ecuații

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=[0], \quad \text{unde} \quad D=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix}=0$$

reprezintă condiția de existență a deformatei critice, care conduce la ecuația caracteristică

$$\sin kl=\sin\nu=0, \quad \text{deci} \quad \nu_{min}=\pi \quad \text{și} \quad P_{cr}^{(1)}=\pi^2EI/l^2,$$

regăsind cazul barei dublu articulate.

Comparînd cu situația corespunzătoare calculului de ordinul II, reprezentată prin sistemul de ecuații (15.16), se vede că atunci cînd sarcina axială P atinge valoarea $P_{cr}^{(1)}$, matricea coeficienților devine singulară și nu mai pot fi găsite soluții finite pentru constantele A și B. Înseamnă că y_{max} și M_{max} tind spre infinit, ajungîndu-se la pierderea stabilității echilibrului. Deci *sarcina critică este aceeași*, indiferent dacă există sau nu sarcini transversale aplicate pe bară, așa cum s-a arătat în legătură cu figura 230, *b*. Și această constatare are caracter general.

(3) Cunoașterea *caracteristicilor de încărcare*, ce corespund sarcinilor uzuale aplicate pe grinda simplu rezemată, este deosebit de utilă la calculul deplasărilor și la rezolvarea structurilor static nedeterminate, cum s-a văzut în capitolele precedente. O definire a caracteristicilor de încărcare, similară cu cea utilizată în calculul de ordinul I, poate fi făcută și pentru calculul de ordinul II scriind rotirile de la extremitățile grinzii simplu rezemate, încărcată cu sarcini transversale oarecare, sub forma

$$6EI\,\theta_1=lm_1 \quad \text{și} \quad 6EI\,\theta_2=lm_2,$$

care rezultă în statica liniară pentru grinda de secțiune constantă, utilizînd datele din tabela 3. Se pot deci calcula caracteristicile de încărcare m_1 și m_2 dacă se cunosc rotirile θ_1 și θ_2. Pentru cazul sarcinii uniform distribuite, din a doua relație (15.18) rezultă

$$x=0 \quad y'=\theta_1=\frac{pl}{P\nu}\operatorname{tg}u-\frac{pl}{2P}=\frac{pl}{k^2EI}\left(\frac{\operatorname{tg}u}{\nu}-\frac{1}{2}\right)=\frac{pl^3}{EI\nu^3}(\operatorname{tg}u-u),$$

$$x=l \quad y'=-\theta_2=\frac{pl}{P\nu}(-\sin\nu+\operatorname{tg}u\cos\nu)+\frac{pl}{2P}=-\theta_1$$

și deci $$m_1=m_2=\frac{6EI}{l}\,\theta_1=\frac{6pl^2}{\nu^3}\,(\operatorname{tg}u-u),$$

sau $$m_1=m_2=\frac{pl^2}{4}\cdot\frac{24}{\nu^3}\,(\operatorname{tg}u-u)=m_1^0\cdot\frac{3}{u^3}\,(\operatorname{tg}u-u),$$

unde caracteristicile de încărcare pentru calculul de ordinul II apar exprimate în funcție de m_1^0 din statica liniară, prin multiplicarea cu un coeficient de corecție ce depinde de ν.

În tabela 10 sînt date caracteristicile de încărcare și pentru cazul unei sarcini concentrate P_j aplicată într-o secțiune oarecare; pentru mai multe sarcini concentrate aplicate concomitent, se folosește suprapunerea de efecte.

C. CONDIȚIA GENERALĂ A ECHILIBRULUI ÎN POZIȚIA DEFORMATĂ

1. Aplicarea principiului deplasărilor virtuale

Abordarea sub formă generală a calculului de ordinul II și a verificării de stabilitate în domeniul elastic, implică reluarea examinării făcute în legătură cu figura 110, cu deosebirea că de data aceasta se consideră structuri cu bare puternic comprimate, raportînd condiția de echilibru static la poziția deformată. În consecință, cele discutate privind aplicarea principiului deplasărilor virtuale la corpuri deformabile rămîn în întregime valabile, cu condiția ca deplasarea virtuală să fie dată *de la poziția deformată de echilibru*.

Datorită prezenței sarcinilor axiale P, este necesar să se țină seama și de deformarea axială Δ produsă de încovoierea barei (fig. 239, *a*). Pentru o anumită poziție deformată $y=f(x)$, drept configurație de deplasare virtuală poate fi aleasă o deformare *suplimentară* dy arbitrară, care trebuie să îndeplinească singura condiție de a fi compatibilă. Variația corespunzătoare a deformării axiale Δ se obține ținînd seama că

$$\Delta=\int_0^l(ds-dx)=\int_0^l(\sqrt{dx^2+dy^2}-dx)=\int_0^l dx\left[\sqrt{1+(y')^2}-1\right],$$

dar $$\sqrt{1+(y')^2}=1+\frac{1}{2}(y')^2-\ldots,\quad\text{deci}\quad\Delta=\frac{1}{2}\int_0^l(y')^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l\theta^2dx,$$

unde s-a notat $dy/dx=y'=\theta$ înclinarea tangentei la deformată în secțiunea curentă. Pentru variația dy corespunde variația $d\theta$, deci

$$d\Delta=\frac{1}{2}\int_0^l(\theta+d\theta)^2\,dx-\frac{1}{2}\int_0^l\theta^2dx=\int_0^l\theta\,d\theta dx. \tag{15.22}$$

Faptul că deplasarea virtuală este independentă de situația reală de echilibru a structurii, poate fi concretizat admițîndu-i drept configurație deformata corespunzătoare unei alte situații de încărcare.

Se ajunge astfel la considerarea în paralel a două situații diferite de încărcare a structurii (fig. 239, *b*), așa cum s-a procedat și în figura 110, dintre care prima este cea reală, iar a doua — o situație auxiliară arbitrar aleasă. În aceste condiții, dy_i din figura 239, *a* este reprezentat prin $\overline{\Delta}_i$ și $d\Delta$ prin $\overline{\Delta}$.

Apar două posibilități, după modul cum sînt alese sistemul de forțe în echilibru și respectiv configurația deplasării virtuale:

(1) Cînd din situația reală se consideră sistemul de forțe, reprezentat de

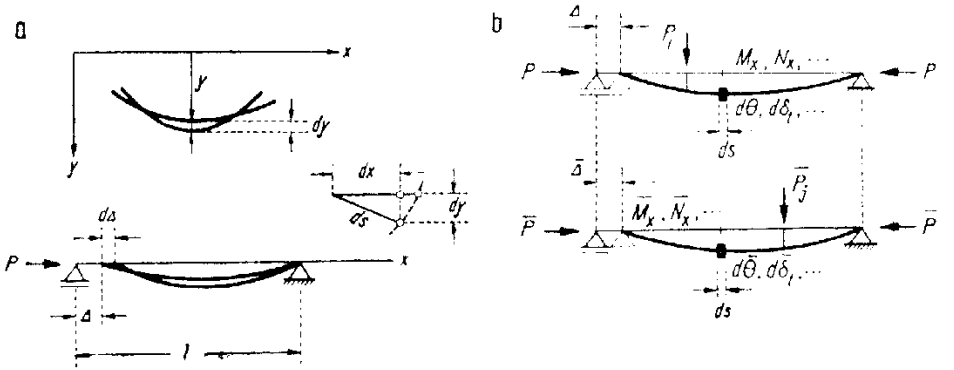


Fig. 239

sarcinile axiale P și sarcinile transversale P_i, precum și de eforturile M, N, ..., iar drept configurație a deplasării virtuale se utilizează deformata din situația auxiliară, aleasă compatibilă, condiția de lucru mecanic virtual nul conduce la relația

$$\overbrace{\sum P_i\overline{\Delta}_i + \sum P\overline{\Delta} - \int M_x d\overline{\theta} - \int N_x d\overline{\delta}_t}^{\text{situația reală}} - \ldots = 0, \qquad (15.23)$$

situația auxiliară

care reprezintă *condiția de echilibru static* a forțelor din situația reală de încărcare.

(2) Cînd din situația auxiliară se consideră sistemul de forțe, reprezentat de sarcinile axiale $\overline{P}$ și sarcinile transversale $\overline{P}_j$, precum și de eforturile $\overline{M}$, $\overline{N}$, ..., sistem ales în echilibru, iar drept configurație a deplasării virtuale se utilizează deformata din situația reală, condiția de lucru mecanic virtual nul conduce la relația

$$\overbrace{\sum \overline{P}_j\Delta_j + \sum \overline{P}\Delta - \int \overline{M}_x d\theta - \int \overline{N}_x d\delta_t}^{\text{situația reală}} - \ldots = 0, \qquad (15.24)$$

situația auxiliară

care reprezintă *condiția de compatibilitate* a deformatei din situația reală de încărcare.

Relațiile (15.23) și (15.24), care sînt în totul asemănătoare cu relațiile (8.6) și (8.7) din statica liniară, exprimă *condiția generală de echilibru elastic* a structurii cu bare puternic comprimate pentru calculul de ordinul II. Aceasta înseamnă că atît eforturile $M_x = M_x^0 + M_x^*, \ldots$, cît și deformările $d\theta, d\delta_i, \ldots$, cuprind și efectul sarcinilor axiale la barele puternic comprimate. Se va utiliza una sau alta dintre cele două relații, după obiectivul urmărit în problema care se studiază.

Dacă în cele două relații se introduc expresiile cunoscute $d\theta = M_x ds/EI, \ldots$ și respectiv $d\bar{\theta} = \bar{M}_x ds/EI, \ldots$, specifice comportării elastice a structurilor pentru încărcare cu sarcini, se constată că membrii din dreapta devin egali și în consecință se poate scrie

$$\sum P_i \bar{\Delta}_i + \sum P \bar{\Delta} = \sum \bar{P}_j \Delta_j + \sum \bar{P} \Delta, \tag{15.25}$$

care reprezintă *forma generală a teoremei reciprocității* în calculul de ordinul II. Pentru termenii care conțin sarcinile axiale se poate utiliza expresia (15.22), anume

$$d\Delta = \int \theta d\theta dx, \qquad \text{sau} \qquad \bar{\Delta} = \int \theta \bar{\theta} dx,$$

unde s-a trecut de la semnificația din figura 239, *a* la cea din figura 239, *b*. Se obține

$$\sum P_i \bar{\Delta}_i + \sum P \int \theta \bar{\theta} dx = \sum \bar{P}_j \Delta_j + \sum \bar{P} \int \bar{\theta} \theta dx,$$

de unde se vede că admițînd pentru fiecare bară puternic comprimată *aceeași sarcină axială în ambele situații* ($P = \bar{P}$), termenii corepunzători devin egali și se ajunge la relația

$$\sum P_i \bar{\Delta}_i = \sum \bar{P}_j \Delta_j, \tag{15.26}$$

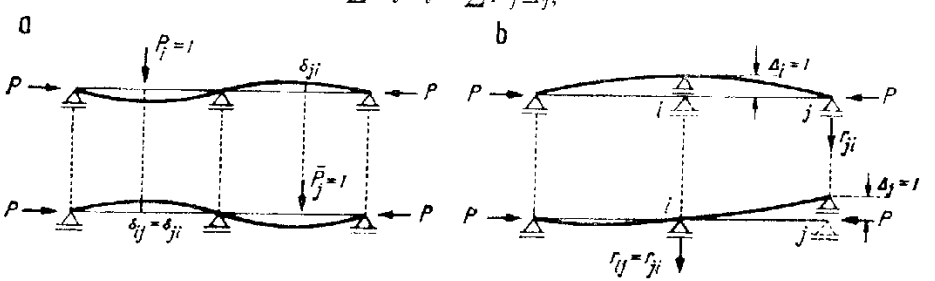


Fig. 240

care reprezintă forma cunoscută a *teoremei lui Betti* dată de relația (8.8), cu mențiunea că în acest caz deplasările corespund pozițiilor deformate din calculul de ordinul II.

În aceleași condiții de sarcini axiale egale, sînt valabile și cazurile particulare ale teoremei reciprocității, anume reciprocitatea deplasărilor unitare $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ și reciprocitatea reacțiunilor unitare $r_{ij} = r_{ji}$, care intervin la extinderea aplicării metodei generale a eforturilor și a metodei generale a deplasărilor la calculul de ordinul II. Aceste cazuri de reciprocitate sînt ilustrate în exemplele din figura 240.

2. Calculul deplasărilor elastice

Fie o structură oarecare cu bare puternic comprimate, la care trebuie determinată o anumită deplasare Δ_i (fig. 241, *a*). Eforturile corespunzătoare, stabilite printr-un calcul de ordinul II, sînt M_x, N_x, ... În situația auxiliară, unde structura apare încărcată cu sarcina-unitate aplicată pe direcția deplasării, situație care poate fi aleasă arbitrar, se admite pentru simplificare că *nu sînt aplicate sarcini axiale*, astfel că eforturile m^0_{xi}, n^0_{xi}, ... se determină printr-un calcul de ordinul I.

Expresia generală a unei deplasări elastice se obține utilizînd forma (15.24) a condiției de echilibru elastic, care exprimă condiția de compatibilitate a poziției deformate reale. Pentru situația auxiliară din figura 241, *a* se poate scrie

$$1 \cdot \Delta_i - \int m^0_{xi}\, d\theta - \int n^0_{xi}\, d\delta_i + \ldots = 0,$$

(*situația reală* / *situația auxiliară*)

unde $d\theta$, $d\delta_i$, ... trebuie introduse prin expresiile $d\theta = M_x ds/EI$, $d\delta_i = N_x ds/EA$, ... corespunzătoare încărcării cu sarcini. Se găsește

$$\Delta_i = \int M_x m^0_{xi} \frac{ds}{EI} + \int N_x n^0_{xi} \frac{ds}{EA} \ldots, \qquad (15.27)$$

(*calcul ordinul II* / *calcul ordinul I*)

care este *expresia Maxwell-Mohr* stabilită anterior prin relația (8.15), dar extinsă pentru condițiile calculului de ordinul II. În expresie M_x trebuie introdus sub forma $M_x = M^0_x + M^*_x$, în timp ce pentru N_x se poate admite aproximativ $N_x \simeq N^0_x$, neglijînd efectul raportării la poziția deformată, care la forța axială este mic.

Expresia (15.27) se aplică pentru calculul deplasărilor elastice la orice structură, indiferent dacă este static determinată sau nedeterminată. În cazul structurilor static nedeterminate este aplicabilă simplificarea stabilită prin relația (9.19), care poate fi justificată în același mod. În consecință, diagramele m^0_{xi}, ... din situația auxiliară de încărcare pot fi construite pe orice sistem static determinat obținut din structura dată prin suprimare de legături.

Pentru aplicarea expresiei (15.27), este necesar ca M_x din secțiunea curentă a unei bare puternic comprimate de sarcina axială P să fie calculat în raport cu poziția deformată. Se aplică deci relația generală (15.4), în care se introduce $M_x = M^0_x + Py$, obținînd

$$y'' + M_x/EI = 0 \quad \text{sau} \quad y'' + k^2 y + M^0_x/EI = 0, \qquad (15.28)$$

unde s-a utilizat notația $k^2 = P/EI$. Rămîne ca în ecuația diferențială să se introducă expresia lui M^0_x, stabilită în condițiile calculului de ordinul I pentru sarcinile date.

În cazul general al unei bare oarecare, diagrama M^0_x este alcătuită ca în figura 124 (notată acolo cu M_x) și anume din diagrama de bară simplu reze-

mată încărcată cu sarcinile corespunzătoare, precum și dintr-un trapez ce corespunde efectelor de continuitate de la extremități. Deoarece pentru $P=const.$ este aplicabilă suprapunerea de efecte, se fac sistematizări separate la cele două părți ale diagramei. Referitor la diagrama de bară simplu rezemată, introducerea efectelor de ordinul II a fost făcută anterior, prin stabilirea caracteristicilor de încărcare corectate în funcție de factorul de compresiune ν, care sînt date

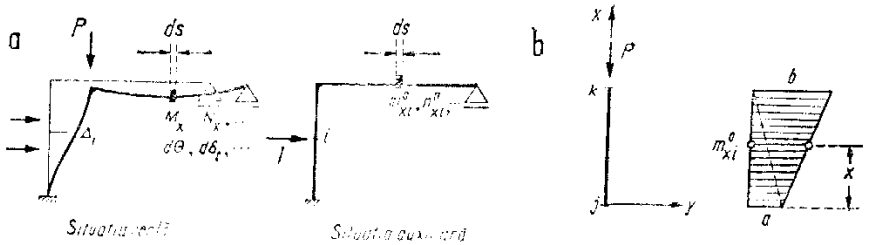


Fig. 241

în tabela 10 pentru cazuri uzuale de încărcare. Rămîne astfel de considerat partea trapezoidală a diagramei.

Admițînd deci că M_x^0 variază *liniar*, printr-o dublă derivare a ecuației (15.28) se obține

$$\frac{d^2}{dx^2}(y'')+k^2y''=0, \quad \text{sau} \quad \frac{d^2M_x}{dx^2}+k^2M_x=0,$$

unde s-a ținut seamă că $M_x=-EIy''$. Integrînd, rezultă

$$M_x=A\cos kx+B\sin kx,$$

expresie generală pentru cazul considerat, care introdusă în relația (15.27), unde se reține numai prima integrală, conduce la

$$\Delta_i=\sum\int_0^l (A\cos kx+B\sin kx)\,m_{xi}^0\,ds/EI, \tag{15.29}$$

care trebuie aplicată pentru toate barele puternic comprimate ale structurii.

În continuare, trebuie ținut seama că totdeauna integrarea se poate împărți pe intervale $j-k$ cu diagramă m_{xi}^0 liniară (fig. 241, *b*). Pentru un asemenea interval, cu notațiile din figură, se scrie

$$m_{xi}^0=a+\gamma x, \text{ unde } \gamma=(b-a)/l.$$

La bare cu *secțiune constantă*, integrala din expresia deplasării devine

$$\int_0^l (A\cos kx+B\sin kx)(a+\gamma x)\,dx=$$

$$=A\frac{a}{k}\sin kl-B\frac{a}{k}(\cos kl-1)+A\gamma\int_0^l x\cos kx\,dx+B\gamma\int_0^l x\sin kx\,dx,$$

unde cele două integrale se efectuează prin părți; se obține

$$\int_0^l x\cos kx\,dx=l\frac{\sin\nu}{k}+\frac{\cos\nu-1}{k^2} \quad \text{și} \quad \int_0^l x\sin kx\,dx=-l\frac{\cos\nu}{k}+\frac{\sin\nu}{k^2}.$$

Introducînd aceste rezultate și grupînd termenii în raport cu constantele de integrare, se obține următoarea expresie a deplasării pentru bara puternic comprimată $j-k$

$$EI\Delta_i = A\left[\frac{b}{k}\sin\nu + \frac{\gamma}{k^2}(\cos\nu - 1)\right] + B\left[\frac{a}{k} + \frac{\gamma}{k^2}\sin\nu - \frac{b}{k}\cos\nu\right]. \quad (15.30)$$

Rămîn de determinat constantele de integrare A și B, pe baza condițiilor de capăt ale diagramei $M_x = M_x^0 + M_x^*$ pentru bara j-k, la care s-a admis că M_x^0 variază liniar. În vederea sistematizării calculului deplasărilor elastice, se consideră anumite cazuri tip de bare puternic comprimate.

3. Cazuri tip de bare static determinate

În aplicațiile practice interesează în special două tipuri de bare puternic comprimate, pentru care există sistematizată o modalitate simplă de introducere a efectelor de ordinul II, sub forma unor coeficienți de corecție ce depind de factorul de compresiune ν și se aplică expresiilor cunoscute din calculul de ordinul I.

a. **Bara cu o articulație și un reazem simplu** (fig. 242, *a*). Diagrama M_x^*, datorită sarcinii axiale P, se anulează la capete. În expresia momentului încovoietor, care are forma

$$M_x = A\cos kx + B\sin kx,$$

se impun condițiile de extremitate: pentru $x=0$, $M_j = c$ și pentru $x=l$, $M_k = d$; se obține

$$c = A \quad \text{și} \quad d = A\cos\nu + B\sin\nu, \quad \text{unde} \quad \nu = kl$$

și deci $$A = c \quad \text{și} \quad B = (d - c\cos\nu)/\sin\nu,$$

care introduse în expresia (15.30), conduc la relația

$$EI\Delta_i = l(ac + bd)\left[\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu\,\mathrm{tg}\,\nu}\right] + l(bc + ad)\left[\frac{1}{\nu\sin\nu} - \frac{1}{\nu^2}\right],$$

sau

$$\Delta_i = \frac{l}{3EI}(ac + bd)\cdot\alpha(\nu) + \frac{l}{6EI}(bc + ad)\cdot\beta(\nu),$$

unde s-au introdus coeficienții de corecție

$$\alpha(\nu) = \frac{3}{\nu^2}\left[1 - \frac{\nu}{\mathrm{tg}\,\nu}\right] \quad \text{și} \quad \beta(\nu) = \frac{6}{\nu^2}\left[\frac{\nu}{\sin\nu} - 1\right]. \quad (15.31)$$

Pentru sistematizarea efectuării integralelor în mod asemănător celui utilizat în statica liniară, dat de relațiile (8.31)–(8.32), se admite multiplicarea cu $6EI_c$, obținînd pentru bara $j-k$

$$6EI_c\,\Delta_i = 2\lambda_{jk}(ac + bd)\cdot\alpha(\nu) + \lambda_{jk}(bc + ad)\cdot\beta(\nu), \quad (15.32)$$

unde apare lungimea transformată λ_{jk} a barei. Controlînd pe figurile 241, *b* și 242, *a*, se constată că integrarea „produsului" diagramelor $M_x = M_x^0 + M_x^*$

și m^0_{xi} *se reduce la considerarea unor perechi de triunghiuri*, așa cum s-a arătat în legătură cu figurile 124 și 125, efectul de ordinul II intervenind prin intermediul coeficienților de corecție: $\alpha(\nu)$ cînd cele două triunghiuri sînt orientate în același sens și $\beta(\nu)$ cînd sînt orientate în sensuri opuse.

b. **Bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt** (fig. 242, *b*). În acest caz, diagrama M^*_x se anulează numai în extremitatea barei, conținînd un triunghi

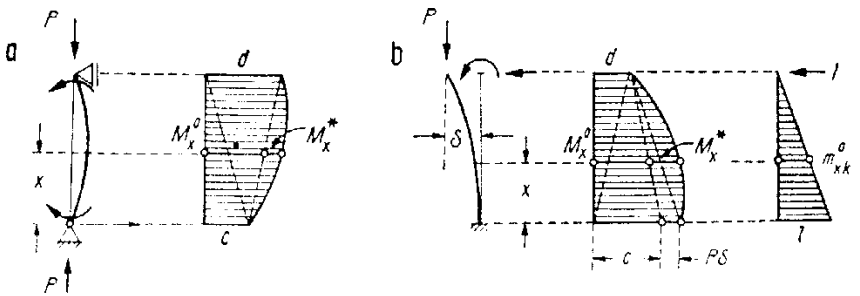


Fig. 242

suplimentar față de cazul din figura 242, *a*, care are în încastrare ordonata $P\delta$, unde δ este săgeata la vîrf. Această săgeată trebuie mai întîi calculată, utilizînd diagrama auxiliară m^0_{xk} și integrînd-o cu diagrama M_x.

Se folosesc rezultatele din cazul precedent, considerînd lățimea $c_1 = c + P\delta$ pentru triunghiul din diagrama M_x cu baza la încastrare; se obține

$$EI\delta = \frac{l^2}{\nu^2} P\delta = \frac{l^2}{6} [2c_1 \alpha(\nu) + d\,\beta(\nu)],$$

unde pentru EI s-a introdus mărimea ce rezultă din relația $P = \nu^2 EI/l^2$. Înseamnă că triunghiul suplimentar are baza

$$P\delta = \frac{\nu^2}{6} [2c_1 \alpha(\nu) + d\,\beta(\nu)],$$

care introdusă în mărimea segmentului total $c_1 = c + P\delta$ conduce la o relație ce se poate scrie sub forma

$$c_1 \left[1 - \frac{\nu^2}{3} \alpha(\nu)\right] = c + \frac{\nu^2}{6} \beta(\nu), \quad \text{unde} \quad 1 - \frac{\nu^2}{3} \alpha(\nu) = \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$$

cum rezultă din expresia coeficientului de corecție $\alpha(\nu)$ dată de prima relație (15.31). Se ajunge deci la mărimea

$$c_1 = \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} \left[c + \frac{\nu^2}{6} d\,\beta(\nu)\right].$$

Se poate acum efectua integrarea „produsului" diagramelor M_x și m_{xi}^0 utilizînd coeficienții de corecție $\alpha(\nu)$ și $\beta(\nu)$; se găsește relația

$$6EI_c\Delta_i = \lambda_{jk}c_1\left[2a\,\alpha(\nu) + b\,\beta(\nu)\right] + \lambda_{jk}\,d\left[2b\,\alpha(\nu) + a\,\beta(\nu)\right],$$

în care introducînd expresia segmentului c_1 și grupînd corespunzător termenii, se obține pentru bara $j-k$

$$6EI_c\Delta_i = 2\lambda_{jk}ac\cdot\gamma_1(\nu) + 2\lambda_{jk}bd\cdot\gamma_2(\nu) + \lambda_{jk}(ad+bc)\cdot\gamma_3(\nu), \qquad (15.33)$$

unde s-au introdus următorii coeficienți de corecție

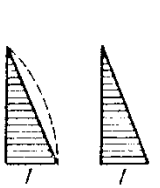
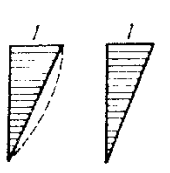
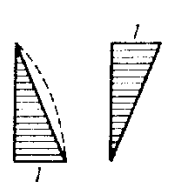
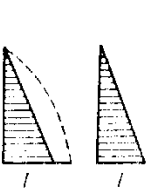
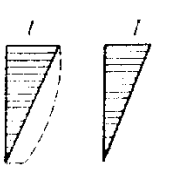
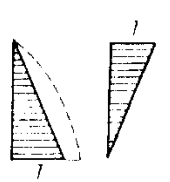
$$\gamma_1(\nu) = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\alpha(\nu), \quad \gamma_2(\nu) = \alpha(\nu) + \frac{\nu\operatorname{tg}\nu}{12}\beta^2(\nu), \quad \gamma_3(\nu) = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\beta(\nu), \qquad (15.34)$$

care sînt specifici celui de al doilea tip de bară. Controlînd figurile 241, *b* și 242, *b*, se constată că și în acest caz calculul deplasărilor se reduce la considerarea acelorași perechi de triunghiuri care intervin în calculul de ordinul I. De observat că, de data aceasta, apar doi coeficienți de corecție diferiți pentru perechea de triunghiuri orientate în același sens, după cum bazele acestora sînt la încastrare sau la vîrful barei.

Rezultatele obținute pentru cele două tipuri de bare sînt centralizate în tabela 11, care reprezintă o extindere a tabelei 5 la bare puternic comprimate

Tabela 11

Coeficienți de corecție la bare static determinate

Tip 1	$\alpha(\nu) = \frac{3}{\nu^2}\left[1 - \frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right]$, $\beta(\nu) = \frac{6}{\nu^2}\left[\frac{\nu}{\sin\nu} - 1\right]$		
	 $2\lambda_{jk}\cdot\alpha(\nu)$	 $2\lambda_{jk}\cdot\alpha(\nu)$	 $\lambda_{jk}\cdot\beta(\nu)$
Tip 2	$\gamma_1(\nu) = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\alpha(\nu)$, $\gamma_2(\nu) = \alpha(\nu) + \frac{\nu\operatorname{tg}\nu}{12}\beta^2(\nu)$, $\gamma_3(\nu) = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\beta(\nu)$		
	 $2\lambda_{jk}\cdot\gamma_1(\nu)$	 $2\lambda_{jk}\cdot\gamma_2(\nu)$	 $\lambda_{jk}\cdot\gamma_3(\nu)$

cu secțiune constantă. Coeficienții de corecție $\alpha(\nu)$ și $\beta(\nu)$, respectiv $\gamma_1(\nu)$, $\gamma_2(\nu)$ și $\gamma_3(\nu)$, se găsesc întabulați în lucrări de specialitate[1]. La utilizare, se va ține seama că efectul de ordinul II intervine exclusiv prin introducerea coeficienților de corecție și deci din diagrama M_x se va considera numai trapezul cu ordonate c și d. La trasarea diagramei este util să se schițeze și partea M_x^*, pentru a atrage atenția că la integrare trebuie introduși coeficienții de corecție.

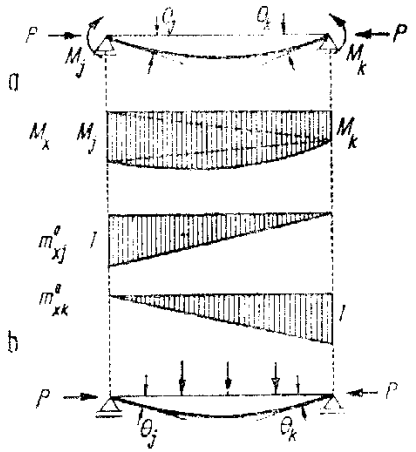


Fig. 243

Pentru exemplificare, se determină rotirile din extremitățile unei bare simplu rezemate puternic comprimată, încărcată cu momente de continuitate și cu sarcini transversale. În figura 243, *a* este trasată diagrama M_x ce corespunde momentelor de continuitate M_j și M_k, cu efectul de ordinul II, precum și diagramele unitare m_x^0 și m_{xk}^0; se obține

$$6EI\,\theta_j = 2l\,\alpha(\nu)M_j + l\,\beta(\nu)M_k \text{ și}$$
$$6EI\,\theta_k = l\,\beta(\nu)M_j + 2l\,\alpha(\nu)M_k.$$

Pentru sarcini transversale (fig. 243, *b*) se utilizează caracteristicile de încărcare m_j și m_k, corectate corespunzător calculului de ordinul II, anume $6EI\,\theta_j = l\,m_j$ și $6EI\,\theta_k = l\,m_k$, astfel că mărimile totale ale rotirilor sînt

$$\theta_j = \frac{l}{6EI}\left[2\alpha(\nu)M_j + \beta(\nu)M_k + m_1\right] \text{ și } \theta_k = \frac{l}{6EI}\left[\beta(\nu)M_j + 2\alpha(\nu)M_k + m_2\right] \quad (15.35)$$

unde expresiile caracteristicilor de încărcare sînt cele din tabela 10.

D. APLICAREA METODEI EFORTURILOR

1. Condiții și modalități de aplicare

Metoda eforturilor este specifică staticii liniare și are la bază suprapunerea de efecte, cum rezultă din ecuațiile de condiție (9.4), pentru stabilirea cărora sistemul de bază se consideră încărcat succesiv cu sarcinile date și cu fiecare dintre necunoscute. Extinderea aplicării metodei la calculul de ordinul II impune deci stabilirea condițiilor în care suprapunerea efectelor poate fi admisă. Așa cum s-a arătat în legătură cu relațiile (15.18)–(15.21), suprapunerea este posibilă numai dacă *în barele puternic comprimate forța axială rămîne constantă.*

[1] Acești coeficienți sînt reproduși în lucrarea A. Searlat, *Stabilitatea și calculul de ordinul II al structurilor*, Editura tehnică, București, 1969, unde sînt notați cu α și β, respectiv θ', θ'' și θ.

În cele ce urmează se admite această ipoteză, care își găsește justificarea în aproximația $N_x \cong N_x^0$, neglijînd deci diferențele ce apar în mărimea forțelor axiale cînd se trece de la calculul de ordinul I la calculul de ordinul II. În consecință, factorii de compresiune $\nu = l\sqrt{N/EI}$ sînt considerați drept *constante* ale barelor puternic comprimate în tot cursul calculului, suprapunerea de efecte referindu-se numai la sarcinile transversale. Acest mod de lucru corespunde de fapt și realității, deoarece obișnuit sarcinile axiale puternice se aplică direct asupra barelor respective (de exemplu încărcarea dată de podul rulant pe un stîlp de hală industrială).

Stabilirea barelor puternic comprimate dintr-o structură trebuie făcută de la început, pe baza mărimii factorului de compresiune ν. Se consideră de obicei ca atare numai acele bare la care $\nu > 0{,}2\nu_{cr}$; pentru celelalte se admite $\nu = 0$ și sînt deci considerate ca în calculul de ordinul I. Înseamnă că un calcul de ordinul II se justifică numai la structuri care au bare acționate de sarcini axiale puternice, iar corecțiile corespunzătoare se introduc numai pentru aceste bare.

Cînd sînt mai multe bare puternic comprimate într-o structură, pentru verificarea de stabilitate se alege ca parametru factorul de compresiune al uneia dintre bare, la care se raportează ceilalți factori. Astfel, pentru două bare i și j cu factorii de compresiune

$$\nu_i = l_i\sqrt{N_i/EI_i} \qquad \text{și} \qquad \nu_j = l_j\sqrt{N_j/EI_j},$$

se poate scrie

$$\nu_j = \alpha_j \nu_i, \qquad \text{unde} \qquad \alpha_j = \frac{l_j}{l_i}\sqrt{\frac{N_j}{N_i}\frac{I_i}{I_j}} \tag{15.36}$$

și deci ν_i are rol de parametru pentru întreaga structură, urmînd să se determine valoarea critică a acestuia — *parametrul critic*.

Concepția și formularea generală a metodei eforturilor, așa cum sînt cunoscute din capitolul IX, rămîn în întregime aplicabile și pentru calculul de ordinul II, cu deosebirea că pentru barele puternic comprimate trebuie introduse corecțiile date de sarcinile axiale raportate la poziția deformată. În mod sistematizat, introducerea corecțiilor se realizează prin utilizarea coeficienților din tabela 11. Faptul că în literatura de specialitate există gata calculați numai coeficienți de corecție pentru cele două tipuri de bare static determinate din figura 242, crează o restrîngere a domeniului de aplicare practică a metodei eforturilor în calculul de ordinul II și de stabilitate.

Într-adevăr, este necesar ca trecerea la sistemul de bază să fie astfel făcută, încît barele puternic comprimate să se găsească în una dintre cele două situații. Înseamnă, pe de o parte, că nu poate fi utilizat orice sistem de bază, iar pe de altă parte, că se pot întîlni structuri la care metoda eforturilor să nu poată fi aplicată eficient datorită imposibilității de a obține un sistem de bază corespunzător. În general, tipul de bară din figura 242, *a* este indicat pentru sisteme de bază la cadre cu noduri fixe, iar cel din figura 242, *b* — pentru sisteme de bază la cadre cu noduri deplasabile. În figura 244 sînt date două exemple de alegere în acest sens a sistemului de bază. Este ușor de controlat că, în primul caz, transformarea articulației din extremitatea *5* în reazem simplu ar permite deplasări laterale în sistemul de bază și deci — oricare ar fi

celelalte legături suprimate — nu se poate obține ca cei doi stîlpi să se încadreze în cazurile tip. Aceeași situație dacă — în al doilea caz — în rezemările din *4* și 7 s-ar introduce articulații, sau structura dată ar avea acolo rezemări articulate. Pentru un cadru portal articulat la bază, sau pentru un cadru etajat ai cărui stîlpi ar fi puternic comprimați, nu se pot obține sisteme de bază în care stîlpii să se reducă la cazul din figura 242, *b*, astfel că metoda eforturilor nu este aplicabilă.

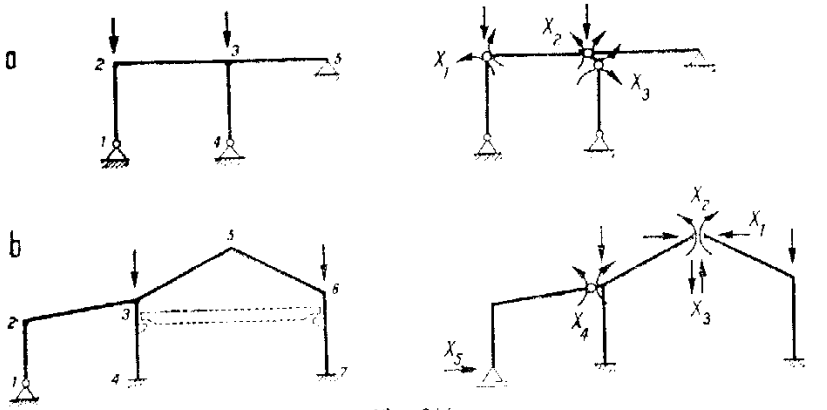


Fig. 244

Odată stabilit sistemul de bază, se trece la alcătuirea ecuațiilor de condiție, care au forma generală (9.4), calculînd coeficienții și termenii liberi. Pentru bare puternic comprimate se utilizează expresiile

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int m_{xi} m_{xj}^{0} \frac{ds}{EI} = \int m_{xi}^{0} m_{xj} \frac{ds}{EI} \quad \text{și} \quad \Delta_{is} = \int M_{xs} m_{xi}^{0} \frac{ds}{EI},$$

care derivă din expresia Maxwell-Mohr dată de relația generală (15.27). În formulare matriceală sistemul de ecuații se scrie

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix}}_{\delta} \underbrace{\begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{vmatrix} \Delta_{1s} \\ \vdots \\ \Delta_{ns} \end{vmatrix}}_{\Delta_s} = [0], \quad \text{sau} \quad \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix}}_{\delta} \underbrace{\begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix}}_{X} = [0], \qquad (15.37)$$

după cum pe barele structurii sînt aplicate sau nu sarcini transversale. Pentru elementele matricei δ, calculul se face utilizînd coeficienții de corecție în tabela 11, anume $\alpha(\nu)$ și $\beta(\nu)$ pentru primul tip de bară, respectiv $\gamma_1(\nu)$, $\gamma_2(\nu)$ și $\gamma_3(\nu)$ pentru al doilea. Dacă sînt și sarcini transversale aplicate pe barele puternic comprimate, la calculul termenilor liberi din matricea Δ_s se utilizează pentru aceste bare caracteristicile de încărcare corectate, cum sînt cele date în tabela 10. Pe barele la care $\nu < 0{,}2\,\nu_{cr}$, evaluarea coeficienților și a termenilor liberi se face după normele staticii liniare. Înseamnă că, în matricele δ și Δ_s, unii termeni conțin parametrul ν, iar alții nu.

Utilizarea ecuațiilor de condiție se face în raport cu obiectivul urmărit.

(a) *Calculul de ordinul II.* În acest caz există sarcini transversale aplicate în cursul barelor, iar factorii de compresiune sînt cunoscuți pentru toate barele puternic comprimate; calculul acestora se face pe baza aproximației $N_x \simeq N_x^0$, în raport cu sarcinile de exploatare date. În funcție de factorii ν, se extrag din tabele mărimile coeficienților de corecție și se calculează valorile numerice ale elementelor matricelor $\boldsymbol{\delta}$ și $\boldsymbol{\Delta}_s$. Urmează rezolvarea sistemului de ecuații, din care se obțin mărimile necunoscutelor static nedeterminate $X_1,...X_n$, care diferă de cele ce ar rezulta printr-un calcul de ordinul I. Diagramele totale de eforturi se trasează prin suprapunere; la barele puternic comprimate, care au și sarcini transversale în cursul lor, partea din diagramă ce corespunde barei simplu rezemate va fi cea din calculul de ordinul II și în consecință trebuie stabilită cu ajutorul expresiilor din tabela 10.

(b) *Verificarea la stabilitate.* Pot fi două situații distincte, după cum pe structură se consideră că acționează numai sarcini axiale și deci se urmărește determinarea parametrului critic ce corespunde bifurcării echilibrului (fenomenul de flambaj), sau acționează și sarcini transversale aplicate în cursul barelor, pierderea de stabilitate intervenind prin accentuarea puternică a deformării.

În primul caz, sistemul ecuațiilor de condiție nu are termeni liberi și se scrie $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}=0$. Soluția banală a acestui sistem omogen, cu toate necunoscutele $X_1,...X_n$ egale cu zero, corespunde de obicei poziției inițiale a structurii. Cînd ν atinge valoarea ν_{cr} trebuie să existe și o a doua poziție de echilibru, de data aceasta deformată, căreia îi corespund valori diferite de zero pentru necunoscute. Aceasta este posibil numai cînd matricea $\boldsymbol{\delta}$ este *singulară*, ceea ce conduce la condiția $D[\boldsymbol{\delta}]=0$, care reprezintă ecuația de stabilitate. Dezvoltînd determinantul, se obține o ecuație în ν, din care trebuie reținută soluția $(\nu_{cr})_{min}$.

În al doilea caz, sistemul ecuațiilor de condiție are termeni liberi și se scrie $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}_s=0$, astfel că necunoscutele se obțin sub forma $X_i=-D_i/D$, unde D este determinantul matricei $\boldsymbol{\delta}$. Cît timp structura se menține în domeniul echilibrului stabil, condiția de unicitate a soluției pentru necunoscutele $X_1,...X_n$ se exprimă sub forma $D[\boldsymbol{\delta}]\neq 0$ și corespunde unui calcul de ordinul II pentru determinarea eforturilor date de sarcinile de exploatare. Ca structura să ajungă la pierdere de stabilitate prin accentuarea deformării, este necesar ca eforturile și deplasările — deci și necunoscutele $X_1,...X_n$ — să devină foarte mari, teoretic să tindă spre infinit, ceea ce este posibil numai dacă $D[\boldsymbol{\delta}]=0$, regăsind *aceeași* ecuație de stabilitate.

Înseamnă că, la o structură supusă la sarcini axiale puternice, parametrul critic de pierdere a stabilității *este același*, indiferent dacă în cursul barelor se consideră aplicate sau nu și sarcini transversale. Acest rezultat justifică afirmația făcută anterior în legătură cu figura 230, *b*.

În legătură cu verificarea la stabilitate a structurilor prin metoda eforturilor, rămîn de făcut unele observații importante:

(1) Cînd ecuațiile de condiție se reduc la sistemul omogen $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}=0$, s-a arătat că soluția banală $X_1=0,...X_n=0$ corespunde *de obicei* poziției inițiale a structurii. Se pot totuși întîlni situații particulare cînd, pentru poziția deformată

de pierdere a stabilității, necunoscutele suplimentare ce corespund unui anumit sistem de bază să fie nule, deci legăturile respective să nu fie solicitate. Aceasta înseamnă că deformata critică a structurii date este identică cu cea a sistemului de bază considerat, astfel că valoarea parametrului critic este aceeași.

Caracterul particular al unei asemenea situații apare ținînd seamă că, în metoda eforturilor, trecerea la sistemul de bază se face prin suprimare de legături și deci acest sistem este mai puțin rigid decît structura ce se studiază, astfel că — în mod normal — parametrul său critic trebuie să fie mai mic. Utilizînd ecuația de stabilitate $D[\delta]=0$, care implicit elimină soluția banală $X_1=0,\ldots X_n=0$, este firesc să se ajungă la o valoare ν_{cr} mai mare decît a sistemului de bază. Rezultă de aici că, în condițiile utilizării metodei eforturilor, rezolvarea ecuației de stabilitate *nu garantează* că s-a obținut valoarea *minimă* a parametrului critic pentru structura dată. Este totdeauna necesar să se controleze și posibilitatea ca pentru soluția banală să se identifice o deformată critică mai dezavantajoasă. Aceasta constituie un dezavantaj al utilizării metodei eforturilor în probleme de stabilitate.

Unele criterii de orientare privitor la depistarea prioritații soluției banale, cît și exemplificări, vor fi întîlnite mai departe.

(2) În ecuația de stabilitate $D[\delta]=0$, barele puternic comprimate introduc coeficienții de corecție din tabela 11, care sînt funcții de parametrul ν. Rezolvarea directă a ecuației de stabilitate pentru aflarea valorii $(\nu_{cr})_{min}$ este de obicei anevoioasă și nu se utilizează decît pentru cazuri foarte simple. În general se recurge la rezolvarea prin încercări, atribuind succesiv anumite valori parametrului ν și calculînd valorile corespunzătoare ale determinantului D. Apare firesc întrebarea dacă o valoare obținută dă anumite indicații pentru continuarea încercărilor. Aceasta revine la a cerceta variația lui D în funcție de ν.

Examinarea tabelelor de coeficienți de corecție arată că în mărimile acestora apar discontinuități, rezultînd discontinuități și în variația lui D. Astfel, cînd în sistemul de bază barele puternic comprimate devin dublu articulate (v. fig. 242, *a*) intervin coeficienții $\alpha(\nu)$ și $\beta(\nu)$ care au discontinuitate pentru $\nu=\pi$; asemănător, pentru console (v. fig. 242, *b*) intervin coeficienții $\gamma_1(\nu)$, $\gamma_2(\nu)$ și $\gamma_3(\nu)$ care au discontinuități pentru $\nu=\pi/2$. Se controlează cu ajutorul tabelei 9 că aceste discontinuități apar cînd parametrul ν atinge valoarea sa critică pentru sistemul de bază (ν^0_{cr}), care este obișnuit mai mică decît cea a parametrului ν_{cr} pentru structura static nedeterminată, cu surplus de legături. Variația determinantului $D[\delta]$ depinde de gradul de nedeterminare statică al structurii și se poate reprezenta ca în figura 245. Înseamnă că semnul determinantului rezultat pentru o anumită încărcare, nu reprezintă o indicație dacă aceasta corespunde domeniului echilibrului stabil sau instabil, deoarece pentru $\nu<\nu_{cr}$ se poate obține $D>0$ sau $D<0$.

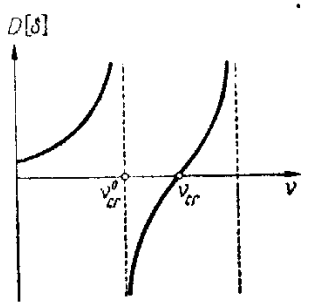


Fig. 245

O cale de conducere a încercărilor poate fi următoarea: cînd se atribuie o primă valoare apreciată parametrului ν, în ecuația de stabilitate se introduc valorile numerice corespunzătoare ale coeficienților de corecție, cu excepția unui singur termen care se menține sub formă literală. Din ecuația $D[\delta]=0$ rezultă mărimea acestui termen și deci o nouă valoare pentru ν, cu care se continuă încercările.

(3) Domeniul de aplicare al metodei eforturilor în probleme de stabilitate este mai restrîns decît cel din statica liniară, datorită unei serii de dezavantaje ce au fost arătate. Limitările și condiționările referitoare la alegerea sistemului de bază, necesitatea cercetării soluțiilor banale separat de rezolvarea ecuației de stabilitate, dificultățile legate de rezolvarea acesteia prin încercări datorită discontinuităților ce apar pentru $\nu<\nu_{cr}$, reprezintă impedimente ce restrîng aplicarea practică a metodei numai la cazuri simple.

2. Utilizarea matricei deplasărilor unitare

Aplicarea metodei eforturilor în stabilitate se reduce la formarea și rezolvarea ecuației de stabilitate $D[\delta]=0$, cît și la controlul unei eventuale soluții banale ce ar conduce la o valoare ν_{cr} mai mică. În acest scop, se alege un sistem de bază corespunzător și se alcătuiește matricea deplasărilor unitare δ. Pentru exemplificare, sînt examinate în continuare cîteva cazuri de largă utilizare.

(a) *Bare static nedeterminate.* În figura 246, *a* și *b* sînt considerate două tipuri de bare, pentru care se determină pe această cale sarcinile critice. S-au indicat sistemele de bază alese, precum și diagramele unitare m_{x1} și m^0_{x1}; cel de al doilea caz este de două ori static

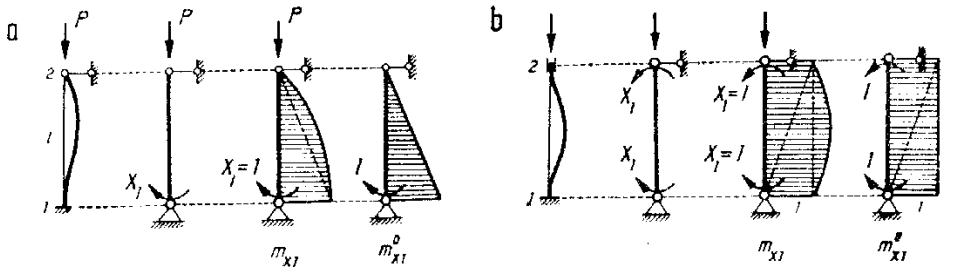


Fig. 246

nedeterminat, dar datorită simetriei se poate utiliza o singură necunoscută grupată simetrică deoarece deformata critică este simetrică. Ecuația de stabilitate se reduce în ambele cazuri la

$$\delta_{11}=\int m_{x1}\, m^0_{x1}\, ds/EI=0.$$

Introducînd coeficienții de corecție corespunzători tipului *1* din tabela 11, se obține:

— caz a) $$6\,EI\,\delta_{11}=2\,l\,\alpha(\nu)=0, \quad \text{sau} \quad \alpha(\nu)=0,$$
din tabelă $\nu=4{,}49$ și deci $P_{cr}=\pi^2 EI/(0{,}7\,l)^2$

— caz b) $$6\,EI\,\delta_{11}=2\cdot 2\,l\,\alpha(\nu)+2\,l\,\beta(\nu)=0, \quad \text{sau} \quad 2\,\alpha(\nu)+\beta(\nu)=0,$$
prin încercări $\nu=2\,\pi$ și deci $P_{cr}=\pi^2\,EI/(0{,}5\,l)^2$,

regăsind rezultatele înscrise în tabela 9 pentru cazurile *2* și *3*.

(b) *Grup de doi stîlpi, din care unul puternic comprimat.* Fie cazul din figura 247, *a*, care schematizează stîlpii unei hale industriale, legați la partea superioară printr-o bară rigidă articulată (ferma de acoperiș). Drept necunoscută suplimentară s-a ales efortul axial X_1 din bara de legătură. Diagrama m_{x1} este arătată în figură; diagrama m^0_{x1} este asemănătoare, dar fără efect de ordinul II pe stîlpul din dreapta. Utilizînd coeficienții de corecție corespunzători tipului *2* din tabela 11, se obține

$$\delta_{11}=\frac{h^3}{3EI_1}\gamma_1(\nu)+\frac{h^3}{3EI_2}=\frac{h^3}{3EI_1}[\gamma_1(\nu)+\mathrm{K}],\quad \text{unde } \mathrm{K}=I_1/I_2.$$

Ecuația de stabilitate este

$$\delta_{11}=0,\quad \text{deci}\quad \gamma_1(\nu)+\mathrm{K}=0,\ \text{sau}\ \gamma_1(\nu)=-\mathrm{K}.$$

Pentru cîteva cazuri de rapoarte K, rezultă:

$I_2=0$,	$\mathrm{K}=\infty$,	$\gamma_1(\nu)=-\infty$,	$\nu=\pi/2$,	$P_{cr}=\pi^2 EI/(2h)^2$,
$I_2=I_1$,	$\mathrm{K}=1$,	$\gamma_1(\nu)=-1$,	$\nu=2{,}21$,	$P_{cr}=\pi^2 EI/(1{,}42h)^2$,
$I_2=\infty$,	$\mathrm{K}=0$,	$\gamma_1(\nu)=0$,	$\nu=4{,}49$,	$P_{cr}=\pi^2 EI/(0{,}7h)^2$.

În primul caz, stîlpul *1* se comportă ca o consolă liberă la extremitate, în timp ce în cazul al treilea același stîlp rămîne cu extremitate fixă, ca în figura 246, *a*. Cu cît stîlpul *2* este mai rigid, ansamblul este mai stabil și factorul de compresiune crește; înseamnă că pentru stîlpul comprimat pierderea de stabilitate este *stînjenită* de prezența legăturii orizontale, cu atît mai mult cu cît I_2 crește.

(c) *Grup de doi stîlpi puternic comprimați.* În figura 247, *b* este reluată aceeași schematizare, dar acum ambii stîlpi suportă sarcini axiale. Se consideră același sistem de bază, diagrama m_{x1} fiind dată în figură; diagrama m^0_{x1} este asemănătoare, dar fără efecte de ordinul II. Cu aceleași notații, se obține

$$\delta_{11}=\frac{h^3}{3\,EI_1}[\gamma_1(\nu_1)+\mathrm{K}\gamma_1(\nu_2)]=0\quad \text{și deci}\quad \gamma_1(\nu_1)+\mathrm{K}\gamma_1(\nu_2)=0$$

reprezintă ecuația de stabilitate. Alegînd parametru pe ν_1, din relația (15.35) rezultă

$$\nu_1=h\sqrt{P_1/EI_1},\ \nu_2=h\sqrt{P_2/EI_2}=\mu\nu_1,\quad \text{unde } \mu=\sqrt{\mathrm{K}/\omega},$$

cu notația $\omega=P_1/P_2$. Rămîne să se considere cîteva cazuri particulare:

— Fie $P_1=P_2$ și $I_1=I_2$, deci $\mathrm{K}=1$ și $\omega=1$, sau $\nu_1=\nu_2=\nu$, caz care corespunde unei situații de simetrie. Ecuația de stabilitate devine $2\gamma_1(\nu)=0$ și conduce la soluția $\nu=4{,}49$; deformata critică este în acest caz *simetrică* și extremitățile stîlpilor nu se deplasează (punctat pe figură),

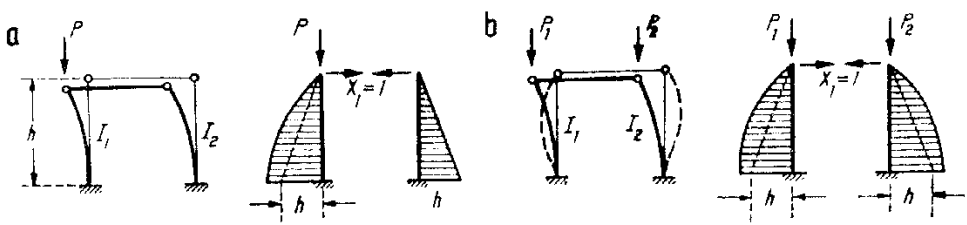


Fig. 247

legătura rigidă orizontală stînjenind pierderea de stabilitate a ambilor stîlpi. Pentru această deformată este evident că $X_1\neq 0$. Mai există o deformată critică posibilă și anume *antisimetrică* (plin în figură), pentru care $X_1=0$ — soluția banală; cei doi stîlpi, care se găsesc în situație identică, își pierd stabilitatea independent și bara de legătură rămîne inactivă. În acest caz $\nu=\pi/2$, deoarece se regăsește tipul *4* de bară din tabela 9 și deci sarcina critică este $P^{(1)}_{cr}=2{,}47\ EI/h^2$.

– Fie $P_2=P_1/4$ și $I_1=I_2=I$, deci $K=1$ și $\omega=4$, sau $\nu_2=0{,}5\ \nu_1$. Ecuația de stabilitate este

$$\gamma_1(\nu_1)+\gamma_1(0{,}5\ \nu_1)=0$$

și prin încercări se obține soluția $\nu_1=1{,}99$; pentru al doilea stîlp rezultă $\nu_2=0{,}99$. Cu aceste valori, sarcinile critice care corespund celor doi stîlpi sînt

$$P_{1cr}=\frac{3{,}96\,EI}{h^2}>\frac{2{,}47\,EI}{h^2}\quad\text{și}\quad P_{2cr}=\frac{0{,}99\,EI}{h^2}<\frac{2{,}47\,EI}{h^2},$$

unde comparația este făcută cu sarcina critică a fiecăruia, dacă ar lucra independent. Se constată că pierderea de stabilitate a stîlpului *1* este *stînjenită* de prezența legăturii cu stîlpul *2*, în timp ce pierderea de stabilitate a stîlpului *2* este *forțată*.

Fie $P_1=P_2$ și $I_2=4I_1$, deci $K=1/4$ și $\omega=1$, sau $\nu_2=0{,}5\ \nu_1$. Ecuația de stabilitate este

$$\gamma_1(\nu_1)+0{,}25\gamma_1(0{,}5\nu_1)=0$$

și prin încercări se obține soluția $\nu_1=2{,}47$; pentru al doilea stîlp rezultă $\nu_2=1{,}235$. Cu aceste valori, sarcinile critice care corespund pentru cei doi stîlpi sînt

$$P_{1cr}=\frac{6{,}10\,EI_1}{h^2}>\frac{2{,}47\,EI_1}{h^2}\quad\text{și}\quad P_{2cr}=\frac{6{,}10\,EI_2}{4\,h^2}=\frac{1{,}52\,EI_2}{h^2}<\frac{2{,}47\,EI_2}{h^2},$$

unde s-a făcut o comparație similară celei din cazul precedent. Se constată că, datorită solidarizării prin bara orizontală, stîlpul *2* — care este mai puternic — mărește stabilitatea stîlpului *1*, dar prin aceasta își micșorează propria sa stabilitate.

Apare limpede comportarea diferită a structurii, față de stîlpul izolat.

d) *Stabilitatea unui cadru*. Fie cadrul cu noduri fixe din figura 248, *a*, care este de trei ori static nedeterminat. Sistemul de bază ales, arătat în figura 248, *b*, îndeplinește condiția ca

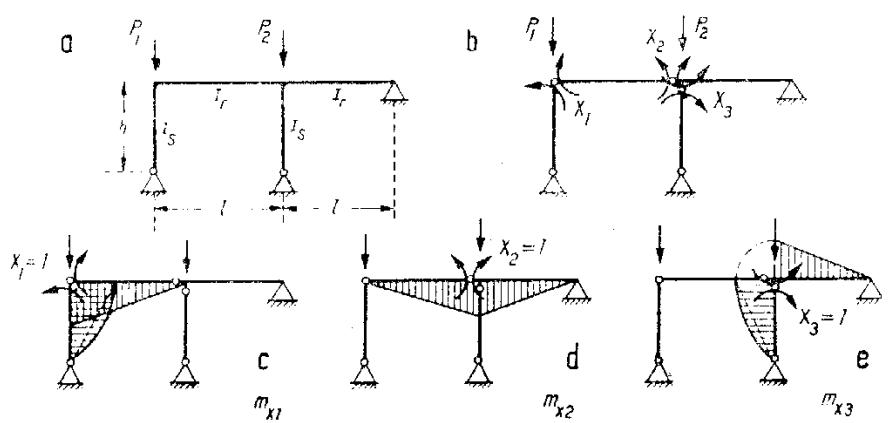


Fig. 248

stîlpii să devină bare dublu articulate. Diagramele unitare m_{x1}, m_{x2} și m_{x3} sînt trasate în figura 248, *c-e*; diagramele m^0_{x1}, m^0_{x2} și m^0_{x3} sînt similare, dar fără efectul de ordinul II pe stîlpi. Coeficienții din ecuațiile de condiție, multiplicați cu constanta $6\,EI_c$, sînt

$$\delta_{11}=2\lambda_r[K\alpha(\nu_1)+1],\quad \delta_{22}=4\lambda_r,\quad \delta_{33}=2\lambda_r[K\alpha(\nu_2)+1],$$
$$\delta_{12}=\delta_{21}=\lambda_r,\quad \delta_{13}=\delta_{31}=0,\quad \delta_{23}=\delta_{32}=-2\lambda_r,$$

unde s-a utilizat notația $K=\lambda_s/\lambda_r=hI_r/lI_s$. Ecuația de stabilitate este

$$\begin{vmatrix} 2\,[K\alpha(\nu_1)+1] & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2\,[K\alpha(\nu_2)+1] \end{vmatrix}=0,$$

care după dezvoltare și aranjarea termenilor devine

$$8\,K^2\alpha(\nu_1)\cdot\alpha(\nu_2)+4\,K\alpha(\nu_1)+7\,K\alpha(\nu_2)+3=0$$

și poate fi aplicată oricare ar fi raportul sarcinilor axiale P_1 și P_2.

Admițînd de exemplu $P_1=P_2$ și deci $\nu_1=\nu_2=\nu$, de asemenea $K=\lambda_r/\lambda_s=1$, ecuația de stabilitate devine

$$8\,\alpha^2(\nu)+11\,\alpha(\nu)+3=[\alpha(\nu)+1]\,[8\,\alpha(\nu)+3]=0,$$

cu soluțiile $\alpha(\nu)=-1$ și $\alpha(\nu)=-3/8$, cărora le corespund factorii de compresiune $\nu=3{,}73=\nu_{cr}$ și $\nu=4{,}05$, deci $P_{cr}=3{,}73^2EI/h^2$.

3. Calculul de ordinul II și de stabilitate la grinzi continue

Rezolvarea grinzilor continue reprezintă un caz tipic pentru aplicarea metodei eforturilor. Fie cazul general al unei grinzi continue, din care se consideră o porțiune curentă cuprinzînd trei reazeme intermediare. Grinda este încărcată cu sarcini transversale și are forțe axiale puternice, constante pe fiecare deschidere în parte, dar diferite de la o deschidere la alta.

Se procedează la fel ca în statica liniară, cum s-a arătat în legătură cu figura 151. Sistemul de bază și diagramele unitare m_x și m_x^0, corespunzătoare fiecărei necunoscute, sînt arătate în figura 249. Ecuația de continuitate pe reazemul j are forma

$$\theta_{ji}M_i+\theta_{jj}M_j+\theta_{jk}M_k+\theta_{js}=0,$$

unde ținînd seama de prezența forțelor axiale prin intermediul coeficienților de corecție, se obțin următoarele expresii ale rotirilor unitare (multiplicate cu constanta $6EI_c$)

$$\theta_{ji}=\lambda_{ij}\beta(\nu_{ij}),\quad \theta_{jj}=2\,[\lambda_{ij}\,\alpha(\nu_{ij})+\lambda_{jk}\alpha(\nu_{jk})],\quad \theta_{jk}=\lambda_{jk}\,\beta(\nu_{jk}).$$

În aceleași condiții, pentru termenul liber se găsește

$$\theta_{js}=\lambda_{ij}m_j^{st}+\lambda_{jk}m_j^{dr},$$

unde intervin caracteristicile de încărcare stabilite în condițiile calculului de ordinul II și care sînt date în tabela 10. Ecuația celor trei momente are deci forma

$$\lambda_{ij}\beta(\nu_{ij})M_i+2\,[\lambda_{ij}\,\alpha(\nu_{ij})+\lambda_{jk}\,\alpha(\nu_{jk})]M_j+\lambda_{jk}\,\beta(\nu_{jk})M_k+\lambda_{ij}\,m_j^{st}+\lambda_{jk}\,m_j^{dr}=0. \tag{15.38}$$

Se scrie cîte o ecuație pentru fiecare reazem intermediar, obținînd un sistem de ecuații la care matricea coeficienților are numai cîte trei elemente diferite de zero pe fiecare linie, formînd o bandă de această lățime în lungul diagonalei principale.

În cazul *verificării de stabilitate* intervine numai această matrice și ecuația de stabilitate are forma $D[\theta]=0$. În paralel, trebuie urmărită și posibilitatea ca valoarea $(\nu_{cr})_{min}$ să fie dată de o soluție banală. Fie de exemplu grinda continuă pe două deschideri din figura 250, *a*, pentru care ecuația de stabilitate se reduce la condiția $\theta_{22}=0$, anume

$$\lambda_{12}\alpha(\nu_{12})+\lambda_{23}\alpha(\nu_{23})=0, \quad \text{sau} \quad \alpha(\nu)+K\alpha(\mu\nu)=0,$$

unde s-au introdus notațiile $K=\lambda_{23}/\lambda_{12}$, $\nu_{12}=\nu$ și $\nu_{23}=\mu\nu$, în care μ are expresia (15.36). Pentru diferite cazuri particulare, ecuația se rezolvă prin încercări și conduce la valori ν_{cr} ce presupun că soluția banală a fost eliminată, deci că $M_2\neq 0$. Înseamnă că cele două deschideri se influențează reciproc.

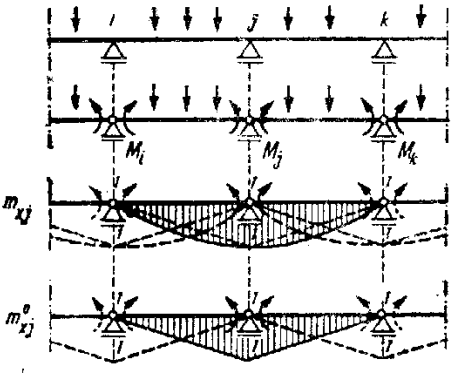


Fig. 249

Astfel, dacă $l_{12}=l_{23}=l$, $I_{12}=I_{23}$ și $N_{12}=N_{23}=P$, deci $\nu_{12}=\nu_{23}=\nu$, ecuația devine $\alpha(\nu)=0$ cu soluția $\nu=4{,}49$, căreia îi corespunde deformata critică simetrică din figura 250, *b*, în care fiecare deschidere se comportă ca perfect încastrată în *2*. Aceasta nu este însă soluția corespunzătoare sarcinii critice minime, deoarece deformatei critice antisimetrice din figura 250, *c*, la care $M_2=0$, îi corespunde valoarea mai mică $\nu=\pi$. Această deformată critică este identică cu a sistemului de bază, la care în secțiunea *2* este introdusă o articulație.

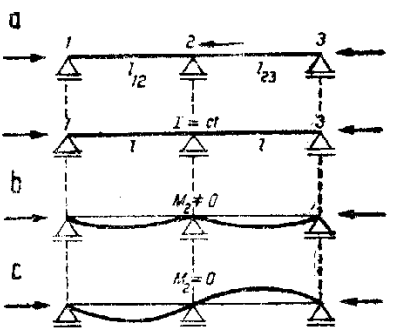


Fig. 250

O imagine sugestivă a acestei situații se obține comparînd cu formele proprii succesive ale unei bare puternic comprimate (fig. 251, *a*). Se vedea astfel că forma proprie ce corespunde sarcinii critice $P^{(3)}_{cr}$ are două puncte de inflexiune la treimile deschiderii, unde $M=0$, iar secțiunile respective au săgeată nulă. Desigur, această configurație nu poate fi obținută pentru bara considerată, care își pierde de fapt stabilitatea pentru $P^{(1)}_{cr}$. Aceeași formă proprie apare ca deformată critică pentru grinda continuă cu trei deschideri din figura 251, *b*, la care prezența reazemelor simple asigură realizarea acestei forme, deși necunoscutele suplimentare sînt nule pentru oricare dintre sistemele de bază arătate în figura 251, *b*.

Explicația constă în faptul că fiecare deschidere își pierde *concomitent* stabilitatea ca o bară dublu articulată. Pentru aceasta grinda trebuie să îndeplinească anumite condiții în raport cu sarcinile axiale date. În cazul general,

condiția este ca forțele axiale din deschideri să fie *în același raport* ca sarcinile critice respective. Astfel, pentru două deschideri $i-j$ și $j-k$

$$(P_{ij})_{cr}=\frac{\pi^2 EI_{ij}}{l_{ij}^2},\quad (P_{jk})_{cr}=\frac{\pi^2 EI_{jk}}{l_{jk}^2},\quad \text{deci}\quad \frac{N_{ij}}{N_{jk}}=\frac{I_{ij}}{I_{jk}}\left(\frac{l_{jk}}{l_{ij}}\right)^2, \tag{15.39}$$

relație care arată că cele două deschideri trebuie să aibă *același factor de compresiune* ν. Cînd condiția este îndeplinită pe toate deschiderile, trebuie luată

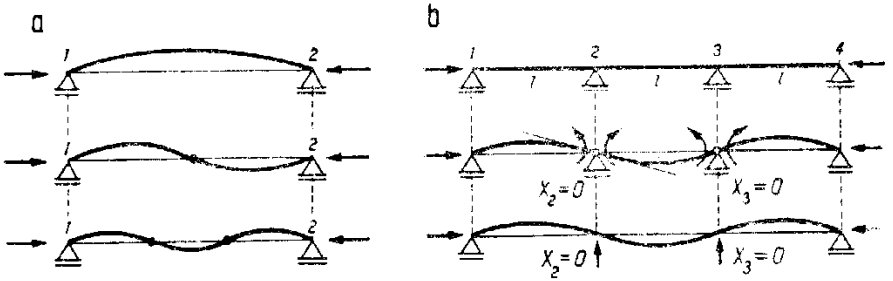


Fig. 251

în considerare soluția banală; în caz contrar, se aplică ecuația de stabilitate $D[\theta]=0$.

În ceea ce privește *calculul de ordinul II* al grinzii continue, urmează să se aplice ecuația celor trei momente (15.38) în toate reazemele intermediare.

Pentru exemplificare, fie grinda continuă puternic comprimată din figura 252, pentru care se va examina atît calculul de ordinul II, cît și verificarea de stabilitate. Pe baza datelor și admițînd $I_c=I$, se obține

$$\lambda_{12}=1{,}25\ l,\ \lambda_{23}=0{,}833\ l,\ \lambda_{34}=l,\ \nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{34}=l\sqrt{P/EI}=\nu,$$

deci toate deschiderile au același factor de compresiune. Grinda este de două ori static nedeterminată, astfel că sistemul ecuațiilor de condiție are forma

$$\begin{bmatrix}\theta_{22} & \theta_{23}\\ \theta_{32} & \theta_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_2\\ M_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\theta_{2s}\\ \theta_{3s}\end{bmatrix}=[0].$$

(a) *Verificarea de stabilitate.* Pornind de la matricea deplasărilor unitare, ecuația de stabilitate este

$$D[\theta]=\theta_{22}\theta_{33}-\theta_{23}^2=0,\ \text{unde}$$

$$\theta_{22}=2[1{,}25\ l\,\alpha(\nu)+0{,}833\ l\,\alpha(\nu)]=4{,}166\ l\,\alpha(\nu),$$

$$\theta_{33}=2[0{,}833\ l\,\alpha(\nu)+l\,\alpha(\nu)]=3{,}666\ l\,\alpha(\nu),\ \theta_{23}=\theta_{32}=0{,}833\ l\,\beta(\nu),$$

astfel că rezultă

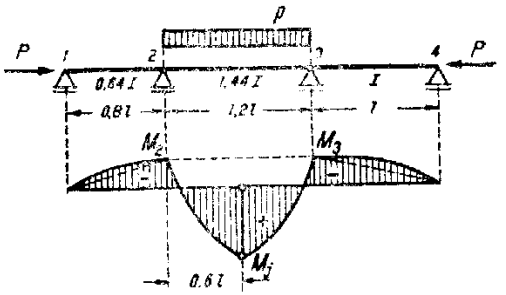
$$15{,}3\ \alpha^2(\nu)-0{,}694\ \beta^2(\nu)=0,\ \text{sau}\ \alpha(\nu)=\pm 0{,}213\ \beta(\nu),$$

care prin încercări conduce la soluția utilă $\nu=3{,}91$. Trebuie verificată și condiția (15.39), care ce referă la posibilitatea soluției banale. Condiția este îndeplinită deoarece toate deschiderile au același ν; înseamnă că pierderea de stabilitate se produce pentru $\nu=\pi$ și deci $P_{cr}=\pi^2 EI/l^2$.

(b) *Calculul de ordinul II.* Este necesar ca forța axială să fie cunoscută. Pentru compararea efectelor, se consideră cîteva situații, arătate în tabela din figură.

Fie cazul $P=P_{cr}/2{,}5$ și deci $\nu=\nu_{cr}/2{,}5=3{,}14/1{,}58=1.97$. Pentru această valoare a factorului de compresiune, din tabele se obține

$$\alpha(\nu)=1{,}4167 \text{ și } \beta(\nu)=1{,}7621$$



P/P_{cr}	M_2	M_j	M_3	
1/2,5	−0,065	+0,261	−0,077	$\cdot pl^2$
1/5,75	−0,063	+0,150	−0,075	
0	−0,058	+0,116	−0,069	

Fig. 252

care introduse în expresiile stabilite mai sus pentru elementele matricei coeficienților, conduc la valorile (multiplicate cu $6EI$)

$$\theta_{22}=5{,}9\ l,\quad \theta_{33}=5{,}2\ l,\quad \theta_{23}=\theta_{32}=1{,}47\ l.$$

Se calculează totodată caracteristicile de încărcare pentru deschiderea centrală, utilizînd expresia corespunzătoare sarcinii uniform distribuite din tabela 10

$$m_2^{st}=m_2^{dr}=pl^2\cdot\frac{1{,}2^2}{4}\cdot\frac{3\cdot 8}{1{,}97^3}(1{,}513-0{,}985)=0{,}595\ pl^2,$$

astfel că termenii liberi au valorile (de asemenea multiplicate cu $6EI$)

$$\theta_{2s}=\theta_{3s}=\lambda_{23}\cdot m_2=0{,}495\ pl^2.$$

Introducînd în ecuațiile de condiție și rezolvînd, se obține $M_2=-0{,}065\ pl^2$ și $M_3=-0{,}077\ pl^2$.

Pentru trasarea diagramei totale de momente încovoietoare este necesar să se determine M_{max} în deschiderea *2-3* considerată ca simplu rezemată, utilizînd relația (15.20); rezultă

$$M_{max}=\frac{pl_{23}^2}{8}\cdot\frac{2}{u^2}\left|\frac{1}{\cos u}-1\right|=0{,}332\ pl^2$$

și deci momentul încovoietor la mijlocul deschiderii centrale a grinzii continue este

$$M_j=0{,}332\ pl^2+(M_2+M_3)/2=0{,}261\ pl^2.$$

În tabela din figură sînt date și rezultatele calculului pentru alte două cazuri. Compararea arată că efectul asupra momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazeme este redus, în schimb apar diferențe importante în secțiunea de la mijlocul deschiderii centrale, care se accentuează rapid odată cu creșterea sarcinii axiale.

4. Simplificări la structuri simetrice

În calculul de ordinul II și de stabilitate al structurilor, noțiunea de simetrie se completează și cu condiția *simetriei de încărcare pentru barele puternic comprimate*, deoarece la aplicarea metodelor de rezolvare bazate pe suprapunerea

de efecte se admite că factorii de compresiune reprezintă constante ale acestor bare, care trebuie să fie dispuse simetric. Numai în aceste condiții se obțin simplificările discutate în legătură cu figura 147 și rezolvarea se poate conduce pe substructuri.

Spre deosebire de statica liniară, sub încărcare simetrică *deformata critică poate avea configurație simetrică sau antisimetrică.* Această proprietate se justifică adoptînd aceeași aranjare a sistemului ecuațiilor de condiție ca la stabilirea relației (9.52). Sistemul de bază se alege simetric, respectînd condițiile examinate în legătură cu figura 244. Se utilizează numai necunoscute simetrice și antisimetrice, aceasta rezultînd fie direct prin trecerea la sistemul de bază, fie prin grupări de necunoscute simetrice și antisimetrice. Notînd necunoscutele simetrice cu $X_1, \dots X_p$ și necunoscutele antisimetrice cu $X_q, \dots X_n$ (numerotate în această ordine), ecuațiile de condiție $\boldsymbol{\delta}\mathbf{X}=0$ se reduc la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta}^{(a)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(s)} \\ \mathbf{X}^{(a)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = [0], \tag{15.40}$$

unde apar submatricele de deplasări unitare

$$\boldsymbol{\delta}^{(s)} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots \delta_{1p} \\ \vdots & \vdots \\ \delta_{p1} & \cdots \delta_{pp} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \boldsymbol{\delta}^{(a)} = \begin{bmatrix} \delta_{qq} & \cdots \delta_{qn} \\ \vdots & \vdots \\ \delta_{nq} & \cdots \delta_{nn} \end{bmatrix},$$

prima cuprinzînd coeficienții la care ambii indici se referă la necunoscute simetrice, iar a doua — la necunoscute antisimetrice.

Ecuația de stabilitate $D[\boldsymbol{\delta}]=0$ se scrie în acest caz

$$D[\boldsymbol{\delta}] = \begin{vmatrix} D[\boldsymbol{\delta}^{(s)}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D[\boldsymbol{\delta}^{(a)}] \end{vmatrix} = D[\boldsymbol{\delta}^{(s)}] \cdot D[\boldsymbol{\delta}^{(a)}] = 0,$$

care se descompune în două ecuații de stabilitate distincte

$$D[\boldsymbol{\delta}^{(s)}]=0 \qquad \text{și} \qquad D[\boldsymbol{\delta}^{(a)}]=0. \tag{15.41}$$

Prima presupune că necunoscutele simetrice sînt diferite de zero și deci corespunde unei deformate critice simetrice, iar a doua presupune că necunoscutele antisimetrice sînt diferite de zero și deci corespunde unei deformate critice antisimetrice. Este deci necesar să se examineze *ambele forme* și să se determine mărimile corespunzătoare ale parametrului critic, dintre care se reține cea mai mică.

Se ajunge la concluzia că, pentru verificarea la stabilitate a unei structuri simetrice și simetric încărcate, este necesar să se efectueze două rezolvări distincte: una considerînd o deformată critică simetrică și alta — o deformată critică antisimetrică. Aceasta revine la *a studia pierderea de stabilitate a celor două semistructuri*, reținînd pe cea mai dezavantajoasă. De obicei, la cadre cu noduri fixe mai defavorabilă se dovedește deformata critică simetrică, iar la cadre cu noduri deplasabile — cea antisimetrică.

Pentru exemplificare, fie cadrul portal din figura 253, *a*, la care s-au indicat cele două deformate critice, precum și semistructurile corespunzătoare. Fiecare dintre acestea se studiază separat.

Deformata simetrică. Semistructura este de două ori static nedeterminată și sistemul de bază este arătat în figura 253, *b*, de asemenea diagramele unitare m_{x1} și m_{x2}; diagramele m^0_{x1} și m^0_{x2} sînt similare, dar fără efectul de ordinul II pe stîlp. Se obține

$$\delta_{11}=2\lambda_s\,\alpha(\nu),\quad \delta_{22}=2\lambda_s\,\alpha(\nu)+3\lambda_r,\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\lambda_s\,\beta(\nu)$$

și deci ecuația de stabilitate are forma

$$D[\delta]=\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2=0,\quad \text{sau}\quad 2\alpha(\nu)\,[2\,\alpha(\nu)+3\mathrm{K}]-\beta^2(\nu)=0,$$

unde s-a notat $\mathrm{K}=\lambda_r/\lambda_s$ raportul lungimilor transformate ale riglei și stîlpilor.

Deformata antisimetrică. Semistructura este o singură dată static nedeterminată și sistemul de bază este arătat în figura 253, *c*, de asemenea diagrama m_{x1}; pentru m^0_{x1} nu mai apare efectul de ordinul II pe stîlp. Se obține

$$\delta_{11}=2\lambda_s\left[\gamma_1(\nu)+\gamma_2(\nu)+\gamma_3(\nu)\right]+\lambda_r$$

și ecuația de stabilitate este în acest caz

$$\gamma_1(\nu)+\gamma_2(\nu)+\gamma_3(\nu)+0{,}5\mathrm{K}=0.$$

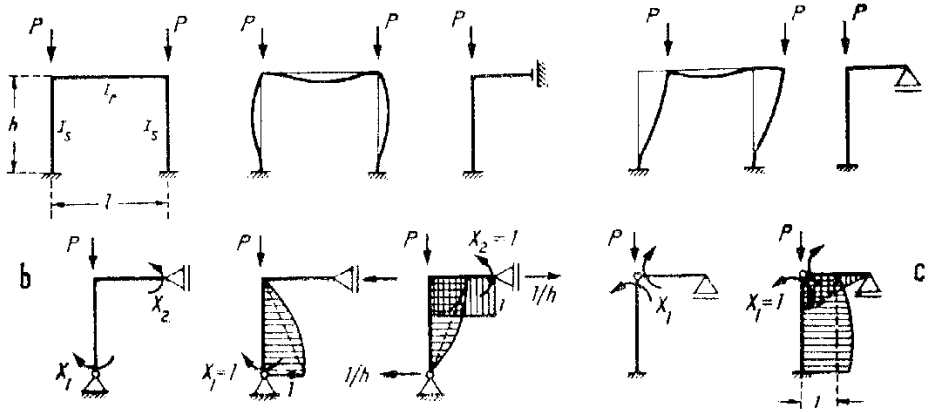


Fig. 253

Pentru compararea celor două posibilități de pierderea stabilității, fie cazul concret $h=l$ și $I_r=I_s$, deci $\mathrm{K}=1$. Rezultă următoarele ecuații de stabilitate, care se rezolvă prin încercări:

— deformata simetrică

$$2\,\alpha(\nu)[2\,\alpha(\nu)+3]-\beta^2(\nu)]=0,\ \text{cu soluția}\ \nu=5{,}02$$

— deformata antisimetrică

$$\gamma_1(\nu)+\gamma_2(\nu)+\gamma_3(\nu)+0{,}5=0,\ \text{cu soluția}\ \nu=2{,}71=\nu_{cr}.$$

Rezultă că pierderea de stabilitate se produce după deformata antisimetrică, ceea ce era evident de la început comparînd cele două deformate din figura 253, *a*. Într-adevăr, la prima stîlpul se situează între cazurile *2* și *3* din tabela 9, în timp ce la a doua se situează între cazurile *4* și *5*.

E. APLICAREA METODEI DEPLASĂRILOR

1. Condiții de aplicare

Asemănător metodei eforturilor, și metoda deplasărilor este specifică staticii liniare, avînd la bază suprapunerea de efecte, care conduce la ecuațiile de condiție (12.1). Posibilitatea de extindere a aplicării metodei în calculul de ordinul II și de stabilitate este condiționată de acceptarea aceleiași ipoteze, anume că în barele puternic comprimate forțele axiale rămîn constante. Factorii de compresiune $\nu = l\sqrt{N/EI}$ sînt considerați pe tot parcursul calculului drept constante ale acestor bare, astfel că suprapunerea se referă numai la sarcinile transversale. În ceea ce privește încadrarea unei bare în categoria barelor puternic comprimate, se admite și aici criteriul $\nu \geqslant 0{,}2\,\nu_{cr}$.

Concepția și formularea generală a metodei deplasărilor, care au fost examinate anterior în capitolul XII, rămîn în întregime aplicabile și pentru calculul de ordinul II, urmînd ca la barele puternic comprimate să se introducă corecțiile date de forțele axiale raportate la poziția deformată. Sistemul de bază se obține blocînd deplasările nodurilor. Alegînd drept necunoscute geometric nedeterminate rotirile de noduri și parametrii gradelor de libertate, se introduc în fiecare nod blocări contra rotirii și blocări contra deplasării pentru grupele de noduri ce intervin la fiecare dintre gradele de libertate elastică ale structurii, cum s-a indicat în figura 178.

Prin introducerea blocărilor, barele componente ale structurii se separă între ele, încadrîndu-se în cazuri tip atît în ceea ce privește condițiile de rezemare, cît și modul de încărcare cu necunoscute; se regăsește în totul situația discutată în legătură cu figura 180. Tipurile respective de bare sînt static nedeterminate și deci trebuie rezolvate pentru încărcare cu sarcini și cu deplasări. Se procedează la fel ca în statica liniară, rezolvînd barele puternic comprimate cu ajutorul metodei eforturilor, pentru a obține eforturile de capăt. Această problemă face obiectul paragrafelor următoare, sistematizînd rezultatele prin introducerea unor coeficienți de corecție, în funcție de factorii de compresiune ν, care se găsesc întabulați în literatura de specialitate.

Spre deosebire de metoda eforturilor, la aplicarea metodei deplasărilor în calculul de ordinul II nu există restricții în ceea ce privește sistemul geometric determinat de bază. Se știe că acest sistem este unic pentru o structură dată, iar în cazurile tip de bare puternic comprimate ce intervin există rezolvări complete. În consecință, metoda se poate aplica oricărei structuri cu noduri rigide și totodată oferă largi posibilități de sistematizare. În fapt, se pot utiliza și aici toate procedeele de calcul care au fost examinate în capitolele XII și XIII.

Aceste avantaje ale metodei deplasărilor, precum și altele ce vor fi arătate mai departe, fac ca această metodă să fie indicată și pentru extinderea automatizării rezolvării în probleme de stabilitate și de calcul de ordinul II.

2. Cazuri tip de încărcare cu deplasări

Pentru simplificare, se consideră bare puternic comprimate cu secțiune constantă și se reține numai două condiții de rezemare la extremitatea opusă nodului: încastrare ($\eta_k=1$) și articulație ($\eta_k=0$). În fiecare caz, se urmărește sistematizarea expresiilor eforturilor de capăt pentru încărcarea cu rotire de nod și cu rotire de bară, privindu-le drept cedări de reazeme la aplicarea metodei eforturilor.

a. **Bară cu articulație la capătul opus.** Bara este o singură dată static nedeterminată și ecuația de condiție se scrie

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1c}=0, \qquad \text{unde} \qquad 6EI\,\delta_{11}=2\,l\,\alpha(\nu),$$

așa cum rezultă considerînd sistemul de bază și diagramele unitare m_{xi} și m^0_{xi} din figura 254, *c*. Rămîne să se introducă termenul liber Δ_{1c}.

(1) *Încărcare cu rotire de nod* (fig. 254, *a*). Termenul liber este în acest caz $\Delta_{1c}=-\theta_j$ și ecuația devine

$$2\,l\,\alpha(\nu)X_1-6EI\,\theta_j=0,$$

deci
$$X_1=M_{jk}=3Ei\,\frac{1}{\alpha(\nu)}\,\theta_j=3Ei\,\varphi_0(\nu)\,\theta_j$$

unde
$$i=\frac{I}{l} \qquad \text{și} \qquad \varphi_0(\nu)=\frac{1}{\alpha(\nu)}=\frac{\nu^2}{3}\cdot\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\nu-\nu}. \tag{15.42}$$

Dacă momentul de capăt se exprimă în funcție de rotirea de nod sub forma (12.4), în care apare coeficientul de rigiditate la rotire de nod, se obține

$$M_{jk}=4E\rho_{jk}\,\theta_j, \qquad \text{unde} \qquad \rho_{jk}=\frac{3\,i}{4}\varphi_0(\nu). \tag{15.43}$$

Forța tăietoare în extremitatea j este

$$T_{jk}=-M_{jk}/l=-\frac{3\,Ei}{l}\,\varphi_0(\nu)\,\theta_j. \tag{15.44}$$

(2) *Încărcare cu rotire de bară* (fig. 254, *b*). Termenul liber este $\Delta_{1c}=\psi_{jk}$ și ecuația de condiție devine

$$2\,l\,\alpha(\nu)X_1+6EI\,\psi_{jk}=0, \quad \text{deci}$$

$$X_1=M_{jk}=-3\,Ei\,\varphi_0(\nu)\,\psi_{jk}=-4\,E\,\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk}, \text{ unde } \bar{\rho}_{jk}=\frac{3\,i}{4}\varphi_0(\nu) \tag{15.45}$$

este coeficientul de rigiditate la rotire de bară.

La evaluarea forței tăietoare trebuie ținut seama că, în poziția deformată, intervine și momentul dat de sarcina axială P, anume

$$T_{jk}l = M_{jk} + P\Delta, \quad \text{unde} \quad P = EIk^2 = EI\,\nu^2/l^2 = Ei\,\nu^2/l,$$

deci

$$T_{jk} = \left|\frac{3\,Ei}{l}\varphi_0(\nu) - P\right|\psi_{jk} - \frac{3\,Ei}{l}\left|\varphi_0(\nu) - \frac{\nu^2}{3}\right|\psi_{jk},$$

care se mai poate scrie

$$T_{jk} = \frac{3\,Ei}{l}\eta_0(\nu)\psi_{jk}, \quad \text{unde} \quad \eta_0(\nu) = \varphi_0(\nu) - \frac{\nu^2}{3}. \tag{15.46}$$

Din expresiile stabilite, se constată că la acest tip de bară intervin *doi* coeficienți de corecție în funcție de factorul de compresiune ν, anume $\varphi_0(\nu)$ și $\eta_0(\nu)$

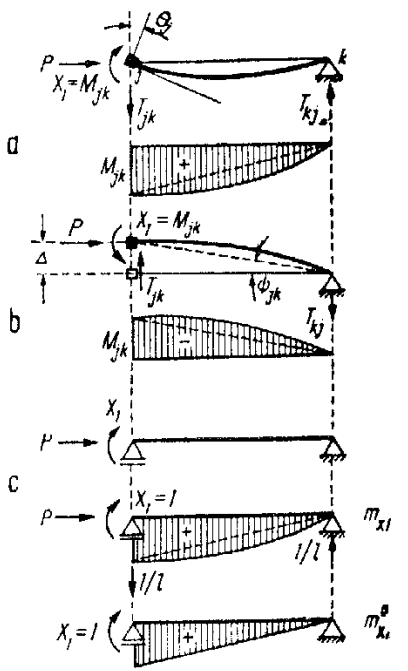


Fig. 254

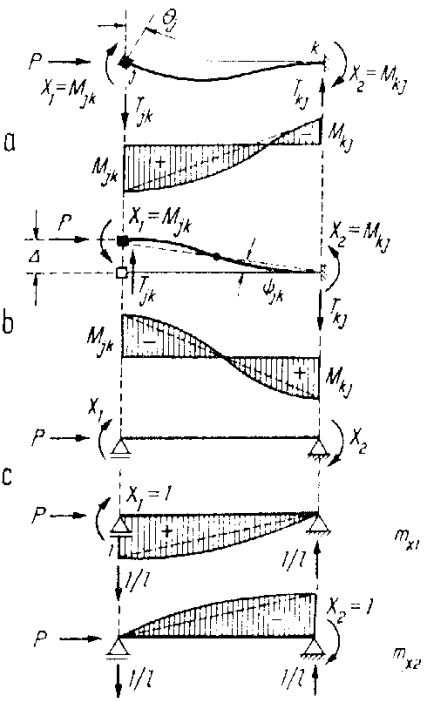


Fig. 255

b. **Bară cu încastrare la capătul opus.** Bara este de două ori static nedeterminată și expresiile necunoscutelor au forma (9.27)

$$X_1 = -(\delta_{22}\Delta_{1c} - \delta_{12}\Delta_{2c})/D \qquad \text{și} \qquad X_2 = -(\delta_{11}\Delta_{2c} - \delta_{21}\Delta_{1c})/D,$$

unde $D = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2$, așa cum rezultă utilizînd sistemul de bază din figura 255, *c* și diagramele unitare m_{x1}, m_{x2}, respectiv m^0_{x1}, m^0_{x2} (aceleași, dar fără

efectul de ordinul II). Cu aceste diagrame se obțin mărimile deplasărilor unitare (multiplicate cu $6EI$)

$$\delta_{11}=\delta_{22}=2l\,\alpha(\nu) \qquad \text{și} \qquad \delta_{12}=\delta_{21}=-\,l\,\beta(\nu).$$

Rămîne să se introducă termenii liberi Δ_{1c} și Δ_{2c}, care au forma generală (9.8), anume $\Delta_{ic}=-\sum \bar{r}_i\Delta_r$.

(1) *Încărcare cu rotire de nod* (fig. 255, *a*). Termenii liberi sînt în acest caz $\Delta_{1c}=-\theta_j$ și $\Delta_{2c}=0$; introducînd în expresiile necunoscutelor, rezultă

$$X_1=M_{jk}=4Ei\,\frac{3\,\alpha(\nu)}{4\alpha^2(\nu)-\beta^2(\nu)}\,\theta_j \qquad \text{și} \qquad X_2=M_{kj}=2Ei\,\frac{3\,\beta(\nu)}{4\,\alpha^2(\nu)-\beta^2(\nu)}\,\theta_j,$$

care se mai pot scrie sub forma

$$M_{jk}=4Ei\,\varphi'(\nu)\,\theta_j \qquad \text{și} \qquad M_{kj}=2Ei\,\varphi''(\nu)\,\theta_j, \tag{15.47}$$

unde s-au introdus coeficienții de corecție

$$\varphi'(\nu)=\frac{3\,\alpha(\nu)}{4\,\alpha^2(\nu)-\beta^2(\nu)}=\frac{1-\dfrac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}}{4\left[\dfrac{\operatorname{tg}u}{u}-1\right]} \quad \text{și} \quad \varphi''(\nu)=-\frac{3\,\beta(\nu)}{4\,\alpha^2(\nu)-\beta^2(\nu)}=-\frac{\dfrac{\nu}{\sin\nu}-1}{2\left[\dfrac{\operatorname{tg}u}{u}-1\right]}, \tag{15.48}$$

exprimați în funcție de ν și $u=\nu/2$, la stabilirea cărora s-a ținut seama de expresiile (15.31) pentru $\alpha(\nu)$ și $\beta(\nu)$. Introducînd și aici exprimarea în funcție de coeficienți de rigiditate și factori de transmitere, anume

$$M_{jk}=4E\,\rho_{jk}\,\theta_j \qquad \text{și} \qquad M_{kj}=4E\,\rho_{jk}\,\mu_{jk}\,\theta_j,$$

se obține pentru bara cu secțiune constantă

$$\rho_{jk}=i\varphi'(\nu), \quad \rho_{jk}\mu_{jk}=\frac{i}{2}\,\varphi''(\nu), \quad \mu_{jk}=-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi''(\nu)}{\varphi'(\nu)}. \tag{15.49}$$

Forța tăietoare în extremitatea j are mărimea

$$T_{jk}=-\frac{M_{jk}+M_{kj}}{l}=-\frac{6Ei}{l}\cdot\frac{1}{3}\,[2\varphi'(\nu)+\varphi''(\nu)]\theta_j$$

și introducînd în paranteză expresiile (15.48), rezultă

$$T_{jk}=-\frac{6Ei}{l}\,\varphi(\nu)\theta_j, \quad \text{unde} \quad \varphi(\nu)=\frac{1}{3}\,[2\varphi'(\nu)+\varphi''(\nu)]=\frac{u^2}{3}\,\frac{\operatorname{tg}u}{\operatorname{tg}u-u} \tag{15.50}$$

reprezintă un al treilea coeficient de corecție. Comparînd cu expresia (15.42), se constată că $\varphi(\nu)=\varphi_0(u)$.

(2) *Încărcare cu rotire de bară* (fig. 255, *b*). Datorită antisimetriei, acest caz se poate reduce la cel din figura 254, *b*, considerînd deschiderea pe jumătate. Se obține deci

$$M_{jk}=M_{kj}=-4E\,\bar{\rho}_{jk}\,\psi_{jk}=-4E\,\bar{\rho}_{kj}\,\psi_{jk}, \quad \text{unde}$$

$$\bar{\rho}_{jk}=\bar{\rho}_{kj}=\frac{3i}{2}\,\varphi_0\left(\frac{\nu}{2}\right)=\frac{3i}{2}\,\varphi_0(u)=\frac{3i}{2}\,\varphi(\nu), \tag{15.51}$$

unde intervine același coeficient de corecție dat de relația (15.50).

La forța tăietoare apare și aici corecția datorită efectului sarcinii axiale în poziția deformată

$$T_{jk}l=M_{jk}+M_{kj}+P\Delta, \quad \text{unde} \quad P=EIk^2=Ei\nu^2/l,$$

deci
$$T_{jk}=\left|\frac{12\,Ei}{l}\varphi(\nu)-P\right|\psi_{jk}=\frac{12\,Ei}{l}\left|\varphi(\nu)-\frac{\nu^2}{12}\right|\psi_{jk},$$

care se mai poate scrie

$$T_{jk}=\frac{12\,Ei}{l}\eta(\nu)\,\psi_{jk}, \quad \text{unde} \quad \eta(\nu)=\varphi(\nu)-\frac{\nu^2}{12}. \tag{15.52}$$

Comparînd cu expresia (15.46), rezultă $\eta(\nu)=\eta_0(u)$.

Din expresiile stabilite, se constată că pentru acest tip de bară intervin *patru* coeficienți de corecție în funcție de factorul de compresiune ν, anume $\varphi'(\nu)$, $\varphi''(\nu)$, $\varphi(\nu)$ și $\eta(\nu)$.

În tabela 12 sînt sintetizate rezultatele obținute pentru încărcarea cu deplasări la cele două tipuri de bare considerate, indicîndu-se comparativ coeficienții de rigiditate cunoscuți din statica liniară, cu cei corespunzători barelor puternic comprimate. Se dau de asemenea și expresiile coeficienților de corecție[1].

În tabelă s-a mai înscris un caz ce apare la structuri cu noduri deplasabile cînd în alcătuirea acestora apar și bare dublu articulate. Datorită raportării sarcinii axiale la poziția deplasată, pentru echilibru este necesar ca în extremități să se introducă și forțe tăietoare (normale pe axa inițială a barei).

Pe baza expresiilor din tabelă, se poate considera cazul general al unei bare puternic comprimate din sistemul de bază al metodei deplasărilor, încărcată cu rotiri de nod și de bară, precum și cu sarcini, stabilind pentru momentele de capăt expresii similare cu (12.8)—(12.9). Pentru coeficienții de rigiditate și pentru deplasări se consideră mărimi corectate sub forma

$$\rho'=\frac{I_c}{I_c}\rho, \quad \theta'=4E\frac{I_c}{l_c}\theta, \quad \psi'=4E\frac{I_c}{l_c}\psi,$$

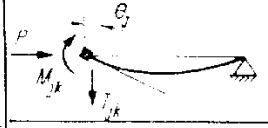
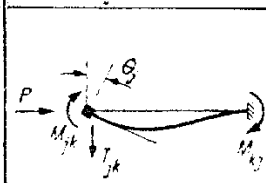
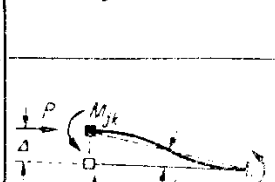
asemănător ca în expresiile (12.34). Pentru o bară cu secțiune constantă se scrie:

— Bară cuprinsă între două noduri

$$\begin{aligned}
M_{jk}&=\rho'_{jk}\theta'_j+\rho'_{kj}\mu_{kj}\theta'_k-\bar{\rho}'_{jk}\psi'_{jk}+\mathfrak{M}_{jk}=\\
&=i'_{jk}\left[\varphi'(\nu)\,\theta'_j+\frac{1}{2}\varphi''(\nu)\,\theta'_k-\frac{3}{2}\varphi(\nu)\,\psi'_{jk}\right]+\mathfrak{M}_{jk},\\
M_{kj}&=\rho'_{jk}\mu_{jk}\theta'_j+\rho'_{kj}\theta'_k-\bar{\rho}'_{kj}\psi'_{jk}+\mathfrak{M}_{kj}=\\
&=i'_{jk}\left[\frac{1}{2}\varphi''(\nu)\,\theta'_j+\varphi'(\nu)\,\theta'_k-\frac{3}{2}\varphi(\nu)\,\psi'_{jk}\right]+\mathfrak{M}_{kj}.
\end{aligned} \tag{15.53}$$

[1] Tabele pentru acești coeficienți sînt reproduse în lucrarea menționată la pagina 542, unde sînt notați cu $\varkappa^0$, η_0 și respectiv $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa$, η.

Coeficienți de rigiditate la bare puternic comprimate

	Caz tip	Momente de capăt	$P=0$	$P\neq 0$	T_{jk}	Coeficienți de corecție
1		$M_{jk}=4E\,\rho_{jk}\,\theta_j$	$\rho_{jk}=\dfrac{3\,i}{4}$	$\bar{\rho}_{jk}=\dfrac{3\,i}{4}\,\varphi_0(\nu)$	$T_{jk}=-\dfrac{3Ei}{l}\,\varphi_0(\nu)\,\theta_j$	$\varphi_0(\nu)=\dfrac{\nu^2}{3}\cdot\dfrac{tg\,\nu}{tg\,\nu-\nu}$
2		$M_{jk}=-4E\bar{\rho}_{jk}\,\psi_{jk}$	$\rho_{jk}=\dfrac{3\,i}{4}$	$\bar{\rho}_{jk}=\dfrac{3\,i}{4}\,\varphi_0(\nu)$	$T_{jk}=\dfrac{3Ei}{l}\,\eta_0(\nu)\,\psi_{jk}$	$\eta_0(\nu)=\varphi_0(\nu)-\dfrac{\nu^2}{3}$
3		$M_{jk}=4E\rho_{jk}\,\theta_j$ $M_{kj}=4E\rho_{jk}\mu_{jk}\,\theta_j$	$\rho_{jk}=i$ $\rho_{jk}\mu_{jk}=\dfrac{i}{2}$	$\bar{\rho}_{jk}=i\,\varphi'(\nu)$ $\rho_{jk}\mu_{jk}=\dfrac{i}{2}\,\varphi''(\nu)$	$T_{jk}=-\dfrac{6\,Ei}{l}\,\varphi(\nu)\,\theta_j$	$\varphi'(\nu)=\dfrac{1-\dfrac{tg\,\nu}{\nu}}{4\left\lvert\dfrac{tg\,u}{u}-1\right\rvert}$ $\varphi''(\nu)=\dfrac{\dfrac{\nu}{\sin\nu}-1}{2\left\lvert\dfrac{tg\,u}{u}-1\right\rvert}$
4		$M_{jk}=-4E\bar{\rho}_{jk}\,\psi_{jk}$ $M_{kj}=-4E\bar{\rho}_{kj}\,\psi_{jk}$	$\bar{\rho}_{jk}=\bar{\rho}_{kj}=\dfrac{3\,i}{2}$	$\bar{\rho}_{jk}=\bar{\rho}_{kj}=\dfrac{3\,i}{2}\,\varphi(\nu)$	$T_{jk}=\dfrac{12\,Ei}{l}\,\eta_1(\nu)\,\psi_{jk}$	$\varphi(\nu)=\dfrac{u^2}{3}\cdot\dfrac{tg\,u}{tg\,u-u}=\varphi_0(u)$ $\eta_1(\nu)=\varphi(\nu)-\dfrac{\nu^2}{12}=\eta_0(u)$
5		—	—	—	$T_{jk}=-\dfrac{Ei}{l}\,\nu^2\,\psi_{jk}$	—

Notații: $i=I/l$, $k=\sqrt{P/EI}$, $\nu=kl$, $u=kl/2=\nu/2$.

— Bară cuprinsă între un nod și o rezemare

$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j-\bar{\rho}'_{jk}\psi'_{jk}+\mathfrak{M}_{jk}=i'_{jk}\left|\varphi'(\nu)\,\theta'_j-\frac{3}{2}\varphi(\nu)\psi'_{jk}\right|+\mathfrak{M}_{jk},\qquad(15.54)$$

$$M_{kj}=\rho'_{jk}u_{jk}\theta'_j-\bar{\rho}'_{kj}\psi'_{jk}+\mathfrak{M}_{kj}=i'_{jk}\left|\frac{1}{2}\varphi''(\nu)\,\theta'_j-\frac{3}{2}\varphi(\nu)\psi'_{jk}\right|+\mathfrak{M}_{kj},$$

în cazul cînd în extremitatea k este o încastrare și

$$M_{jk}=\rho'_{jk}\theta'_j-\bar{\rho}'_{jk}\psi'_{jk}+\mathfrak{M}_{jk}=-\frac{3}{4}i'_{jk}\,\varphi_0(\nu)\cdot(\theta'_j-\psi'_{jk})+\mathfrak{M}_{jk},$$

cînd în extremitate este articulație (reazem simplu).

Rămîne să se stabilească expresiile momentelor de încastrare perfectă $\mathfrak{M}$, corectate cu efectul de ordinul II.

3. Cazuri tip de încărcare cu sarcini

Se consideră aceleași tipuri de bare puternic comprimate, cu secțiune constantă și se determină momentele de încastrare perfectă produse în sistemul de bază, cînd pe aceste bare acționează tipurile uzuale de încărcări pentru care în tabela 10 sînt date caracteristicile de încărcare: sarcină uniform distribuită și sarcină concentrată.

a. **Bară cu articulație la capătul opus.** Se utilizează prima relație (15.35), impunînd condiția $\theta_j=0$ grinzii simplu rezemate din figura 243, *b*

$$\theta_j=\frac{l}{6EI}\left[2\alpha(\nu)M_{jk}+m_j\right]=0,\quad\text{deci}\quad\mathfrak{M}_{jk}=-\frac{m_j}{2}\cdot\frac{1}{\alpha(\nu)}=-\frac{m_j}{2}\varphi_0(\nu),\qquad(15.55)$$

care dă expresia generală a momentului de încastrare perfectă. Se obține:

— *Sarcină uniform distribuită*

$$m_j=\frac{pl^2}{1}\cdot\frac{3}{u^3}(\operatorname{tg}u-u),\quad\text{deci}\quad\mathfrak{M}_{jk}=-\frac{pl^2}{8}\cdot\frac{3}{u^3}(\operatorname{tg}u-u)\varphi_0(\nu).\qquad(15.56)$$

— *Sarcină concentrată*

$$m_j=P_i l\cdot\frac{6}{\nu^2}\left|\frac{\sin\beta\nu}{\sin\nu}-\beta\right|,\quad\text{deci}\quad\mathfrak{M}_{jk}=-P_i l\cdot\frac{3}{\nu^2}\left|\frac{\sin\beta\nu}{\sin\nu}-\beta\right|\varphi_0(\nu).\qquad(15.57)$$

Pentru $P_i=1$ se poate scrie

$$\mathfrak{M}_{jk}=-\omega l,\quad\text{unde}\quad\omega=\frac{3}{\nu^2}\left|\frac{\sin\beta\nu}{\sin\nu}-\beta\right|$$

reprezintă de fapt ecuația liniei de influență $\mathfrak{M}_{jk}$, în care poziția sarcinii-unitate este dată prin abscisa $b=\beta l$ față de extremitatea k. În literatura de specialitate se găsesc tabele pentru ω.

b. **Bară cu încastrare la capătul opus.** Se consideră ambele relații (15.35), în care semnul lui M_{kj} trebuie inversat spre a corespunde convenției de semne din metoda deplasărilor. Condițiile de continuitate în încastrările ce apar la ambele extremități ale barei din figura 243, *b* sînt $\theta_j=0$ și $\theta_k=0$, deci

$$2\alpha(\nu)M_{jk}-\beta(\nu)M_{kj}+m_j=0 \quad \text{și} \quad \beta(\nu)M_{jk}-2\alpha(\nu)M_{kj}+m_k=0,$$

care rezolvate în raport cu momentele de încastrare perfectă conduc la

$$\mathfrak{M}_{jk}=-\frac{2\alpha(\nu)m_j-\beta(\nu)m_k}{4\alpha^2(\nu)-\beta^2(\nu)} \quad \text{și} \quad \mathfrak{M}_{kj}=+\frac{2\alpha(\nu)m_k-\beta(\nu)m_j}{4\alpha^2(\nu)-\beta^2(\nu)},$$

ce se mai pot scrie sub forma

$$\mathfrak{M}_{jk}=-\frac{1}{3}[2\varphi'(\nu)m_j-\varphi''(\nu)m_k] \text{ și } \mathfrak{M}_{kj}=+\frac{1}{3}[2\varphi'(\nu)m_k-\varphi''(\nu)m_j], \quad (15.58)$$

unde s-au introdus coeficienții de corecție definiți prin relațiile (15.48). Este interesant să se compare aceste expresii ale momentelor de încastrare perfectă cu cele din statica liniară, date de relațiile (12.20). De reținut însă că aici caracteristicile de încărcare sînt cele din tabela 10; introducîndu-le în expresiile (15.58), se obține:

Sarcină uniform distribuită

$$\mathfrak{M}_{jk}=-\mathfrak{M}_{kj}=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{3}{u^3}[2\varphi'(\nu)-\varphi''(\nu)](\operatorname{tg}u-u).$$

— *Sarcină concentrată*

$$\mathfrak{M}_{jk}=-P_i l\cdot\frac{2}{\nu^2}\left[2\varphi'(\nu)\left(\frac{\sin\beta\nu}{\sin\nu}-\beta\right)-\varphi''(\nu)\left(\frac{\sin\alpha\nu}{\sin\nu}-\alpha\right)\right],$$
$$\mathfrak{M}_{kj}=+P_i l\cdot\frac{2}{\nu^2}\left[2\varphi'(\nu)\left(\frac{\sin\alpha\nu}{\sin\nu}-\alpha\right)-\varphi''(\nu)\left(\frac{\sin\beta\nu}{\sin\nu}-\beta\right)\right]. \quad (15.59)$$

Considerînd și aici $P_i=1$, aceste expresii se pot scrie sub forma

$$\mathfrak{M}_{jk}=-\omega_1 l \quad \text{și} \quad \mathfrak{M}_{kj}=+\omega_2 l, \quad (15.60)$$

unde ω_1 și ω_2 cuprind întreaga parte din expresiile (15.59) care este funcție de factorul de compresiune ν. Relațiile (15.60) reprezintă liniile de influență $\mathfrak{M}_{jk}$ și $\mathfrak{M}_{kj}$, unde poziția sarcinii-unitate este dată prin abscisele $a=\alpha l$ și $b=\beta l$; coeficienții ω_1 și ω_2 sînt dați în tabele[1], pentru o serie de valori ν.

4. Modalități de aplicare a metodei generale

Formarea ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor se face asemănător ca pentru calculul de ordinul I. Expresiile coeficienților și ale termenilor liberi rămîn cele stabilite în capitolul XII pentru cadre cu noduri fixe, cadre

[1] A se vedea de exemplu lucrarea menționată la pagina 542, unde acești coeficienți sînt reproduși după Kornoulhov.

etajate sau cadre de formă oarecare, cu deosebirea că se utilizează expresiile coeficienților de rigiditate sintetizați în tabela 12, în loc de cele din tabela 8.

O situație specială intervine numai la cadre cu noduri deplasabile, cînd ecuațiile gradelor de libertate sînt scrise *prin lucru mecanic virtual*, cum s-a arătat în legătură cu figura 188. Trebuie ținut seama că poziția de echilibru de la care se dă deplasarea virtuală este poziția deformată și deci apar corecții datorite

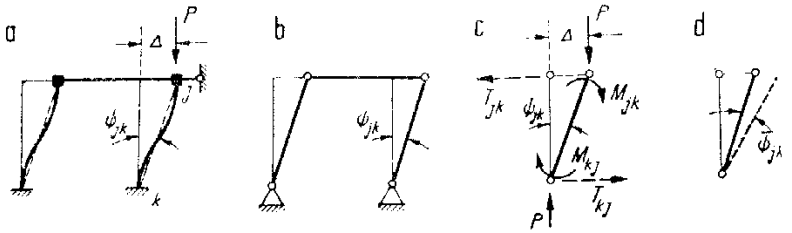


Fig. 256

sarcinilor axiale la bare puternic comprimate, cînd se consideră încărcarea sistemului de bază cu parametrii gradelor de libertate.

Fie în figura 256, *a* o deplasare elastică dată sistemului de bază, unde pentru bara puternic comprimată $j-k$ rezultă rotirea axei ψ_{jk}, iar în figura 256, *b* schema articulată corespunzătoare poziției deformate. Asupra barei $j-k$ din această schemă se consideră aplicate sarcinile axiale și momentele de capăt produse de deplasarea elastică (fig. 256, *c*), urmînd să se impună deplasarea virtuală sub forma unei rotiri suplimentare $\bar{\psi}_{jk}$ (fig. 256, *d*). Lucrul mecanic virtual este

$$L_{total} = L + \mathrm{d}L = (M_{jk} + M_{kj})\bar{\psi}_{jk} + P\Delta\bar{\psi}_{jk}, \quad \text{unde} \quad \mathrm{d}L = Pl\psi_{jk}\bar{\psi}_{jk}$$

reprezintă surplusul de lucru mecanic virtual datorat cuplului $P\Delta$. Pentru rotire ψ_{jk} pozitivă rezultă $M_{jk} = -4E\bar{\rho}_{jk}\psi_{jk}$ și $M_{kj} = -4E\bar{\rho}_{kj}\psi_{jk}$, deci expresia devine

$$L_{total} = -4E\left(\rho_{jk} + \rho_{kj} - \frac{Pl}{4E}\right)\psi_{jk}\bar{\psi}_{jk} = -\left[\bar{\rho}'_{jk} + \rho'_{kj} - \frac{\nu^2}{4}i'_{jk}\right]\psi'_{jk}\bar{\psi}_{jk}, \qquad (15.61)$$

unde s-au introdus mărimile corectate ρ' și ψ', de asemenea s-a ținut seamă că $P/EI = k^2$.

De reținut că expresia (15.61) intervine la calculul coeficienților de forma r_{il} și r_{ih} dați de relațiile (12.51) și (12.52), unde pentru barele puternic comprimate trebuie introdus în paranteze și cel de al treilea termen; de asemenea, ori de cîte ori intervine situația din figura 256, *c*, de exemplu la aplicarea procedeului de operare în două etape cînd se utilizează expresia (12.39) etc.

Pentru cazurile de bare examinate în figurile 254 și 255, introducînd expresiile lui ρ din tabela 12, se obține:

— *bară cu articulație la capătul opus*

$$L_{total} = -\frac{3}{4}i'_{jk}\left[\varphi_0(\nu) - \frac{\nu^2}{3}\right]\psi'_{jk}\bar{\psi}_{jk} = -\frac{3}{4}i'_{jk}\eta_0(\nu)\psi'_{jk}\bar{\psi}_{jk}, \qquad (15.62)$$

— *bară cu încastrare la capătul opus*

$$L_{total} = -3\, i'_{jk} \left| \varphi(\nu) - \frac{\nu^2}{12} \right| \psi'_{jk} \bar{\psi}_{jk} = -3\, i'_{jk}\, \eta_1(\nu)\, \psi'_{jk} \bar{\psi}_{jk}, \qquad (15.62')$$

unde intervin coeficienții de corecție $\eta_0(\nu)$ și $\eta_1(\nu)$[1].

Cînd structura dată ar conține și o bară puternic comprimată *dublu articulată*, pentru aceasta L este nul și deci L_{total} se reduce la ΔL, avînd mărimea

$$L_{total} = \Delta L = Pl\, \psi_{jk} \bar{\psi}_{jk} = \frac{\nu^2}{4}\, i'_{jk}\, \psi'_{jk} \bar{\psi}_{jk}, \qquad (15.63)$$

de care trebuie să se țină seama la calculul coeficienților r_{it} și r_{ih} din ecuațiile de condiție.

Dacă ecuațiile de grad de libertate nu sînt scrise prin lucru mecanic virtual, ci se utilizează pentru exprimarea echilibrului static ecuații de proiecții, cum s-a procedat în legătură cu figura 186 la cadre etajate, corecțiile datorite raportării sarcinii axiale la poziția deformată sînt introduse implicit, deoarece s-a ținut seama de acestea la stabilirea expresiilor forței tăietoare date de relațiile (15.46) și (15.52).

Odată efectuat calculul coeficienților și al termenilor liberi, se alcătuiește sistemul ecuațiilor de condiție în una dintre formele

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_{1s} \\ \vdots \\ R_{ns} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_s} = [0], \text{ sau } \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} = [0], \qquad (15.64)$$

după cum în cursul barelor structurii sînt sau nu aplicate sarcini transversale. Deoarece nu toate barele sînt puternic comprimate, în matricea reacțiunilor unitare $\mathbf{r}$ și în matricea termenilor liberi $\mathbf{R}_s$, unii termeni conțin parametrul ν și alții nu. Utilizarea ecuațiilor de condiție se face în raport cu obiectivul urmărit, similar ca la metoda eforturilor.

(a) *Calculul de ordinul II.* În acest caz există sarcini transversale aplicate pe bare, iar factorii de compresiune ν sînt cunoscuți. În funcție de aceștia, se extrag din tabele coeficienții de corecție și se calculează valorile numerice ale elementelor matricelor $\mathbf{r}$ și $\mathbf{R}_s$. Se rezolvă ecuațiile de condiție și se determină mărimile necunoscutelor $Z_1, \ldots Z_n$, după care se pot calcula momentele de capăt din extremitățile tuturor barelor cu relațiile generale (15.53) — (15.54). Urmează trasarea diagramelor de eforturi în modul cunoscut. Și aici, la bare puternic comprimate ce au aplicate sarcini transversale în cursul lor, partea de diagramă ce corespunde barei simplu rezemate se stabilește folosind expresiile din tabela 10.

[1] Expresiile (15.62) pot fi stabilite și în alt mod, ținînd seamă că echilibrul barei din figura 256, *c* este asigurat de sarcinile axiale P, momentele de capăt și forțele tăietoare. Lucrul virtual dat de sarcini și momente de capăt, se poate deci înlocui prin lucrul virtual dat de forțele tăietoare. Se explică astfel apariția coeficienților de corecție $\eta_0(\nu)$ și $\eta_1(\nu)$, care în tabela 12 sînt definiți pentru forța tăietoare.

(b) *Verificarea de stabilitate.* Apar aceleași două situații distincte, după cum se urmărește determinarea parametrului critic ce corespunde bifurcării echilibrului, cînd structura este acționată numai de sarcini axiale, sau se cercetează pierderea stabilității prin accentuarea puternică a deformării cînd există și sarcini transversale aplicate în cursul barelor.

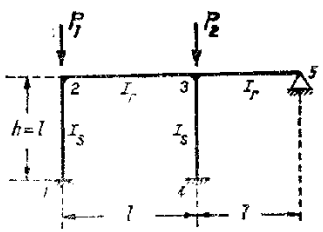
În primul caz, sistemul ecuațiilor de condiție nu are termeni liberi și se scrie $\mathbf{r}\,\mathbf{Z}=0$. Aici soluția banală, cu toate necunoscutele egale cu zero, corespunde poziției inițiale a structurii. Ca, în afară de aceasta, să existe și o a doua poziție de echilibru, este necesar ca necunoscutele să fie diferite de zero, corespunzînd unei poziții deformate. Aceasta este posibil numai cînd matricea $\mathbf{r}$ este singulară, ceea ce conduce la condiția $D[\mathbf{r}]=0$ care reprezintă *ecuația de stabilitate*. Dezvoltînd determinantul, rezultă o ecuație în ν, din rezolvarea căreia se identifică soluția $(\nu_{cr})_{min}$.

În al doilea caz, sistemul ecuațiilor de condiție are termeni liberi și se scrie $\mathbf{r}\,\mathbf{Z}+\mathbf{R}_s=0$. Necunoscutele rezultă sub forma $Z_i=-D_i/D$, unde D este determinantul matricei $\mathbf{r}$. Cît timp $D[\mathbf{r}]\neq 0$, există unicitatea soluțiilor $Z_1,\ldots Z_n$ și structura se găsește în domeniul echilibrului stabil, căruia îi corespunde un calcul de ordinul II. Ca structura să-și piardă stabilitatea, este necesar să se producă deformări accentuate și deci — teoretic — necunoscutele $Z_1,\ldots Z_n$ să tindă spre infinit. Aceasta este posibil numai dacă $D[\mathbf{r}]=0$, regăsind *aceeași* ecuație de stabilitate, care este astfel comună ambelor cazuri.

Pentru exemplificare, fie cadrul cu noduri fixe din figura 257, la care ambii stîlpi sînt puternic comprimați. Coeficienții de rigiditate ai barelor sînt dați în tabelă, unde $K=I_r/I_s$. Calculul elementelor matricei $\mathbf{r}$ se face utilizînd relațiile (12.35) și tabela 12; se obține

$$r_{22}=K+\varphi'(\nu_1),\qquad r_{23}=r_{32}=K/2,\qquad r_{33}=\frac{7\,K}{4}+\varphi'(\nu_2),$$

care introduse în ecuația de stabilitate $D[\mathbf{r}]=r_{22}r_{33}-r_{23}^2=0$, conduc la condiția



Bara	1–2	2–3	3–4	3–5
i	I_s/l	I_r/l	I_s/l	I_r/l
i'	1	K	1	K
β'	$\varphi'(\nu_1)$	K	$\varphi'(\nu_2)$	3 K/4

Fig. 257

$$6\,K^2+7\,K\,\varphi'(\nu_1)+4\,K\,\varphi'(\nu_2)+4\,\varphi'(\nu_1)\,\varphi'(\nu_2)=0,$$

ce poate fi rezolvată prin încercări pentru diferite cazuri particulare.

Astfel, admițînd $K=1$ și considerînd cîteva situații de încărcare, rezultă următoarele ecuații de stabilitate și mărimi pentru $(\nu_{cr})_{min}$:

— *cazul 1:* $P_1=0,\ P_2=P$

$$13+8\,\varphi'(\nu)=0,\qquad \varphi'(\nu)=-1{,}63,\qquad \nu=5{,}57$$

— *cazul 2:* $P_1=P,\ P_2=0$

$$10+11\,\varphi'(\nu)=0,\qquad \varphi'(\nu)=-0{,}909,\qquad \nu=5{,}28$$

— caz 3: $P_1=P_2=P$,

$$4\varphi'(\nu)+10\varphi(\nu)+6=0, \qquad \varphi(\nu)=-0{,}75, \qquad \nu=5{,}19$$

— caz 4: $P_1=2P$; $P_2=P$

$$6+7\varphi'(1{,}43\nu)+4\varphi'(\nu)+4\varphi'(1{,}43\nu)\varphi'(\nu)=0, \qquad \nu=3{,}69$$

— caz 5: $P_1=P$, $P_2=2P$

$$6+7\varphi'(\nu)+4\varphi'(1{,}43\nu)+4\varphi'(\nu)\varphi'(1{,}43\nu)=0, \qquad \nu=3{,}88$$

unde la ultimele două cazuri ecuația de stabilitate s-a rezolvat prin încercări.

Rămîn de făcut unele observații importante.

(1) La metoda eforturilor s-a dat o atenție deosebită soluției *banale* a sistemului ecuațiilor de condiție $\delta\mathbf{X}=0$, deoarece în anumite cazuri particulare această soluție poate conduce la valori ν_{cr} mai mici decît cele ce se obțin din ecuația de stabilitate $D[\delta]=0$ și este deci mai defavorabilă.

La rezolvarea prin metoda deplasărilor, posibilitatea unei soluții banale își pierde interesul. Într-adevăr, în acest caz deformata critică a structurii date devine identică cu cea a sistemului de bază și deci valoarea parametrului critic este aceeași. Sistemul de bază în metoda deplasărilor se obține prin adăugare de legături și reprezintă în general un sistem cu legături complete, care este evident mai rigid decît structura reală și deci îi corespunde un parametru critic mai mare. Înseamnă că utilizarea ecuației de stabilitate $D[\mathbf{r}]=0$, care elimină implicit soluția banală, conduce în acest caz la soluția defavorabilă cu $(\nu_{cr})_{min}$.

Nu este deci necesar să se dea atenție soluției banale la verificarea de stabilitate prin metoda deplasărilor, ceea ce reprezintă un avantaj al acestei metode.

(2) Un alt avantaj esențial se referă la rezolvarea prin încercări a ecuației de stabilitate $D[\mathbf{r}]=0$. Și în cazul metodei deplasărilor, rezolvarea directă a acestei ecuații este anevoioasă și nu se utilizează decît în cazuri simple. Obișnuit se recurge la încercări, atribuind anumite valori parametrului ν și calculînd valorile corespunzătoare ale determinantului D. Eficiența acestei căi depinde esențial de faptul dacă valoarea obținută la o încercare dă indicații utile pentru încercarea următoare. Răspunsul poate fi dat cercetînd variația lui D în raport cu ν.

Tabelele de coeficienți de corecție specifici metodei deplasărilor arată că și în mărimile acestora apar discontinuități, ceea ce conduce la discontinuități în variația determinantului D. Acestea apar pentru valori ν ce corespund situației de pierdere a stabilității în sistemul de bază. Astfel, dacă structura dată nu are nici o bară cu articulații de extremitate, coeficienții $\varphi'(\nu)$, $\varphi''(\nu)$, $\varphi(\nu)$ și $\eta(\nu)$ variază continuu pînă la valoarea $\nu=2\pi$ (valoare critică pentru bara tip 3 din tabela 9); cînd intervin și bare cu articulație la extremitate, coeficienții $\varphi_0(\nu)$ și $\eta_0(\nu)$ variază continuu cît timp $\nu\leqslant 4{,}50$ (valoare critică pentru bara tip 2 din aceeași tabelă).

Deoarece sistemul de bază din metoda deplasărilor este mai rigid decît structura, datorită adăugării de legături, parametrul critic al structurii date va fi mai mic (cel mult egal) cu al sistemului de bază și deci pentru $\nu<\nu_{cr}$ determinantul D variază continuu. Se știe însă că în statica liniară ($\nu=0$) este totdea-

una îndeplinită condiția $D>0$. Cînd ν crește, D variază continuu în domeniul valorilor pozitive, pînă ajunge la anularea ce corespunde valorii $(\nu_{cr})_{min}$. *Rezultă că în tot intervalul de stabilitate al structurii* $D\,|\mathbf{r}|>0$. Dacă la o anumită încercare cu o valoare ν se obține $D>0$, în mod cert corespunde domeniul echilibrului stabil și deci pentru continuarea încercărilor trebuie aleasă o valoare ν mai mare. Cînd $D<0$, înseamnă că valoarea ν aleasă depășește pe ν_{cr}.

Desigur, variația lui D cuprinde mai multe puncte de anulare și deci trebuie dată atenție ca în mod efectiv să se identifice valoarea $(\nu_{cr})_{min}$. În acest scop, pentru orientare, se pornește de la încadrarea între cazurile tip din tabela 9.

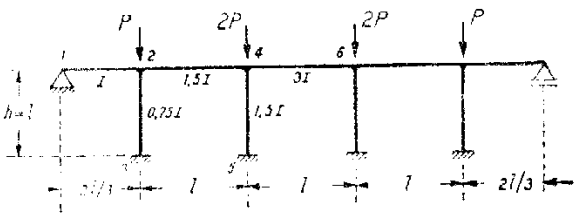
(3) Toate aspectele arătate la metoda eforturilor privind *simplificările la structuri simetrice* sînt în întregime valabile și la metoda deplasărilor. O structură poate fi considerată simetrică numai cînd este asigurată și simetria factorilor de compresiune ν, deci cînd barele puternic comprimate sînt dispuse simetric și simetric încărcate. În aceste condiții, pierderea de stabilitate se poate produce simetric sau antisimetric. Justificarea se poate face și aici, pornind de la ecuațiile de condiție (15.64) ale metodei deplasărilor, în forma discutată în legătură cu relațiile (15.40) și (15.41).

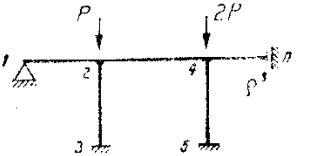
La aplicarea practică, se utilizează procedeul semistructurilor (v. fig. 185). La cadre cu deschidere centrală, dacă bara respectivă este puternic comprimată, trebuie utilizați coeficienții de rigiditate convenționali ρ^s_{jn} și ρ^a_{jn} dați de relațiile (12.37) și (12.38). Introducînd datele din tabela 12, se obține

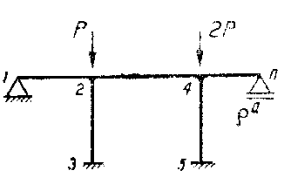
$$\rho^s_{jn}=i_{jk}\left[\varphi'(\nu)-\frac{1}{2}\varphi''(\nu)\right] \text{ și } \rho^a_{jn}=i_{jk}\left[\varphi'(\nu)+\frac{1}{2}\varphi''(\nu)\right], \qquad (15.65)$$

care pentru $\nu=0$ devin $\rho^s_{jn}=i_{jk}/2$ și $\rho^a_{jn}=3\,i_{jk}/2$.

Pentru exemplificare, fie cadrul cu noduri fixe din figura 258, la care toți stîlpii au același factor de compresiune $\nu=l\sqrt{P/0{,}75EI}$. În figură sînt reprezentate cele două semistructuri, precum și tabela de rigidități a barelor. Ambele semistructuri au cîte două grade de nedeterminare geometrică, necunoscute fiind rotirile de nod 0_2 și 0_4; ecuația de stabilitate are deci forma $r_{22}r_{44}-r^2_{24}=0$. Se consideră separat pierderea de stabilitate a fiecăreia dintre semistructuri.







Bara	1-2	2-3	2-4	3-5	4-6 sim.	4-6 antisim.
i	$3I/2l$	$0{,}75I/l$	$1{,}5I/l$	$1{,}5\,I/l$	$3I/l$	$3I/l$
i'	1	0,5	1	1	2	2
ϱ'	0,75	$0{,}5\varphi'(\nu)$	1	$\varphi'(\nu)$	1	3

Fig. 258

— *Pierdere de stabilitate simetrică:*

$$r_{22}=1,75+0,5\varphi'(\nu), \qquad r_{21}=r_{12}=0,5, \qquad r_{44}=2+\varphi'(\nu).$$

Ecuația de stabilitate este

$$\varphi'^2(\nu)+5,5\varphi'(\nu)+6,5=0, \quad \text{deci} \quad \varphi'(\nu)=-1,72,$$

căreia îi corespunde

$$\nu=5,59 \quad \text{și} \quad l_f^{(s)}=0,562\, l=(l_f)_{max}.$$

— *Pierdere de stabilitate antisimetrică:*

$$r_{22}=1,75+0,5\varphi'(\nu), \qquad r_{21}=r_{12}=0,5, \qquad r_{44}=4+\varphi'(\nu).$$

Ecuația de stabilitate este

$$\varphi'^2(\nu)+7,5\varphi'(\nu)+13,5=0, \qquad \text{deci} \qquad \varphi'(\nu)=-3,00,$$

căreia îi corespunde

$$\nu=5,83>5,59 \quad \text{și} \quad l_f^{(a)}=0,539\, l.$$

În ambele cazuri, din ecuația de stabilitate s-a reținut numai soluția $\varphi'(\nu)$ mai defavorabilă. Rezultă că pierderea de stabilitate se produce după o deformată simetrică. Explicația: cadru fiind cu noduri fixe, la cele două semistructuri intervine ca deosebire numai rigla ce corespunde deschiderii centrale și această riglă apare mai rigidă pentru o deformată antisimetrică.

5. Procedee iterative

Scrierea și rezolvarea directă a ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor se utilizează numai în cazuri simple. La structuri mai complicate, se poate recurge la rezolvarea ecuațiilor prin iterație, la fel ca în statica liniară. În consecință, toate procedeele examinate în capitolul XIII sînt aplicabile și în condițiile calculului de ordinul II, cît timp se admite că factorii de compresiune ν reprezintă constante ale barelor puternic comprimate.

Obișnuit, se începe cu un calcul de ordinul I pentru determinarea mărimii forțelor axiale, care se admit aceleași și în calculul de ordinul II, în baza aproximației $N_x \simeq N_x^0$. Factorii de compresiune sînt astfel cunoscuți de la început pentru toate barele puternic comprimate și deci se pot determina coeficienții de rigiditate și momentele de încastrare perfectă, utilizînd expresiile stabilite în paragrafele precedente, în care intervin coeficienții de corecție specifici calculului pe axa deformată. În rest, nu este nimic de adăugat privitor la extinderea aplicării diferitelor procedee cunoscute în calculul de ordinul II, cum sînt procedeul transmiterii rotirilor sau procedeul Cross la cadre cu noduri fixe, procedeul operării în două etape la cadre cu noduri deplasabile etc. Întreaga rezolvare se conduce în același mod, cu mențiunea că la ecuațiile de echilibru corespunzătoare gradelor de libertate, scrise prin deplasări virtuale, se va ține seamă de relația (15.61).

Problema ce rămîne să fie examinată aici se referă la posibilitatea utilizării procedeelor iterative în calculul de stabilitate. De data aceasta, mărimile factorilor de compresiune nu mai sînt cunoscute, urmînd să se determine tocmai

valoarea parametrului critic rezolvînd ecuația de stabilitate $D[\mathbf{r}]=0$. Rezolvarea directă fiind de obicei dificilă, trebuie urmărită ideea unei apropieri treptate de soluție, prin încercări.

O primă cale este de a utiliza matricea reacțiunilor unitare $\mathbf{r}$ așa cum apare definită de relația (15.64), care corespunde sistemului geometric determinat de bază uzual în metoda deplasărilor. Se consideră la început o valoare apreciată ν_1 pentru ν_{cr} și se determină în consecință mărimile tuturor elementelor matricei $\mathbf{r}$, cît și valoarea determinantului matricei, care desigur va rezulta diferită de zero. Valoarea obținută reprezintă un criteriu cert de orientare, deoarece — așa cum s-a arătat anterior — cît timp structura se găsește în domeniul echilibrului stabil, matricea reacțiunilor unitare este definită pozitiv. Înseamnă că o valoare $D>0$ obținută pentru factorul de compresiune ν_1 arată că $\nu_1<\nu_{cr}$ și deci trebuie reluată încercarea cu o valoare $\nu_2>\nu_1$. Atribuind deci lui ν valori succesive, se urmărește apropierea de condiția $D=0$, care corespunde valorii căutate ν_{cr}.

Se poate utiliza desigur și varianta arătată la metoda eforturilor, anume ca la calculul valorii determinantului D pentru o anumită valoare ν_1 a parametrului ν, unul dintre termeni să fie lăsat sub formă literală. Condiția $D=0$ conduce la o valoare pentru acest termen și deci la o valoare ν_2 a factorului de compresiune, cu care se face încercarea următoare, urmărind restrîngerea intervalului.

O a doua cale constă în reducerea rangului determinantului care intervine în ecuația de stabilitate. Într-adevăr, acest rang este egal cu numărul necunoscutelor geometric nedeterminate ce se consideră. Cînd sistemul de bază este geometric determinat, intervin ca necunoscute rotirile tuturor nodurilor, precum și parametrii gradelor de libertate elastică. Calea de reducere a rangului determinantului constă deci în *utilizarea sistemelor de bază geometric nedeterminate*. Aplicarea concretă a acestei idei diferă, după cum cadrele cu noduri fixe sau deplasabile.

a. **Cadre cu noduri fixe.** Există posibilitatea de a bloca un singur nod j (fig. 259, *a*), celelalte rămînînd libere, astfel că se lucrează cu o singură necunoscută.

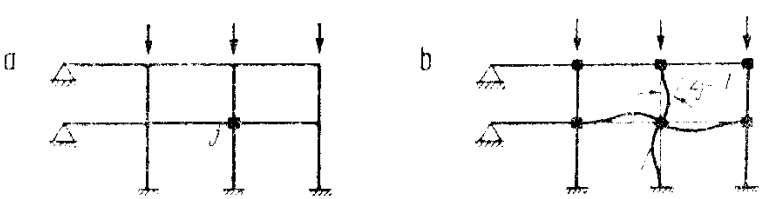


Fig. 259

Ecuația de condiție are forma $r^*_{jj}Z_j=0$ și deci ecuația de stabilitate este $r^*_{jj}=0$, în care intervin factorii de compresiune ai barelor puternic comprimate, exprimați sub forma (15.36) în funcție de parametrul ν ce urmează a fi determinat prin rezolvarea ecuației.

Calculul reacțiunii unitare r^*_{jj} implică rezolvarea prealabilă a sistemului de bază geometric nedeterminat pentru încărcarea cu $0_j=1$. În acest scop,

se utilizează sistemul de bază geometric determinat obținut prin blocarea tuturor nodurilor structurii (fig. 259, *b*). Acest sistem se încarcă cu rotirea $\theta_j=1$ și se determină momentele de încastrare perfectă corespunzătoare, după care nodurile se deblochează — cu excepția nodului j, care rămîne blocat în poziția $\theta_j=1$ — și se stabilesc momentele de capăt finale ce corespund acestei încărcări pe sistemul de bază din figura 259, *a*. Urmează sumarea momentelor de pe capetele de bare din jurul nodului j, obținînd expresia reacțiunii r^*_{jj} ce trebuie egalată cu zero.

Practic, calculul se conduce tot prin încercări. Se atribuie o valoare apreciată ν_1 parametrului ν și se rezolvă prin iterație cazul din figura 259, *b*, după care se determină mărimea reacțiunii r^*_{jj}. O valoare $r^*_{jj}>0$ corespunde domeniului echilibrului stabil și deci încercarea următoare trebuie făcută cu un factor de compresiune $\nu_2>\nu_1$, urmărind treptat apropierea de condiția $D=0$. Desigur, modificarea valorii parametrului de la o etapă la alta modifică implicit coeficienții de rigiditate ai barelor puternic comprimate.

Pentru exemplificarea procedeului în care se blochează un singur nod, fie cazul simplu din figura 260, *a*, a cărui rezolvare se poate conduce literal. Tabela rigidităților barelor este dată în figura 257. Încărcarea cu rotirea $\theta'_3=1$ (fig. 260, *b*) produce momentele M_{3k} în extremitățile barelor din jurul nodului, deci pentru sistemul de bază geometric determinat se obține

$$r_{33}=\sum_3 \rho'_{3k}=K+\varphi'(\nu)+3K/4=\varphi'(\nu)+7K/4.$$

În extremitatea 2 se transmite momentul $M_{23}=\rho'_{32}\mu_{32}=K/2$, astfel că deblocînd nodul 2 se produce rotirea

$$\theta'_2=-\frac{K}{2}\cdot\frac{1}{K+\varphi'(\nu)} \quad \text{și deci} \quad \Delta M_{23}=\rho'_{23}\theta'_2=-\frac{K^2}{2}\cdot\frac{1}{K+\varphi'(\nu)},$$

de unde rezultă

$$\Delta M_{32}=\Delta M_{23}\mu_{23}=-\frac{K^2}{4}\cdot\frac{1}{K+\varphi'(\nu)}.$$

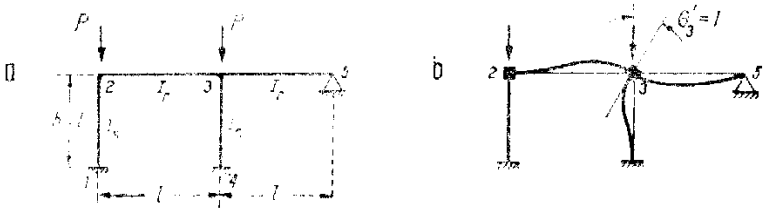


Fig. 260

În total, reacțiunea r_{jj} cînd nodul 2 este liber are mărimea

$$r^*_{jj}=r_{jj}+\Delta M_{32}=\varphi'(\nu)+\frac{7K}{4}-\frac{K^2}{4}\cdot\frac{1}{K+\varphi'(\nu)},$$

care egalată cu zero conduce la ecuația de stabilitate

$$6K^2+11K\varphi'(\nu)+4\varphi'^2(\nu)=0,$$

regăsind ecuația obținută pentru cazul particular 3 examinat în legătură cu figura 257.

b. **Cadre cu noduri deplasabile.** Drept sistem de bază geometric nedeterminat se admite cadrul cu noduri fixe, reținînd ca necunoscute numai parametrii gradelor de libertate elastică. Acest sistem de bază se rezolvă utilizînd sistemul de bază geometric determinat uzual — întocmai ca în procedeul operării în două etape — pentru încărcarea succesivă cu gradele de libertate, desigur alegînd prin apreciere o anumită valoare pentru parametrul critic. Se scrie apoi sistemul ecuațiilor de condiție corespunzătoare gradelor de libertate, în modul cunoscut, dînd atenție coeficienților de forma r_{ih} și r_{ii} pentru care se utilizează expresia corectată (15.61). Urmează formarea și rezolvarea ecuației de stabilitate $D=0$, unde rangul determinantului este mult mai mic.

De menționat că modul de alegere a sistemelor de bază geometric nedeterminate, utilizate atît pentru cadre cu noduri fixe, cît și cu noduri deplasabile, are la bază avantajele de rezolvare prin iterație a cadrelor cu noduri fixe. În ceea ce privește convergența iterației în calculul de ordinul II și de stabilitate, se utilizează *criteriul lui Wiltmeyer*

$$|r_{jj}| \geqslant \sum_{1}^{n} |r_{jk}|, \quad \text{dar } r_{jj} = \sum_{j} i'_{jk}\,\varphi'(\nu) \text{ și } r_{jk} = -i'_{jk}\,\varphi''(\nu)$$

pentru bare cuprinse între două noduri, deci condiția devine

$$\sum_{j} i'_{jk}\left[\varphi'(\nu) - \frac{1}{2}\varphi''(\nu)\right] > 0. \tag{15.66}$$

Consultarea tabelelor arată că paranteza este mai mare decît zero pentru $\nu < \pi$ și devine negativă cînd $\pi > \nu$; convergența este deci cu atît mai bună cu cît ν este mai mic. Din acest punct de vedere:

— în calculul de ordinul II intervine situația de exploatare și deci valorile ν sînt mici, astfel încît convergența este foarte bună;

— la cadre cu noduri deplasabile, în mod obișnuit $\nu_{cr} < \pi$, deci convergența se menține bună și pentru calculul de stabilitate;

— la cadre cu noduri fixe de obicei $\nu_{cr} > \pi$, dar trebuie ținut seama că numai unele bare sînt puternic comprimate și acestea leagă de obicei noduri de rezemări, astfel că și aici convergența — deși mai slabă — este satisfăcătoare.

Pentru exemplificare, fie cadrul cu noduri deplasabile din figura 261, *a*, care are o singură bară puternic comprimată; coeficienții de rigiditate sînt dați în tabela alăturată. Cadrul are un singur grad de libertate elastică; ca sistem de bază geometric nedeterminat se alege cadrul cu noduri fixe, blocînd posibilitatea de deplasare laterală. Ecuația de condiție are forma $r^{\bullet}_{it} Z_t = 0$ și deci ecuația de stabilitate este $r^{\bullet}_{it} = 0$.

Pentru început, se admite valoarea apreciată $\nu = 2{,}50$, prin încadrare între cazurile 2 și 4 din tabela 9. Totodată, se consideră $k = I_r/I_s = 1$. Sistemul de bază geometric determinat, cu noduri blocate, se încarcă cu necunoscuta-grad de libertate $\psi'_1 = 1$ (fig. 261, *b*), pentru care rezultă momentele de încastrare perfectă.

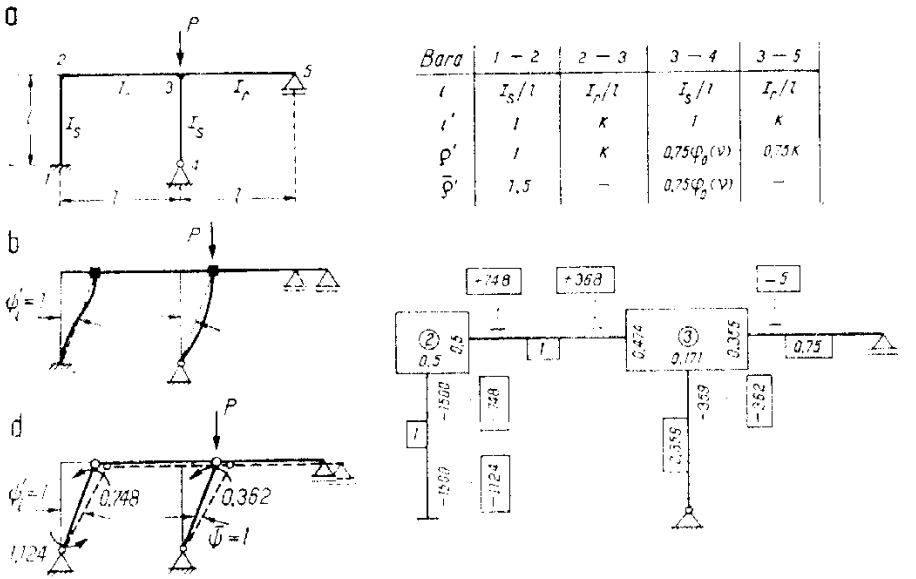
$$M_{12} = M_{21} = -\bar{r}'_{12} = -1{,}5 \text{ și } M_{34} = -3\varphi^0(\nu)/4 = -0{,}359,$$

unde s-a introdus din tabele coeficientul $\varphi_0(2{,}50) = 0{,}4793$. În continuare, se blochează nodurile și se efectuează schema de iterare corespunzătoare (fig. 261, *c*), din care se obțin momentele de capăt aferente sistemului de bază geometric nedeterminat, încărcat cu $\psi'_1 = 1$.

Calculul reacțiunii unitare r_{ii}^{*} se face aplicînd momentele de capăt pe schema articulată, considerată în poziția deplasată $\psi_i'=1$, împreună cu sarcina axială P și exprimînd echilibrul static cu ajutorul unei deplasări virtuale, reprezentată de rotirea suplimentară a axelor stîlpilor cu $\psi=1$. Se obține

$$r_{ii}^{*}=-R_{ii}=(1{,}124+0{,}748)\,(+1)+0{,}362(+1)-0{,}25\nu^2\cdot(+1)=0{,}672$$

unde s-a ținut seamă de relația (15.61), precum și de *schimbarea de semn* ce trebuie operată la calculul coeficienților prin deplasări virtuale, cum s-a arătat în legătură cu relația (12.41).



Bara	1 − 2	2 − 3	3 − 4	3 − 5
i	I_s/l	I_r/l	I_s/l	I_r/l
i'	1	K	1	K
ρ'	1	K	$0{,}75\varphi_0(\nu)$	$0{,}75K$
$\bar{\rho}'$	1,5	–	$0{,}75\varphi_2(\nu)$	–

Fig. 261

Deoarece $r_{ii}^{*}>0$, înseamnă că valoarea apreciată $\nu=2{,}50$ corespunde unei situații de echilibru stabil și deci încercarea următoare trebuie făcută cu o valoare mai mare.

În alternativă, se poate pune condiția $r_{ii}^{*}=0$, lăsînd pe ν din ultimul termen în formă literală; se obține $\nu=2{,}99$, față de valoarea $\nu=2{,}50$ cu care s-a pornit.

Pentru restrîngerea intervalului, a doua încercare se face de exemplu cu $\nu=2{,}70$, căreia îi corespunde $\varphi_0(\nu)=0{,}3621$. Repetînd în totul același calcul, se obține $r_{ii}^{*}=0{,}319>0$, respectiv $\nu=2{,}92$. În continuare, utilizînd pentru orientare o interpolare de valori, se obține o coincidență aproximativă pentru valoarea $\nu_{cr}=2{,}86$, care reprezintă mărimea căutată a parametrului critic.

6. Formulări matriceale adaptate calculului automat

Extinderea la calculul de ordinul II și de stabilitate a metodei matriceale care a fost examinată în partea finală a capitolului XIII și concretizată în sistemul ecuațiilor de condiție (13.50), este deosebit de simplă utilizînd siste-

matizările făcute în cele ce preced. Se consideră ca necunoscute toate deplasările nodurilor structurii, cum s-a arătat în legătură cu figura 211, *c* și *d*, situația fiind aceeași în fiecare nod. Formularea se menține în întregime, urmînd numai să se adapteze matricea de rigiditate a barei la condițiile calculului pe axa deformată. Se păstrează convențiile de semne stabilite în figura 211, *a* și *b*.

Fie mai întîi o bară puternic comprimată dintr-o structură plană cu noduri rigide, pentru care se formează submatricea $\bar{\mathbf{r}}_{jj}$. Corespunzător celor două posibilități de rezemare la extremitatea *k*, opusă nodului *j*, matricele (13.40) trebuie adaptate prin introducerea coeficienților de corecție, în funcție de factorul de compresiune ν al barei. În acest scop, cazurile de încărcare cu deplasări din figura 213, *b* și *c* urmează a fi înlocuite cu cele din figura 255, *b* respectiv *a* (la prima se consideră $\Delta = l\psi_{jk} = 1$). Se obține:

$$\bar{\mathbf{r}}_{jj}^{(\varphi_k=1)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3}\,\tau_1(\nu) & -\frac{6EI}{l^2}\,\varphi_1(\nu) \\ 0 & \frac{6EI}{l^2}\,\varphi_1(\nu) & \frac{4EI}{l}\,\omega_1(\nu) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{jj}^{(\varphi_k=0)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3}\,\tau_0(\nu) & \frac{3EI}{l^2}\,\varphi_0(\nu) \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2}\,\varphi_0(\nu) & \frac{3EI}{l}\,\varphi_0(\nu) \end{bmatrix},$$

unde trebuie observat modul cum intervin coeficienții de corecție, în special la al doilea element din linia a doua, care reprezintă forța tăietoare produsă de deplasarea $\Delta = 1$. A se revedea în acest sens stabilirea relațiilor (15.46) și (15.52), comparativ cu situația din matricea generală (13.39) pentru calculul de ordinul I.

Pentru barele cuprinse între două noduri, se alcătuiesc în mod asemănător și celelalte submatrice, ținînd seama de datele din tabela 12. Matricea de rigiditate $\bar{\mathbf{r}}_i$ a unei bare cu secțiune constantă are forma din figura 262.

Matricele ce conțin coeficienți de corecție se aplică numai barelor puternic comprimate ale structurii ($\nu > 0$, $2\,\nu_{cr}$); în prealabil forțele axiale din bare se determină printr-un calcul de ordinul I și pe baza aceasta se stabilesc factorii de compresiune ν, considerați drept constante ale barelor puternic comprimate. Pentru celelalte bare se utilizează matricea din figura 213.

În continuare, se trece la calculul matricelor de rigiditate $\mathbf{r}_i$ în sistemul de axe al structurii, utilizînd relația (13.37) și anume $\mathbf{r}_i = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{A}$, după care se asamblează matricea de rigiditate $\mathbf{R}$ a întregii structuri, cum s-a arătat în legătură cu figura 218, obținînd sistemul ecuațiilor de condiție

$$\mathbf{R}\Delta = \mathbf{P}, \qquad \text{sau} \qquad \Delta = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{P},$$

$$
\bar{\mathbf{r}}_{i'}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (j_1) & (j_2) & (j_3) & (k_1) & (k_2) & (k_3) \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3}\eta(\nu) & -\frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) & 0 & \frac{12EI}{l^3}\eta(\nu) & -\frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) \\
0 & -\frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) & \frac{4EI}{l}\varphi'(\nu) & 0 & \frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) & \frac{2EI}{l}\varphi''(\nu) \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3}\eta(\nu) & \frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) & 0 & \frac{12EI}{l^3}\eta(\nu) & -\frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) \\
0 & -\frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) & \frac{2EI}{l}\varphi''(\nu) & 0 & \frac{6EI}{l^2}\varphi(\nu) & \frac{4EI}{l^2}\varphi'(\nu)
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ (j_1) \\ (j_2) \\ (j_3) \\ (k_1) \\ (k_2) \\ (k_3) \end{array}
$$

Fig. 262. Matrice de rigiditate pentru bară puternic comprimată dintr-o structură plană.

matrice-coloană care cuprinde deplasările tuturor nodurilor structurii. Se pot acum determina eforturile de capăt ale barelor, corespunzătoare calculului de ordinul II, utilizînd relația (13.52) în care eforturile de încastrare perfectă se stabilesc ținînd seama de expresiile de forma (15.55) și (15.58).

Rămîne de examinat modul de verificare la pierderea de stabilitate pe baza ecuației $D[\mathbf{R}]=0$, care servește la determinarea parametrului critic. Acesta corespunde situației de accentuare puternică a deformabilității structurii, datorită scăderii rigidității de ansamblu pînă la anulare, oglindită prin faptul că matricea de rigiditate globală $\mathbf{R}$ devine singulară. Ecuația de stabilitate se rezolvă prin încercări, automatizarea calculului oferind posibilitatea unui procedeu sistematizat prin pași succesivi.

Se pornește de la o situație de echilibru stabil, de exemplu considerînd pentru barele puternic comprimate forțele axiale din stadiul de exploatare; va rezulta $D>0$. În continuare, se admit succesiv creșteri proporționale ale forțelor axiale, stabilind un anumit pas de creștere astfel încît intervalul respectiv să încadreze satisfăcător parametrul critic. Pentru fiecare creștere, se modifică matricele de rigiditate ale barelor puternic comprimate, corespunzător mărimii atinse de factorii de compresiune. Implicit se modifică și matricea globală $\mathbf{R}$, urmînd să se controleze dacă valoarea determinantului rămîne pozitivă sau nu. Cît timp $D>0$, structura se găsește în echilibru stabil; de îndată ce pentru un nou pas rezultă $D\leqslant 0$, înseamnă că s-a ajuns la sarcina critică de pierdere a stabilității structurii în ansamblu.

Controlul semnului determinantului se face trecînd la inversarea matricei $\mathbf{R}$ prin diferite procedee și constă de fapt într-un test de semn al anumitor elemente ce se formează pe parcursul operației de inversare[1].

[1] O examinare a acestor probleme se va face în cadrul cursului la alegere „Calculul structurilor la calculatoare electronice".

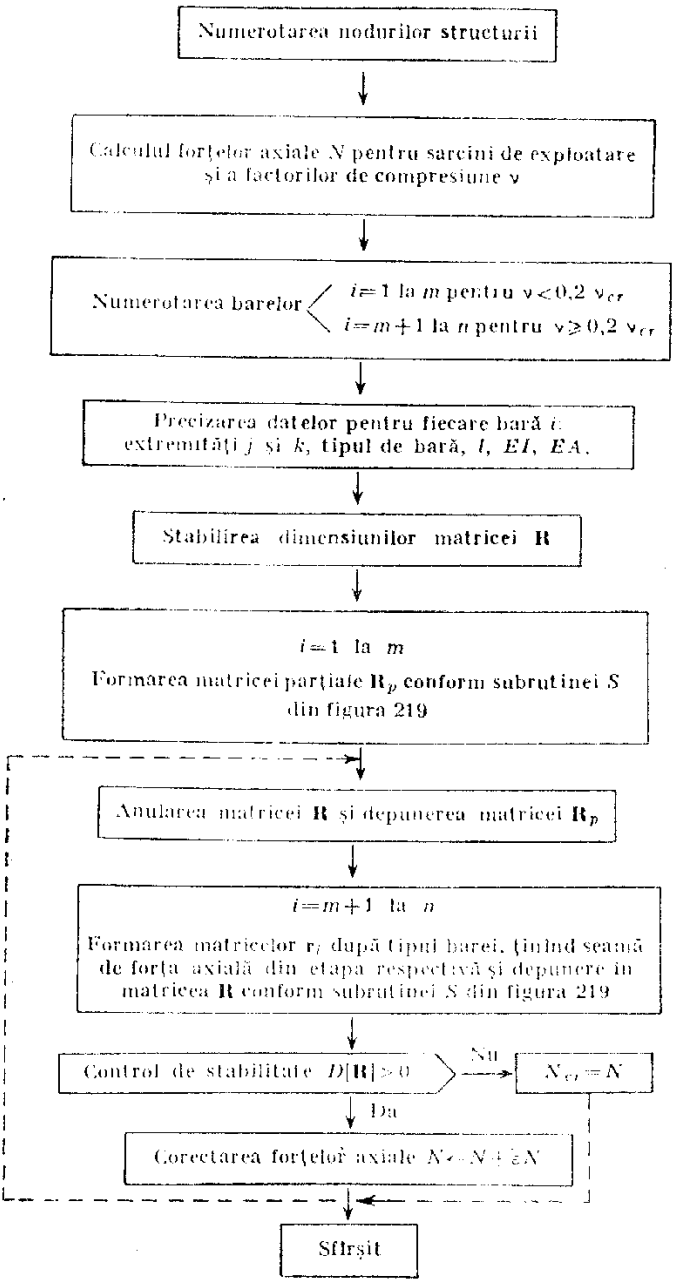


Fig. 262. Schemă logică pentru verificarea de stabilitate.

În ceea ce privește repetarea operațiilor, trebuie ținut seamă că modificările succesive în mărimea forțelor axiale influențează numai matricele de rigiditate ale barelor puternic comprimate, cele ale restului barelor rămînînd neschimbate. Se poate deci începe prin depunerea matricelor de rigiditate ale barelor cu $\nu < 0{,}2\,\nu_{cr}$, formînd astfel o matrice parțială $\mathbf{R}_p$ care rămîne neschimbată și se păstrează în memoria calculatorului, urmînd ca la fiecare treaptă aceasta să fie depusă în matricea globală $\mathbf{R}$, după care să se depună și matricele de rigiditate ale barelor puternic comprimate, corespunzătoare treptei respective.

Schema logică a procedeului este reprezentată în figura 263.

Formularea rămîne aceeași și pentru structuri spațiale cu noduri rigide, urmînd să se corecteze în același mod matricea generală de rigiditate a barei din figura 217. Trebuie ținut seama că, de data aceasta, deformarea datorită încărcării cu deplasări se produce atît în planul $\bar{x}o\bar{y}$ — cînd intervine I_z ca în figura 213, cît și în planul $\bar{x}o\bar{z}$ — cînd intervine I_y ca în figura 215. Înseamnă că la o bară puternic comprimată trebuie stabilite două valori ale factorului de compresiune: $\nu_z = l\sqrt{N/EI_z}$ și $\nu_y = l\sqrt{N/EI_y}$ după planul în care se consideră deformarea, fiecăreia corespunzîndu-i cîte o serie de coeficienți de corecție ce trebuie introduși în matricea $\bar{\mathbf{r}}_i$ la termenii respectivi. Corelația dintre ν_z și ν_y se face pe baza expresiei de forma (15.36).

În cazul unei structuri articulate, matricea de rigiditate a barei se simplifică deoarece în fiecare extremitate intervin numai deplasări liniare ce corespund translațiilor de noduri. Astfel, pentru o bară a unei structuri articulate plane se consideră numai două deplasări, cum s-a arătat în legătură cu relațiile (13.41) —(13.43). Deosebirea față de situația din statica liniară intervine sub forma cazului 5 din tabela 12, cînd trebuie considerată deplasarea $\bar{D}_{j2} = \delta_{jn} = 1$ normală pe axa barei. Admițînd că forța axială păstrează direcția inițială a axei, pentru echilibru apar și componente normale pe axă, similare forței tăietoare, În consecință, matricea $\bar{\mathbf{r}}_i$ dată de relația (13.42) se completează astfel

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{l^3}\nu^2 \end{matrix}}^{\bar{\mathbf{r}}_{jj}} & \overbrace{\begin{matrix} -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l^3}\nu^2 \end{matrix}}^{\bar{\mathbf{r}}_{jk}} \\ \underbrace{\begin{matrix} -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l^3}\nu^2 \end{matrix}}_{\bar{\mathbf{r}}_{kj}} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{l^3}\nu^2 \end{matrix}}_{\bar{\mathbf{r}}_{kk}} \end{bmatrix}, \qquad (15.68)$$

în care intervine factorul de compresiune ν al barei sub forma $EI\nu^2/l^3 = N_i^2/l \simeq N_i^2/l$, unde N_i^2 este forța axială *de compresiune* determinată în condițiile calculului de ordinul I. Introducînd matricea (15.68) pentru barele pu-

ternic comprimate ale structurii articulate și matricea (13.42) pentru celelalte bare, se poate face un calcul de ordinul II rezolvînd sistemul ecuațiilor de condiție $\mathbf{R}\Delta=\mathbf{P}$, sau verificarea de stabilitate pentru ansamblul structurii prin condiția $D\,[\mathbf{R}]=0$.

Pentru exemplificare, fie structura articulată plană din figura 264, cu o singură bară puternic comprimată, la care trebuie determinată sarcina critică de pierdere a stabilității; toate barele au același EA. Față de numerotarea aleasă, la barele a, b, d și e extremitățile din nodurile 1 sau 2 sînt extremități j. Matricele de transformare $\mathbf{A}_0$ date de relația (13.41) sînt

$$\mathbf{A}_0=0.707\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\quad\text{și}\quad \mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

prima pentru barele a și d, a doua pentru barele b și e. Matricele de rigiditate în cele două sisteme de axe sînt:

$$\mathbf{r}_{jj}=\begin{bmatrix}\dfrac{EA}{1{,}414\,l} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \bar{\mathbf{r}}_{jj}=\begin{bmatrix}\dfrac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{r}_{jj}=\begin{bmatrix}\dfrac{EA}{l} & 0\\ 0 & -\dfrac{P}{l}\end{bmatrix},$$

Bare a și d *Bara b* *Bara c*

$$\mathbf{r}_{jj}=0{,}353\,\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{r}_{jj}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{r}_{jj}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\dfrac{P}{EA} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

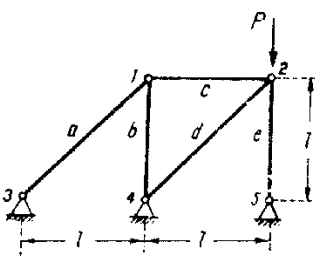


Fig. 264

Pentru bara c, matricea $\bar{\mathbf{r}}_j=\mathbf{r}_j$ are forma (13.42). Efectuînd depunerea submatricelor în matricea de rigiditate $\mathbf{R}$ a structurii, conform schemei din figura 218, se obține:

$$\mathbf{R}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1{,}353 & 0{,}353 & -1 & 0\\ 0{,}353 & 1{,}353 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1{,}353-\dfrac{P}{EA} & 0{,}353\\ 0 & 0 & 0{,}353 & 1{,}353\end{bmatrix},$$

iar din ecuația de stabilitate $D[\mathbf{R}]=0$ rezultă $P_{cr}=0{,}424\,EA$, sarcina critică pentru stabilitatea de ansamblu.

F. CALCULUL PE AXA DEFORMATĂ LA ARCE

1. Calculul de ordinul II

Un asemenea calcul prezintă interes deosebit în cazul arcelor, care sînt elemente puternic comprimate prin însăși comportarea lor, mai ales pentru încărcări disimetrice îndepărtate de cele de coincidență, cînd configurația axei deformate diferă sensibil față de poziția inițială.

Un calcul de ordinul II, în care să se țină seama de deformata efectivă, este aici mai dificil. Obișnuit, se procedează prin corectări succesive, determinînd mărimile eforturilor prin sumarea unui șir de termeni, dintre care primul se referă la calculul de ordinul I. Practic, este suficient să se rețină numai primii doi termeni ai șirului, al doilea reprezentînd corecția de efort rezultată considerînd poziția deformată ce corespunde eforturilor obținute în calculul de ordinul I.

Fie cazul arcului dublu articulat, încărcat cu o sarcină verticală oarecare (fig. 265, *a*). Se începe cu un calcul de ordinul I, determinînd mărimea împingerii orizontale H cu relația (11.20) și apoi diagrama de momente încovoietoare a arcului sub forma

$$H = r_i \frac{\int M^0_{x\,y}\,\mathrm{d}\omega}{\int y^2\,\mathrm{d}\omega} \qquad \text{și} \qquad M_x = M^0_x - Hy,$$

unde pentru sistemul de bază (fig. 265, *b*) diagrama M_{xs} este aceeași ca pentru grinda simplu rezemată (M^0_x).

Cunoscînd diagrama M_x a arcului (fig. 265, *c*), se trece la calculul deplasării pe verticală Δy_i din secțiunea curentă i, anume:

$$\Delta y_i = \int M_x m_{xi}\,\mathrm{d}s/EI = \int M_x m^0_{xi}\,\mathrm{d}s/EI,$$

unde diagrama auxiliară m^0_{xi} este construită pentru sistemul de bază și are forma din figura 265, *d* cu ordonatele

$$(1-i) \quad m^0_{xi} = x_i x'/l - (x_i - x), \qquad (i-2) \quad m^0_{xi} = x_i x'/l,$$

pentru primul interval ordonata fiind scrisă prin diferența diagramelor 1'2 și 1'i'. Introducînd în expresia deplasării, rezultă

$$\Delta_{yi} = \int_0^l M_x\, x_i \frac{x'}{l} \frac{\mathrm{d}s}{EI} - \int_0^{x_i} M_x (x_i - x) \frac{\mathrm{d}s}{EI}.$$

Acestei expresii i se poate da o interpretare interesantă, considerînd cantitățile $M_x \mathrm{d}s/EI = \mathrm{d}\theta$, care reprezintă rotirile relative dintre fețele elementelor curente ds ale arcului, aplicate în mod convențional ca *sarcini concentrate* pe o grindă simplu rezemată (fig. 265, *e*). Introducînd explicit pe dθ în expresia deplasării, rezultă

$$\Delta y_i = \int_0^l \mathrm{d}\theta \frac{x'}{l} x_i - \int_0^{x_i} \mathrm{d}\theta (x_i - x) = M^0_i. \tag{15.64}$$

Se controlează imediat că, reducînd integralele la o singură sarcină elementară dθ, expresia reprezintă momentul încovoietor dat de această sarcină în secțiunea i a grinzii convenționale. Înseamnă că pentru ansamblul sarcinilor elementare dθ, care poate fi realizat prin încărcarea grinzii simplu rezemate cu o sarcină distribuită convențională de intensitate M_x / EI (fig. 265, *f*), momentul înco-

voietor M_i^0 din secțiunea i reprezintă chiar deplasarea pe verticală Δy_i pentru arcul dat.

Se regăsește astfel *metoda grinzii conjugate*, care a fost expusă în capitolul VIII referitor la deformarea grinzilor drepte și intervine aici ca instrument de determinare a poziției deformate a arcului dublu articulat *prin diagrama deplasărilor elastice pe verticală* Δ_y (fig. 265, *g*), care este dată de diagrama de momente încovoietoare a grinzii conjugate asociate (fig. 265, *f*). De observat că grinda conjugată simplu rezemată este caracteristică arcului dublu articulat, deoarece la extremitățile acestuia se pot produce numai rotiri relative în articulații, care sînt reprezentate prin reacțiunile-forțe din reazemele simple ale conjugatei, asemănător cazului *1* din tabela 4.

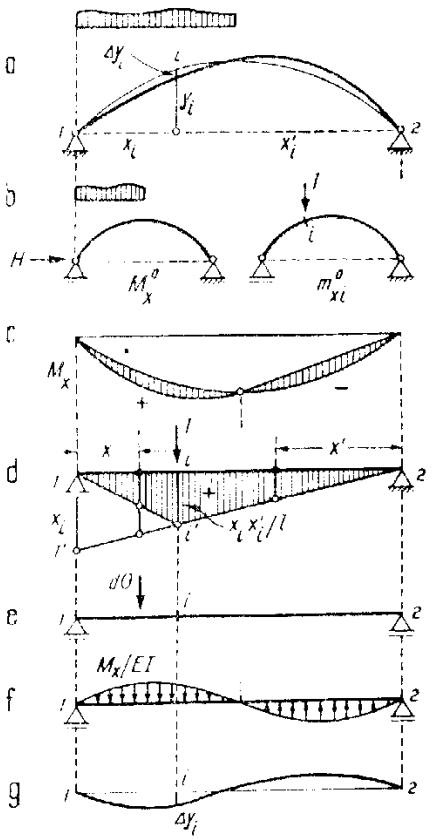


Fig. 265

Obișnuit, se lucrează cu sarcinile convenționale corectate

$$EI_c\,\mathrm{d}\theta = M_x\,\mathrm{d}s\,I_c/I = M_x\,\mathrm{d}\omega,$$
$$\text{unde } \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}s\,I_c/I$$

reprezintă lungimea transformată a elementului ds de arc, definită anterior prin relația (11.16). În consecință, încărcarea distribuită de pe grinda conjugată are intensitatea $M_x\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}x$, care în cazul admiterii legii de variație $I = I_c/\cos\varphi$ conduce la $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x$ și deci grinda conjugată se încarcă chiar cu diagrama de momente încovoietoare M_x a arcului dublu articulat. Calculul efectiv se face prin *bolțări*, împărțind arcul într-o succesiune de porțiuni ds, pentru care se determină sarcinile convenționale concentrate $M_j\Delta\omega_j$ corespunzătoare centrelor bolțarilor, care se aplică pe grinda conjugată. Se obține astfel poziția deformată a arcului ce corespunde unui calcul de ordinul I al eforturilor.

Dacă se admite aproximația că forțele axiale rămîn aceleași și în cazul raportării la poziția deformată, atunci împingerea H nu se schimbă și deci

$$M_x + \Delta M_x = M_x^0 - H(y - \Delta y), \text{ sau } \Delta M_x = H\Delta y, \qquad (15.70)$$

unde Δy poate fi pozitiv sau negativ (fig. 265, *g*). Trebuie însă remarcat, prin comparație cu diagrama M_x, că — în genere — în porțiunile unde M_x este pozitiv, Δy rezultă de asemenea pozitiv, după cum în porțiunile unde M_x este negativ, și Δy rezultă negativ. Înseamnă deci că ΔM_x *mărește* valoarea

momentului încovoietor inițial M_x, obținut printr-un calcul de ordinul I. Calculul de ordinul II, care este mai apropiat de realitate, pune astfel în evidență o situație mai defavorabilă.

Se poate introduce și o corectare aproximativă a împingerii sub forma

$$H+\Delta H\simeq\eta\frac{\int M_x^0(y-\Delta y)\,d\omega}{\int y^2 d\omega}\quad\text{și deci}\quad \Delta H\simeq-\eta\frac{\int M_x^0\,\Delta y\,d\omega}{\int y^2\,d\omega},$$

astfel că rezultă

$$M_x+\Delta M_x=M_x^0-(H+\Delta H)(y-\Delta y),\quad\text{sau}\quad \Delta M_x=H\Delta y-\Delta H(y-\Delta y),\quad (15.71)$$

unde ΔH și Δy se introduc cu semnele lor.

2. Calculul de stabilitate

a. **Relații generale pentru bare curbe plane.** Fie un arc de formă oarecare, cu rază de curbură inițială ρ_0 în secțiunea curentă, care devine ρ prin trecerea arcului în poziția deformată. Considerînd și aici condiția de echilibru static dintr-o secțiune oarecare a barei curbe elastice, asemănător ca pentru cazul barei drepte din figura 234, se ajunge la relația

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=-\frac{M}{EI},\qquad (15.72)$$

care reprezintă ecuația axei deformate a arcului.

Relațiile generale dintre sarcini și eforturi la bare curbe plane au fost stabilite anterior prin expresiile (3.1) și (3.2), anume

$$\frac{dN}{ds}=-p_t+\frac{T}{\rho},\qquad \frac{dT}{ds}=-p_n-\frac{N}{\rho},\qquad \frac{dM}{ds}=T,\qquad (15.73)$$

în care intervin notațiile din figura 39, *c*, unde s-a considerat echilibrul elementului ds de arc. Aceste relații de echilibru sînt aplicabile atît în condițiile calculului de ordinul I, cînd raportarea forțelor se face la poziția inițială (rază de curbură ρ_0) și eforturile sînt N^0, T^0, M^0, cît și în condițiile calculului de ordinul II cînd raportarea forțelor se face la poziția deformată (rază de curbură ρ) și eforturile sînt $N=N^0+N^*$, $T=T^0+T^*$, $M=M^0+M^*$.

Analog ca pentru eforturi, trebuie considerate și relațiile generale dintre deplasările secțiunii curente a arcului și deformările elementului corespunzător ds. Considerînd raportarea secțiunii arcului la tangenta și normala la arc, prin trecerea din poziția inițială în poziția deformată deplasările secțiunii sînt u, v, φ (fig. 266, *a*), avînd ca sensuri pozitive cele indicate în figură. Variațiile acestor deplasări pe elementul ds sînt du, dv, $d\varphi$, care reprezintă deplasările relative ce intervin între cele două fețe ale elementului datorită deformării. O cale simplă de stabilire a relațiilor generale este de a considera separat efectul fiecărei categorii de deplasări.

(1) *Translații ale elementului* (fig. 266, *b*). În translația după tangentă intervine variația du a lungimii elementului, în timp ce translației după normală în sensul pozitiv al deplasării v, îi corespunde o scurtare a axei elementului $v\,d\varphi_0$. Dacă se admite neglijarea deformării axiale totale, considerînd arcul incompresibil, rezultă condiția $du - v\,d\varphi_0 = 0$, sau

$$\frac{du}{ds} - v\frac{d\varphi_0}{ds} = \frac{du}{ds} - \frac{v}{\rho_0} = 0 \quad \text{și deci} \quad \frac{du}{ds} = \frac{v}{\rho_0}. \tag{15.74}$$

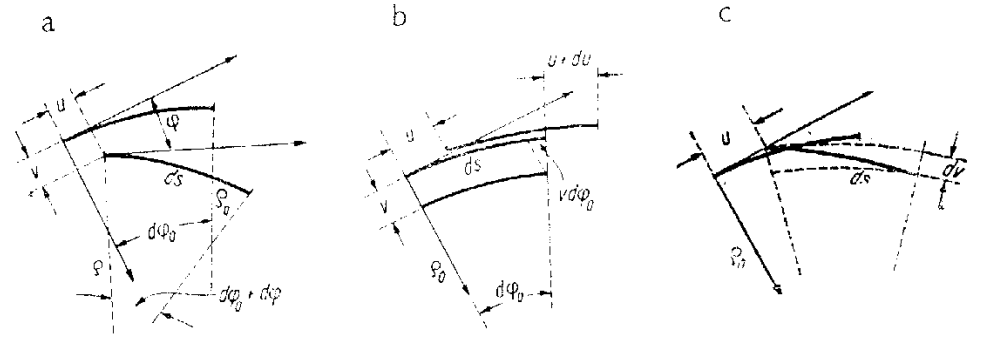


Fig. 266

(2) *Rotiri ale elementului* ds (fig. 266, *c*). Acestea provin atît de la deplasarea u după tangentă, căreia îi corespunde rotirea $\varphi_1 = u/\rho_0$, cît și de la variația dv a deplasării după normală, căreia îi corespunde rotirea $\varphi_2 = dv/ds$. Rezultă

$$\varphi = -\frac{u}{\rho_0} + \frac{dv}{ds} \quad \text{și deci} \quad \frac{dv}{ds} = \frac{u}{\rho_0} + \varphi. \tag{15.75}$$

(3) *Variația razei de curbură* (fig. 266, *a*). Comparînd poziția inițială cu poziția deformată, se scrie:

$$\frac{d\varphi_0}{ds} = \frac{1}{\rho_0} \quad \text{și} \quad \frac{d\varphi_0 + d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \text{deci} \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}. \tag{15.76}$$

Relațiile (15.72)—(15.76) sînt suficiente pentru studierea stabilității arcelor. Verificarea de stabilitate se face considerînd situații de încărcare ce produc numai eforturi de compresiune în arc, cum s-a admis și la structuri alcătuite din bare drepte. Asemenea situații sînt cunoscute de la calculul de ordinul I al arcelor, cînd s-au examinat cazuri de coincidență între curba de presiune și axa arcului, de exemplu încărcare radială uniform distribuită la arcul circular, încărcare uniform distribuită pe deschidere la arcul parabolic etc. Se știe că situația de coincidență se menține oricare ar fi rezemările arcului, dacă se admite neglijarea deformabilității axiale — cazul $\eta = 1$ în relațiile de forma (11.30) sau (11.50).

În continuare, sînt examinate cele două cazuri amintite.

b. **Stabilitatea arcului circular supus la presiune radială uniformă** (fig. 267, *a*). În acest caz $\rho_0 = R$ (raza cercului), $p_t = 0$ şi $p_n = p = const$. Datorită încărcării de coincidenţă, $T^0 = 0$ şi $M^0 = 0$, astfel că primele două relaţii (15.73), scrise pentru poziţia iniţială, devin

$$\frac{dN^0}{ds} = 0, \text{ deci } N^0 = const. \text{ şi } \frac{dT^0}{ds} = -\frac{N^0}{R} - p = 0, \text{ sau } N^0 = -pR.$$

Înseamnă că eforturile ce trebuie considerate în calculul de ordinul II sînt

$$N = -pR + N^*, \qquad T = T^*, \qquad M = M^*.$$

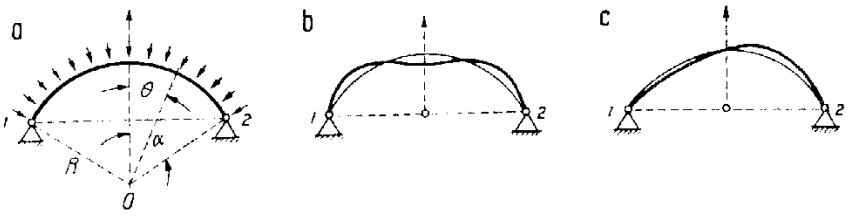


Fig. 267

Aceste eforturi se introduc în relaţiile (15.73), ţinînd seama că pentru poziţia deformată raza de curbură este ρ. Totuşi, se poate admite aproximaţia $R/\rho \simeq 1$ şi $ds = Rd\theta$, cu excepţia celei de a doua relaţii unde apare diferenţa curburilor dintre situaţia iniţială şi cea deformată, care trebuie menţinută ca atare. În consecinţă, relaţiile se scriu sub forma:

$$\frac{dN^*}{d\theta} = T^*, \quad \frac{dT^*}{d\theta} = -pR + \frac{pR^2}{\rho} - N^* = pR^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) - N^*, \quad \frac{dM^*}{d\theta} = T^*R. \tag{a}$$

Între aceste trei relaţii se elimină T^* şi N^*, ţinînd seama şi de relaţia (15.72):

$$\frac{dN^*}{d\theta} = T^* = \frac{1}{R}\frac{dM^*}{d\theta}, \qquad \frac{dT^*}{d\theta} = -pR^2\frac{M^*}{EI} - N^*,$$

$$\frac{d^2T^*}{d\theta^2} = -\frac{pR^2}{EI}\cdot\frac{dM^*}{d\theta}\frac{dN^*}{d\theta} = -\frac{1}{R}\left(1 + \frac{pR^3}{EI}\right)\frac{dM^*}{d\theta},$$

$$\frac{d^3M^*}{d\theta^3} = \frac{d^2T^*}{d\theta^2}\cdot R = -\left(1 + \frac{pR^3}{EI}\right)\frac{dM^*}{d\theta}.$$

care se mai poate scrie

$$(M^*)''' + n^2(M^*)' = 0, \quad \text{unde} \quad n^2 = 1 + pR^3/EI \tag{b}$$

este considerată o constantă a arcului. Se admite deci implicit că arcul are *secţiune constantă*. Soluţia ecuaţiei diferenţiale are forma

$$M^* = C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta + C_3. \tag{c}$$

Se pot găsi şi expresiile generale ale deplasărilor u, v şi φ. Pentru φ se utilizează relaţiile (15.72) şi (15.76):

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = R\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) = -R\frac{M^*}{EI} = -\frac{R}{EI}(C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta + C_3), \quad \text{deci}$$

$$\varphi = -\frac{R}{EI}\cdot\frac{1}{n}(C_1\sin n\theta - C_2\cos n\theta + C_3 n\theta) + C_4. \tag{d}$$

Pentru u și v se utilizează relațiile (15.74) și (15.75)

$$\frac{du}{d\theta}=v \quad \text{și} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{dv}{d\theta}=-u+R\varphi, \quad \text{sau} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=R\varphi$$

și din integrarea acestei ecuații diferențiale rezultă:

$$u=C_5\cos\theta+C_6\sin\theta-\frac{R^2}{EI}\cdot\frac{1}{n(1-n^2)}\left[C_1\sin n\theta-C_2\cos n\theta\right]-\frac{R^2}{EI}C_3\theta+C_4R,$$

$$v=\frac{du}{d\theta}=-C_5\sin\theta+C_6\cos\theta-\frac{R^2}{EI}\cdot\frac{1}{1-n^2}\left[C_1\cos n\theta+C_2\sin n\theta\right]-\frac{R^2}{EI}C_3. \tag{e}$$

Se cunosc astfel expresiile momentului încovoietor M^* și ale deplasărilor u, v și φ din secțiunea curentă a arcului, în care intervin un număr de șase constante $C_1, \cdots C_6$, care se determină pe baza condițiilor de rezemare de la extremități.

Arcul circular încărcat cu presiune radială uniform repartizată prezintă o situație de *simetrie*, astfel că deformata critică poate fi simetrică sau antisimetrică. În continuare trebuie deci examinate aceste două configurații, care aduc simplificări relațiilor (b)–(e).

Deformată simetrică (fig. 267, *b*). Este caracterizată de faptul că deplasările v se produc simetric, iar în axa de simetrie deplasarea u este nulă. Prima condiție arată că în expresia lui u trebuie reținuți numai termenii în cosinus, deci $C_2=C_5=0$, iar a doua condiție impusă pentru $\theta=0$ conduce la $C_4=0$. Expresiile se reduc la forma:

$$M^*=C_1\cos n\theta+C_3, \qquad \varphi=\frac{R}{EI}\cdot\frac{1}{n}(C_1\sin n\theta+C_3n\theta).$$

$$u=C_6\sin\theta-C_1\frac{R^2}{n(1-n^2)EI}\sin n\theta-C_3\frac{R^2}{3EI}\theta \tag{f}$$

$$v=C_6\cos\theta-C_1\frac{R^2}{(1-n^2)EI}\cos n\theta-C_3\frac{R^2}{EI}.$$

Deformata antisimetrică (fig. 267, *c*). În acest caz variația deplasării v trebuie să fie antisimetrică și deci în expresia sa se reține numai termenii în sinus, ceea ce conduce la $C_1=C_6=0$. De asemenea, pentru $\theta=0$ trebuie ca $M^*=0$ și deci $C_3=0$. Expresiile devin:

$$M^*=C_2\sin n\theta, \qquad \varphi=C_2\frac{R}{nEI}\cos n\theta+C_4,$$

$$u=C_5\cos\theta+C_2\frac{R^2}{n(1-n^2)EI}\cos n\theta+C_4R, \tag{g}$$

$$v=-C_5\sin\theta-C_2\frac{R^2}{(1-n^2)EI}\sin n\theta.$$

Constantele rămase se determină din condițiile de rezemare de la extremitățile barei curbe. Pentru exemplificare, se consideră cazul arcului circular *dublu articulat*, urmînd să se examineze în paralel cele două forme de pierdere a stabilității.

— *Deformată critică antisimetrică.* Pentru $\theta=\pm\alpha$ trebuie ca $M^*=0$, astfel că din prima relație (g) rezultă $\sin n\alpha=0$ și deci $n\alpha=i\pi$. Sarcina critică minimă se obține pentru $i=1$, deci $n\alpha=\pi$, unde ținînd seama de relația de definiție (b) se ajunge la

$$n^2=\frac{\pi^2}{\alpha^2}=1+\frac{pR^3}{EI} \quad \text{și deci} \quad p_{cr}=\frac{EI}{R^3}\left|\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1\right|. \tag{h}$$

Pentru un caz particular, de exemplu $\alpha=60^0$, rezultă $p_{cr}=8EI/R^3$.

— *Deformată critică simetrică.* Pentru $\theta=\pm\alpha$ trebuie și în acest caz ca $M^*=0$, astfel că din prima relație (f) rezultă

$$C_1\cos n\alpha+C_3=0, \text{ sau } C_3=-C_1\cos n\alpha.$$

Alte două condiții pentru $\theta=\pm\alpha$ sînt $u=0$ și $v=0$; din expresiile corespunzătoare (f) se găsește:

$$u=C_6\sin\alpha-C_1\frac{R^2}{n(1-n^2)EI}\sin n\alpha+C_1\frac{R^2}{EI}\alpha\cos n\alpha=0,$$

$$v=C_6\cos\alpha-C_1\frac{R^2}{(1-n^2)EI}\cos n\alpha-C_1\frac{R^2}{EI}\cos n\alpha=0,$$

care se mai pot scrie sub forma relațiilor omogene:

$$C_6\sin\alpha+C_1\frac{R^2}{EI}\cos n\alpha\left[\alpha-\frac{\operatorname{tg} n\alpha}{n(1-n^2)}\right]=0.$$

$$C_6\cos\alpha+C_1\frac{R^2}{EI}\cos n\alpha\left[1-\frac{1}{1-n^2}\right]=0.$$

Existența unei deformate critice simetrice impune ca cele două constante de integrare C_1 și C_6 să fie diferite de zero, rezultînd ecuația de stabilitate

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \alpha-\dfrac{\operatorname{tg} n\alpha}{n(1-n^2)}\\ \cos\alpha & -\dfrac{n^2}{1-n^2}\end{vmatrix}=0, \quad \text{sau} \quad n^3(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)=\operatorname{tg} n\alpha-n\alpha, \tag{i}$$

din care se obține constanta n și apoi mărimea sarcinii critice din relația (b)[1]. Ecuația se rezolvă prin încercări. Astfel, pentru exemplul $\alpha=60^0=\pi/3=1{,}047$, se găsește $n=4{,}49$ și deci

$$n^2=1+pR^3/EI=20{,}16, \text{ sau } p_{cr}=19{,}16\,EI/R^3.$$

Comparînd rezultatele obținute pentru cele două forme de pierdere a stabilității, se constată că la arcul dublu articulat deformata critică este antisimetrică.

Asemănător se rezolvă și celelalte două tipuri de arc (dublu încastrat și triplu articulat). Mărimea sarcinii critice se poate pune sub forma

$$p_{cr}=\psi EI/R^3,$$

coeficienții ψ fiind dați în tabela din figura 268 pentru cîteva valori ale unghiului la centru α. Din tabelă se constată că pentru arce dublu încastrate sau dublu articulate pierderea de stabilitate se produce antisimetric, în timp ce pentru arcul triplu articulat se produce simetric, datorită posibilității de rotire relativă liberă în articulația centrală. Valorile din tabelă sînt date pentru arce cu secțiune constantă.

c. **Arc parabolic încărcat cu sarcină uniform distribuită.** Un studiu similar se poate face pentru acest tip de arc, considerat de asemenea cu secțiune constantă. Sarcina critică se exprimă de data aceasta sub forma

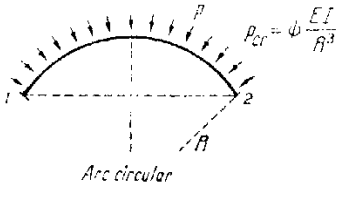
$$P_{cr}=\psi\,EI/l^3,$$

în care l este deschiderea arcului și unde coeficientul α variază în funcție de raportul f/l. În tabela din figura 268 sînt reproduse valorile lui ψ pentru cele trei tipuri de rezemări. Se

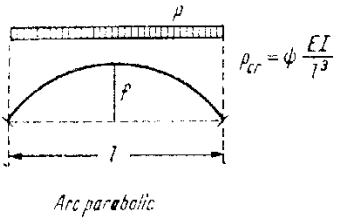
[1] În ecuația de stabilitate (i) nu s-a reținut și alternativa $\cos n\alpha=0$, deoarece pentru $\alpha=90^0$ se ajunge la soluția $n=1$, incompatibilă cu relația de definiție (b).

constată și aici că la arcul dublu încastrat sau dublu articulat pierderea de stabilitate se produce antisimetric, în timp ce pentru arcul triplu articulat trebuie comparate valorile din cele două coloane.

În cazul arcelor cu secțiune variabilă calculul de stabilitate devine mai complicat. În literatura de specialitate, cum sînt de exemplu lucrările lui A.N. Dinnik consacrate stabilității arcelor, sînt date tabele de coeficienți ψ pentru anumite legi de variație a momentului de inerție, la arce circulare și parabolice.



Arc circular



Arc parabolic

Rezemări	Deformată	Dublu încastrat		Dublu articulat		Triplu articulat	
		simetric	antisim.	simetric	antisim.	simetric	antisim.
Arc circular unghi la centru α	30^0	120,3	74,3	79,2	35,0	27,6	35,0
	45^0	53,2	32,4	34,7	15,0	12,0	15,0
	60^0	29,7	19,1	19,1	8,0	6,7	8,0
	75^0	18,8	11,8	11,0	4,8	4,8	4,8
	90^0	12,9	8,0	8,0	3,0	3,0	3,0
Arc parabolic raport f/l	0,2		101,0		45,4	39,6	45,4
	0,3		115,0		46,5	47,3	46,5
	0,4		111,0		43,9	49,2	43,9
	0,6		83,8		30,5	38,0	30,5
	0,8		59,1		20,0	28,8	20,0
	1,0		43,7		14,1	22,1	14,1

Fig. 268

d. **Reducerea la contururi poligonale.** (fig. 269). O posibilitate de verificare a stabilității arcelor, cu caracter aproximativ, constă în reducerea axei la un contur poligonal, care poate fi apoi asimilat cu un cadru cu noduri deplasabile. Sarcinile distribuite pe axa arcului se reduc la noduri, sub formă de sarcini concentrate. Numărul laturilor conturului nu trebuie să fie prea mare, pentru a păstra simplitatea calculului; o aproximație satisfăcătoare se poate obține pentru 4—6 laturi, după mărimea deschiderii.

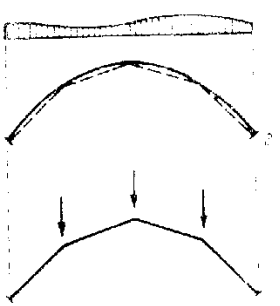


Fig. 269

Cînd arcul și încărcarea sînt simetrice, se utilizează procedeul semistructurilor, considerînd deformata critică simetrică și cea antisimetrică. Aceasta revine la a studia separat pierderea de stabilitate pentru fiecare dintre cele două semistructuri.

CAPITOLUL XVI

ELEMENTE DE CALCULUL STRUCTURILOR ÎN DOMENIUL PLASTIC

A. GENERALITĂȚI

1. Aspecte introductive

În capitolele precedente, la baza studiului structurilor static nedeterminate a stat considerarea stadiului de comportare perfect elastică a materialului; aceasta corespunde în genere situației construcției în condiții de *exploatare*. Cît timp ne găsim în acest stadiu și deformarea se menține în domeniul micilor deplasări, toate efectele (eforturi și deplasări) cresc proporțional cu creșterea mărimii sarcinilor aplicate. În aceste condiții, se admite că structura a ajuns în situația limită din punctul de vedere al rezistenței, cînd în fibra extremă a secțiunii celei mai solicitate efortul unitar are valoarea σ_c din curba caracteristică simplificată Prandtl (v. fig. 109). Față de această situație limită se stabilește coeficientul de siguranță.

Calculul structurilor static nedeterminate în domeniul elastic s-a dezvoltat în decursul timpului și a ajuns la forme generale teoretice închegate, precum și la sistematizări de aplicare eficientă, pe care le-am examinat anterior. Justificarea acestui mod de calcul stă în concordanța bună, deseori acoperitoare, a rezultatelor obținute prin calcul cu cele găsite prin încercări și măsurători efectuate pe modele sau pe construcții la scară naturală.

Totuși, calculului în domeniul elastic i se pot aduce și critici serioase:

— Situația limită considerată nu reprezintă o limită naturală în comportarea structurii, ci are caracter convențional. Atingerea limitei de curgere în fibra extremă dintr-o anumită secțiune nu epuizează în genere capacitatea portantă a structurii, care poate suporta în continuare anumite creșteri ale sarcinilor. Experiența arată că structurile static nedeterminate au o capacitate portantă mai mare, datorită legăturilor suplimentare și a imposibilității practice de a realiza integral construcții de egală rezistență. Deseori, sarcinile pot crește cu 30—40% și chiar mai mult, pînă să se ajungă la pierderea efectivă a capacității portante, printr-o rapidă și puternică accentuare a deformării. Situația limită a structurii este deci cu totul alta decît cea a secțiunii celei mai solicitate din stadiul de comportare elastică. Nedeterminarea statică ascunde de obicei rezerve importante de rezistență, pe care calculul în domeniul elastic nu le poate prinde.

— La structurile calculate în domeniul elastic, deşi coeficientul de siguranţă considerat este acelaşi, în fapt rezervele de rezistenţă diferă de la o structură la alta, în raport cu alcătuirea, dimensionarea secţiunilor etc. Astfel, structurile static determinate nu au practic rezerve suplimentare, în timp ce structurile multiplu static nedeterminate pot conduce la rezerve importante. Înseamnă că în realitate coeficienţii lor de siguranţă sînt diferiţi, astfel că diferitele construcţii realizate nu sînt comparabile din acest punct de vedere. Desigur, o asemenea situaţie nu poate fi prin nimic justificată şi constituie un inconvenient vădit al calculului în domeniul elastic.

— Experienţa arată că anumite imperfecţiuni ce pot să apară la o structură, cum sînt cedările de reazeme, rigiditatea incompletă a nodurilor etc., nu au în genere o influenţă sensibilă asupra capacităţii portante, în dezacord cu rezultatele calculului în domeniul elastic, care conduce la modificări substanţiale în repartizarea eforturilor.

Aceste inconveniente au făcut ca problema capacităţii portante să fie abordată şi de pe o altă poziţie, admiţîndu-se ca stare limită momentul *cedării* structurii sub acţiunea sarcinilor ce o acţionează şi faţă de aceasta să se stabilească un coeficient de siguranţă adecvat. Se ia astfel ca bază o limită naturală în comportarea structurii, la care se ajunge însă numai după ce în anumite părţi materialul a depăşit comportarea elastică, intrînd pe palierul de curgere. Înseamnă că în ansamblul structurii intervin acum comportări diferite, unele părţi rămînînd în stadiul elastic, în timp ce altele se găsesc în stadiul plastic. Această situaţie se subînţelege cînd se vorbeşte despre „calculul în domeniul plastic".

Un asemenea calcul implică cercetarea unor probleme complexe, legate de modul cum se comportă construcţia în preajma momentului cînd cedarea plastică devine iminentă. Cercetările experimentale capătă caracter hotărîtor în stabilirea metodicii de calcul. Comportarea materialelor este diferită dincolo de limita elastică, şi deci nu se mai poate face abstracţie de natura materialului folosit, ca în domeniul elastic. Totodată , pot apărea numeroase alte fenomene care influenţează hotărîtor comportarea structurii, cum sînt posibilităţile de pierdere a stabilităţii (în special locale) înainte de a se ajunge la epuizarea capacităţii portante, influenţa sarcinilor care se aplică repetat, influenţa alcătuirii elementelor structurii şi a prinderilor dintre elemente etc.

Aceste probleme preocupă de cîteva decenii pe mulţi cercetători, care caută pe de o parte să lămurească cît mai complet fenomenele complexe din preajma cedării plastice, iar pe de altă parte să ajungă la metode de calcul care să asigure o proiectare sigură şi simplă a structurilor de rezistenţă. Deocamdată s-a ajuns la etapa de cristalizare a acestor preocupări, dar concluziile obţinute se aplică încă destul de restrîns în proiectare, numai la anumite tipuri de structuri şi numai în anumite condiţii.

Este util de arătat de la început că metodele de calcul în domeniul plastic nu sînt sortite să înlocuiască pe cele din domeniul elastic, ci să le completeze. La structuri alcătuite din materiale care se comportă favorabil în domeniul plastic (cum este oţelul moale), aceste metode pot da o imagine mai apropiată de realitate asupra capacităţii portante a structurii. Cînd criteriul prin-

cipal de dimensionare este cel al rezistenței structurii și nu apar cerințe deosebite referitor la deformabilitate, considerarea comportării elasto-plastice a structurii poate conduce la economii de material în condiții corespunzătoare de siguranță.

În cele ce urmează se dau unele elemente privind calculul în domeniul plastic al structurilor static nedeterminate *solicitate dominant la încovoiere* (grinzi, cadre). Spre deosebire de capitolele precedente, unde calculul în domeniul elastic a fost prezentat în formă generală, care este complet închegată și se aplică la orice categorie de structuri, aici ne vom limita la unele elemente de orientare privind specificul calculului în domeniul plastic, precum și la anumite procedee mai des întîlnite pentru determinarea capacității portante. Se precizează că sînt abordate numai problemele cedării plastice, admițînd că prin alcătuirea structurii sînt luate toate măsurile care să elimine orice posibilitate de pierdere a stabilității înainte de a se produce cedarea.

2. Constatări privind comportarea structurilor în domeniul plastic

Vom începe cu examinarea unor cazuri simple, urmărind ce se întîmplă după depășirea stadiului de comportare elastică, pentru a pune în evidență elementele noi care apar în legătură cu ipotezele simplificatoare și cu condițiile ce stau la baza calculului.

Fie o grindă dublu încastrată, încărcată simetric cu două sarcini P (fig. 270, *a*). Cînd grinda se comportă elastic și sarcinile date cresc, diagrama de momente încovoietoare arată că în figură (haşurat) și ordonatele sale cresc proporțional. Admițînd că $M_1 > M_2$, înseamnă că la un moment dat $M_1 = M_p$, unde M_p este momentul plastic total al secțiunii (cel mai mare moment pe care îl poate suporta secțiunea, integral plasticizată). Se știe din Rezistența materialelor că în această situație se formează o *articulație plastică*, în care rotirea relativă poate crește liber, în timp ce M_p rămîne constant. Pentru surplusul de sarcină, grinda se comportă ca simplu rezemată și ordonatele M_2 cresc pînă ce $M_2 = M_p$, cînd și în această secțiune apare o articulație plastică. Acum, grinda își pierde capacitatea portantă, deoarece articulațiile plastice formate permit o accentuare puternică a deformării, sistemul funcționînd ca un mecanism după schema din figura 270, *b*.

În diagrama din figura 270, *c* este arătată schematic evoluția momentelor încovoietoare din secțiuni, de unde apare limpede că după depășirea stadiului elastic M_1 rămîne constant, în timp ce M_2 își accentuează creșterea, pînă cînd ambele momente devin egale cu M_p. În figura 270, *d* este arătată variația mărimii deplasării pe verticală Δ din secțiunea centrală a grinzii. Se vede că, după formarea articulațiilor plastice din extremități, deformarea se accentuează, iar cînd apar și articulațiile plastice din celelalte două secțiuni, grinda capătă deformații mari fără ca sarcinile să mai crească.

Pentru grinda continuă din figura 270, *e*, situația este asemănătoare. În domeniul elastic, diagrama de momente încovoietoare are forma din figură (haşurat) și ordonatele sale cresc proporțional, o dată cu sarcinile. Cînd M_2

atinge valoarea M_p, în secțiunea de pe reazemul central apare o articulație plastică, și deci pentru surplusul de sarcină cele două deschideri lucrează ca simplu rezemate, ordonatele M_i crescînd și ele pînă la valoarea M_p. Formarea de articulații plastice în aceste secțiuni produce cedarea plastică, deoarece s-a creat mecanismul din figura 270, *g*.

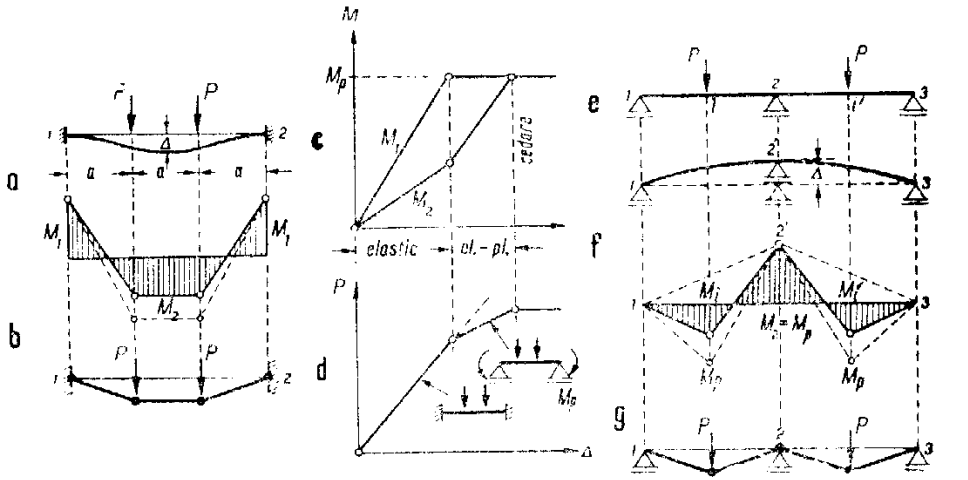


Fig. 270

Să considerăm acum că, înainte de aplicarea sarcinilor, se impune o denivelare Δ în reazemul central (fig. 270, *f*), deformînd grinda pînă cînd $M_2 = M_p$, astfel că momentul încovoietor din această secțiune nu mai poate crește; diagrama de momente încovoietoare este formată din două triunghiuri și are forma *1-2'-3*. Din punctul de vedere al calculului în domeniul elastic, grinda nu mai poate suporta altă încărcare, care ar implica o creștere a momentului M_2. Experiența arată însă că, dacă se aplică acum sarcinile P a căror mărime crește progresiv, grinda poate să le suporte pînă ating aceeași mărime ca în cazul din figura 270, *e*. În final se ajunge deci la aceeași diagramă de momente încovoietoare pentru ambele cazuri, astfel că denivelarea impusă inițial nu are efect asupra capacității portante. Explicația apare imediat dacă se ține seama că, la atingerea valorii $M_2 = M_p$, în secțiunea de pe reazem apare o articulație plastică, care permite în continuare o rotire relativă liberă. Cele două deschideri devin grinzi independente, iar aplicarea sarcinilor P conduce la suprapunerea unor diagrame triunghiulare de la linia de referință *1-2'-3*, definită de $M_2 = M_p = \text{const}$. Cele două cazuri diferă deci prin modul cum evoluează diagrama de momente încovoietoare, dar situația la cedare este aceeași (fig. 270, *g*).

Exemplele date pun în evidență cîteva constatări esențiale, cu caracter mai general:

(*a*) Apare limpede explicația rezervei de rezistență pe care o au îndeobște structurile static nedeterminate: structura trebuie să-și piardă mai întîi legăturile suplimentare spre a ajunge la epuizarea capacității portante.

(*b*) Pentru cercetarea comportării structurilor dominate de încovoiere, dincolo de limita domeniului elastic, este esențială noțiunea de *articulație plastică*, cunoscută din Rezistența materialelor. Aceasta este o denumire convențională, simplificatoare, specifică structurilor alcătuite dintr-un material care are *palier lung de curgere*, cum este oțelul moale. Cînd sarcinile cresc, în vecinătatea secțiunii unde $M_{max}=M_p$ se creează situația arătată în figura 271, *c*. Plasticizarea materialului se produce pe o anumită regiune din grindă, dar adîncimea de pătrundere variază; în dreptul secțiunii plasticizarea este totală, iar pe măsura îndepărtării de aceasta crește înălțimea zonei de comportare elastică, pînă cînd se ajunge ca numai în fibra extremă efortul unitar să aibă valoarea σ_c. Cînd materialul are palier lung de curgere, pe înălțimea plasticizată deformarea se poate produce liber, fără pericol de rupere. Se ajunge astfel la o accentuare a deformării materialului, în special în vecinătatea imediată a secțiunii considerate, unde pătrunderea plasticizării este mai mare. Se creează o situație oarecum similară celei dintr-o articulație, în sensul că între cele două porțiuni ale grinzii apare o rotire relativă, pe o zonă suficient de localizată. Prin schematizare, se ajunge la imaginea din figura 271, *c*, care permite să se accepte aproximația de a se considera că articulația plastică este *punctuală* și apare în secțiunea unde $M_{max}=M_p$.

Prin natura sa, articulația plastică este unilaterală: rotirea relativă dintre cele două porțiuni de grindă se poate produce numai *într-un singur sens*, spre partea fibrei întinse corespunzătoare momentului încovoietor care produce plasticizarea materialului.

(*c*) Cedarea plastică nu reprezintă un fenomen brusc — bine marcat — ca o rupere, ci constă dintr-o accentuare puternică și necontrolabilă a deformării. Ea este definită teoretic prin momentul cînd, pentru întreaga structură sau pentru o parte a ei, pot surveni deformări fără o variație a mărimii sarcinilor. Cedarea apare cînd articulațiile plastice formate succesiv sînt în număr suficient și au o asemenea distribuție, încît structura sau partea de structură în cauză se transformă într-un mecanism — *mecanismul de cedare*. În consecință, deformarea ulterioară se datorește *numai rotirilor relative ce se produc în articulațiile plastice*, porțiunile structurii cuprinse între aceste articulații comportîndu-se drept corpuri rigide.

(*d*) Depășirea domeniului de comportare elastică a structurii face să nu mai fie aplicabilă legea proporționalității, cum se vede în diagramele din figurile 270, *d* și *e*. Astfel, pe parcursul creșterii sarcinilor, se plafonează succesiv la valoarea M_p momentele încovoietoare din anumite secțiuni, în timp ce în alte secțiuni momentele încovoietoare își accentuează creșterea. De asemenea, deplasările își mărește ritmul de creștere pe măsură ce structura pierde din legăturile suplimentare, prin formarea succesivă de articulații plastice. Dispariția proporționalității are o consecință importantă, deoarece elimină cea de-a doua ipoteză simplificatoare a Staticii construcțiilor: *nu mai este aplicabilă suprapunerea liniară a efectelor*. Înseamnă că fiecare situație de încărcare a structurii trebuie tratată ca atare.

Privitor la prima ipoteză simplificatoare, anume raportarea ecuațiilor de echilibru static la poziția inițială a structurii, care este condiționată numai de încadrarea în domeniul micilor deplasări, aceasta se aplică și la calculul în domeniul plastic. Deplasările ce se produc înainte de a se ajunge la cedare, deși sînt mai accentuate decît în domeniul elastic, totuși rămîn destul de mici spre a se admite aceeași aproximație.

(*c*) Cît timp structura se găsește în domeniul elastic, situația de echilibru elastic este caracterizată prin: (1) condiția de echilibru static, (2) condiția de compatibilitate a deformatei, (3) condiția de elasticitate (peste tot $\sigma \leqslant \sigma_c$). Trecînd la situația de echilibru limită, cînd cedarea plastică devine iminentă, condiția de echilibru static se menține, avînd caracter universal. Condiția de compatibilitate a deformatei nu mai poate subzista, deoarece pe măsură ce sarcinile cresc structura pierde succesiv legături. În locul acesteia intervine *condiția de mecanism*, care caracterizează momentul cedării plastice: numai prin apariția mecanismului cedarea devine posibilă. Cea de-a treia condiție este acum *condiția de plasticitate*, anume că în nici o secțiune a structurii valoarea M_p respectivă nu este depășită.

Înseamnă că pentru determinarea cedării plastice trebuie impuse tot trei condiții: (1) condiția de echilibru static, (2) condiția de mecanism, (3) condiția de plasticitate.

3. Evaluarea momentului plastic total

Ne vom referi aici la structuri realizate din oțel moale, la care σ_c este același la întindere și la compresiune: palierul lung de curgere asigură producerea liberă a rotirilor relative din articulațiile plastice. O simplificare substanțială rezultă considerînd cazul încovoierii pure la determinarea mărimii momentului plastic total M_p, care caracterizează capacitatea portantă a secțiunii. Așa cum este cunoscut din Rezistența materialelor, se admite ipoteza lui Bernoulli, a secțiunilor plane care rămîn plane și după deformare.

Față de configurația diagramei de momente încovoietoare (fig. 271, *a*), evoluția situației dintr-o secțiune în care apare o ordonată M_{max} se vede în figura 271, *b*. Cît timp secțiunea se găsește în domeniul elastic, în fibra extremă $\sigma \leqslant \sigma_c$ și distribuția eforturilor variază liniar (figura din stînga). Deci

$$M = \sigma \cdot I / y_{max} = \sigma W_e \text{ și } M_c = \sigma_c W_e, \tag{16.1}$$

unde a doua relație este scrisă pentru limita stadiului elastic, cînd în fibra extremă $\sigma = \sigma_c$, iar M_c reprezintă momentul încovoietor pe care îl poate suporta secțiunea în această situație. Cantitatea W_e este modulul de rezistență elastic al secțiunii; axa neutră trece prin centrul de greutate.

Cînd solicitarea crește, plasticizarea începe să pătrundă în secțiune (figura din mijloc), astfel că numai partea centrală — de înălțime h_e — continuă să se comporte elastic. Poziția axei neutre și valoarea corespunzătoare a momentului încovoietor se obțin din echilibrul secțiunii; rezultă expresii în care variabila este h_e. Se ajunge la situația limită cînd plasticizarea tinde să ocupe

întreaga înălțime a secțiunii; pentru simplificare, se admite distribuția arătată în figura din dreapta, deși aceasta nu se poate realiza efectiv (în partea centrală a secțiunii rămîne totdeauna o mică zonă elastică, în care se face trecerea de la $+\sigma_c$ la $-\sigma_c$).

Din echilibrul secțiunii se obține mai întîi $\sigma_c A_p^{(t)} = \sigma_c A_p^{(c)}$, unde $A_p^{(t)}$ și $A_p^{(c)}$ sînt ariile zonelor întinsă și comprimată de pe secțiune. Această relație definește poziția axei neutre, care împarte secțiunea *în două părți egale*. Se scrie în continuare ecuația de momente

$$M_p = \sigma_c [S^{(t)} + S^{(c)}] = \sigma_c W_p,$$
$$\text{unde } W_p = S^{(t)} + S^{(c)} \qquad (16.2)$$

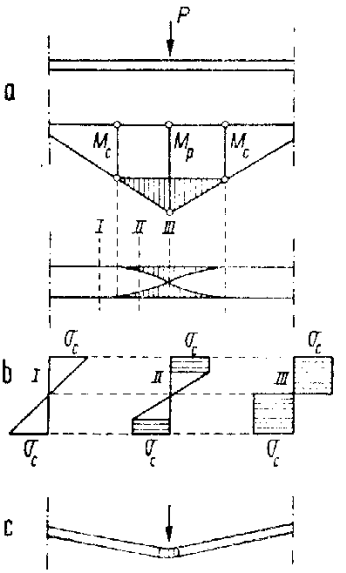


Fig. 271

reprezintă modulul de rezistență plastic al secțiunii, care este egal cu suma momentelor statice ale celor două zone ale secțiunii, în raport cu axa neutră. Se obține astfel pentru M_p o expresie similară cu (16.1). Comparînd cele două stadii, rezultă

$$\frac{M_p}{M_c} = \frac{W_p}{W_e},$$

sau $M_p = M_c \cdot W_p/W_e = \nu M_c = \nu\, \sigma_c W_e$, (16.3)
unde s-a introdus raportul $\nu = W_p/W_e$, numit *coeficient de formă al secțiunii*. Valoarea acestui coeficient este $\nu = 1{,}5$ pentru secțiuni dreptunghiulare și $\nu = 1{,}15 - 1{,}17$ pentru secțiuni *I*. Înseamnă că $M_p > M_c$, și deci pătrunderea plasticizării în secțiune îi mărește capacitatea portantă față de limita domeniului de comportare elastică. Această diferență reprezintă *rezerva de rezistență a secțiunii*.

Expresia (16.3) corespunde încovoierii pure. În secțiunile cadrelor se dezvoltă însă și eforturile N și T, al căror efect este de a reduce mărimea momentului M_p. În cazuri curente, aceste reduceri sînt destul de mici. Astfel, pentru secțiuni dreptunghiulare supuse la moment încovoietor și forță axială se găsește

$$M_p^*/M_p = 1 - (\sigma/\sigma_c)^2,$$

unde M_p^* reprezintă momentul plastic corectat, iar σ este efortul unitar dat numai de forța axială; cît timp $\sigma \leqslant 0{,}25\,\sigma_c$, efectul lui N asupra lui M_p este neînsemnat. Pornind de la constatări de acest fel[1], se admite ca inițial valoarea M_p să se evalueze din expresia (16.3), urmînd ca reducerile aduse de N și T să se considere numai la sfîrșit, pentru verificarea dimensionării, după ce s-au determinat diagramele de eforturi.

[1] O examinare mai detaliată a acestor probleme revine cursurilor de Rezistența materialelor și Construcții metalice.

B. REZOLVAREA DIRECTĂ ÎN CAZURI SIMPLE

1. Grinzi static nedeterminate

Determinarea capacității portante poate fi făcută cu ușurință în cazuri simple, cînd sarcinile aplicate *cresc proporțional*, utilizînd *concomitent* toate cele trei condiții ce caracterizează cedarea plastică. Se pornește de la stabilirea diagramei de momente încovoietoare corespunzătoare sarcinilor date, astfel ca să fie satisfăcută condiția de echilibru static. Pentru aceasta, se consideră de obicei un sistem de bază static determinat, pe care se trasează diagramele date de sarcini și de necunoscutele suplimentare. Combinarea acestora dă imaginea diagramei M totale, pe care se poate aprecia mecanismul de cedare probabil. În dreptul articulațiilor plastice din acest mecanism se impune în diagramă ca mărimea ordonatelor să fie egală cu M_p respectiv. Numărul ordonatelor obligate în acest mod este suficient pentru determinarea diagramei totale, precum și pentru stabilirea mărimii sarcinilor care produc cedarea. Rămîne să se controleze condiția de plasticitate, anume că în orice altă secțiune $M \leqslant M_p$.

Cele ce urmează se referă la grinzi cu secțiune constantă, aplicînd procedeul expus pe cîteva exemple.

a. **Grinda dublu încastrată.** Pentru o sarcină uniform distribuită, diagrama M în stadiul elastic se vede în figura 272, *a*; ordonate maxime apar în secțiunile extreme și în cea de la mijlocul deschiderii. Pentru cedare trebuie să se formeze trei articulații plastice, astfel că este un singur mecanism de cedare posibil. Cînd sarcinile cresc, se formează mai întîi articulații plastice în încastrările *1* și *2*; în continuare, pentru surplusul de sarcină grinda lucrează ca simplu rezemată, analog ca în cazul din figura 270, *b*. În final apare și articulația plastică de la mijlocul deschiderii, cum se vede în figura 272, *b*. În diagrama corespunzătoare de momente încovoietoare impunem ca ordonatele din dreptul articulațiilor plastice să aibă mărimea M_p. Întinderea zonelor pe care se produce plasticizarea în secțiuni rezultă delimitînd porțiunile de diagramă unde momentul încovoietor depășește valoarea M_c, ca în figură.

Pe baza diagramelor din figurile 272, *a* și *b*, se pot stabili următoarele:

— la limita stadiului elastic: $M_c = pl^2/12$ și deci $p_{el} = 12\, M_c/l$;

— la cedarea plastică: $2\, M_p = pl^2/8$ și deci $p_{max} = 16\, M_p/l$, astfel că se obține

$$\frac{p_{max}}{p_{el}} = \frac{4M_p}{3M_c} = 1{,}33\, \nu,$$

unde intervine coeficientul de formă ν al secțiunii. Se ajunge la concluzia că sporul de capacitate portantă datorit legăturilor suplimentare este de 33%, peste cel care provine de la rezerva de rezistență a secțiunii (coeficientul ν).

Situația este asemănătoare cînd pe grinda dublu încastrată acționează o sarcină concentrată (fig. 272, *c* și *d*). În stadiul elastic $M_1 \neq M_2$, pe cînd la cedarea plastică $M_1 = M_2 = M_p$, de asemenea și ordonata din dreptul sarcinii concentrate ajunge la valoarea M_p; rezultă

$$\frac{Pab}{l} = 2M_p \quad \text{și deci} \quad P_{max} = \frac{2l}{ab} M_p.$$

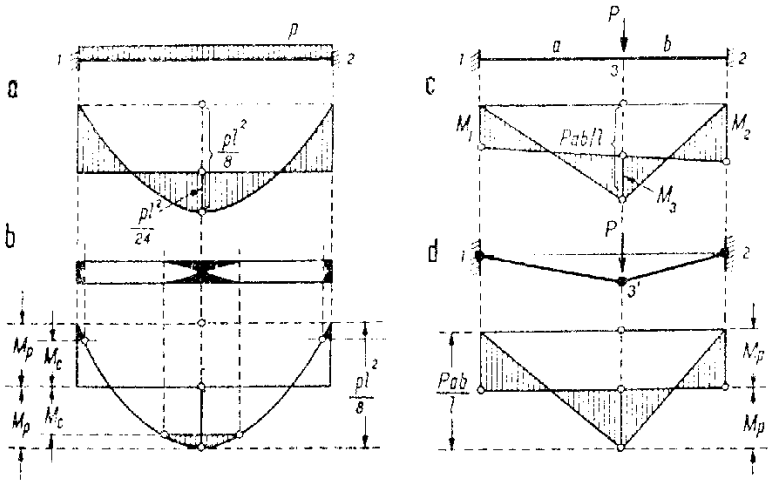


Fig. 272

Se cunoaște astfel sarcina maximă pe care o suportă grinda dată. Expresia se poate scrie și sub forma $M_p = P_{max} \cdot ab/2l$, care se aplică atunci cînd se dă sarcina maximă ce trebuie suportată și se cere să se aleagă grinda, pe baza valorii M_p necesar. Prima formă corespunde operației de verificare, iar a doua —operației de dimensionare.

b. **Grinda cu o încastrare și un reazem simplu.** Pentru încărcarea cu o sarcină concentrată, diagrama M în stadiul elastic se vede în figura 273, *a* și rezultă din suprapunerea diagramei date de forța P pe grinda simplu rezemată, cu diagrama triunghiulară ce corespunde momentului de continuitate M_1 din încastrare. Cedarea implică formarea a două articulații plastice, iar diagrama are numai două ordonate maxime, deci și aici există un singur mecanism de cedare plastică. Diagrama M respectivă se vede în figura 273, *b*, de unde se găsește

$$\frac{Pab}{l} = M_p + M_p \frac{b}{l}, \quad \text{sau} \quad P_{max} = \frac{l+b}{ab} M_p.$$

Situația este asemănătoare cînd pe grindă acționează o sarcină uniform distribuită, cu deosebirea că poziția articulației plastice în cuprinsul deschiderii nu este inițial cunoscută (fig. 273, *c* și *d*). Pentru determinare, se consideră situația din figura 273, *e*, unde s-a secționat grinda în dreptul acestei

articulații, ținînd seama că aici $T=0$ deoarece momentul încovoietor are valoare maximă. Din echilibrul celor două părți se obține

$$p(l-x)^2/2=2M_p \quad \text{și} \quad px^2/2=M_p, \quad \text{deci} \quad (l-x)^2=2x^2,$$

astfel că rezultă:

$$x=(\sqrt{2}-1)l \quad \text{și} \quad p_{max}=2(3+2\sqrt{2})M_p/l^2\simeq 11{,}65\,M_p/l^2. \tag{16.4}$$

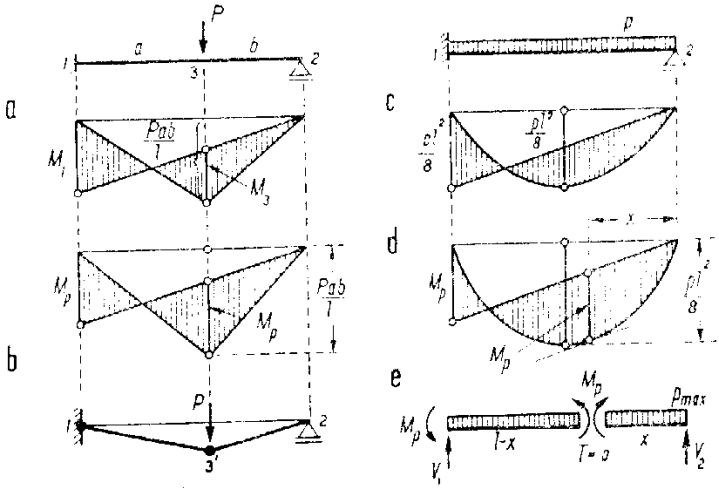


Fig. 273

Comparînd cu limita stadiului elastic, pentru care $p_{el}=8M_e/l^2$, rezultă

$$\frac{p_{max}}{p_{el}}=\frac{11{,}65\,M_p}{8\,M_e}=1{,}46\,\nu,$$

deci surplusul de capacitate portantă datorit nedeterminării statice este de 46%.

c. **Grinzi continue.** Pentru grinda continuă din figura 274, *a*, avînd trei deschideri egale și încărcată cu sarcini P aplicate la mijlocul deschiderilor, configurația diagramei de momente încovoietoare se obține trasînd mai întîi diagramele pentru fiecare deschidere ca simplu rezemată și suprapunînd apoi diagrama ce provine de la efectul de continuitate pe reazemele intermediare. Ordonatele maxime apar în dreptul sarcinilor concentrate, precum și în dreptul reazemelor centrale. Cînd grinda are secțiune constantă, nu se mai poate realiza un mecanism de cedare total, deoarece cele trei ordonate din dreptul sarcinilor nu sînt egale. Apar astfel mecanisme parțiale de cedare pe cele două deschideri marginale, cum se vede în figura inferioară. Impunînd valoarea M_p ordonatelor respective, se găsește $M_p+M_p/2=Pl/4$, și deci $P_{max}=6\,M_p/l$. Pentru această încărcare, deschiderea centrală rămîne în întregime în stadiul elastic, avînd încă o rezervă de rezistență care nu mai poate fi utilizată.

Cînd pe grindă ar acționa numai o singură sarcină concentrată în deschiderea centrală, situația este ca în figura 274, *b*; mecanismul de cedare se formează în această deschidere și impunerea celor trei ordonate M_p conduce la condiția $Pl/4=2M_p$, deci $P_{max}=8M_p/l$, valoare mai mare decît în cazul precedent. De data aceasta, deschiderile laterale rămîn în stadiul elastic. S-a admis implicit că aceste deschideri au rigiditate suficientă pentru a permite dezvoltarea momentelor M_p pe reazemele intermediare.

În figura 274, *c* s-a considerat aceeași grindă continuă pe trei deschideri, dar la care secțiunea variază de la o deschidere la alta ($2M_p/3$ în deschiderile laterale și M_p în deschiderea centrală); de asemenea și mărimile sarcinilor sînt diferite. Diagrama de momente încovoietoare se construiește și aici prin suprapunere, ca în figură, dar nu mai rezultă evident în care deschidere apare

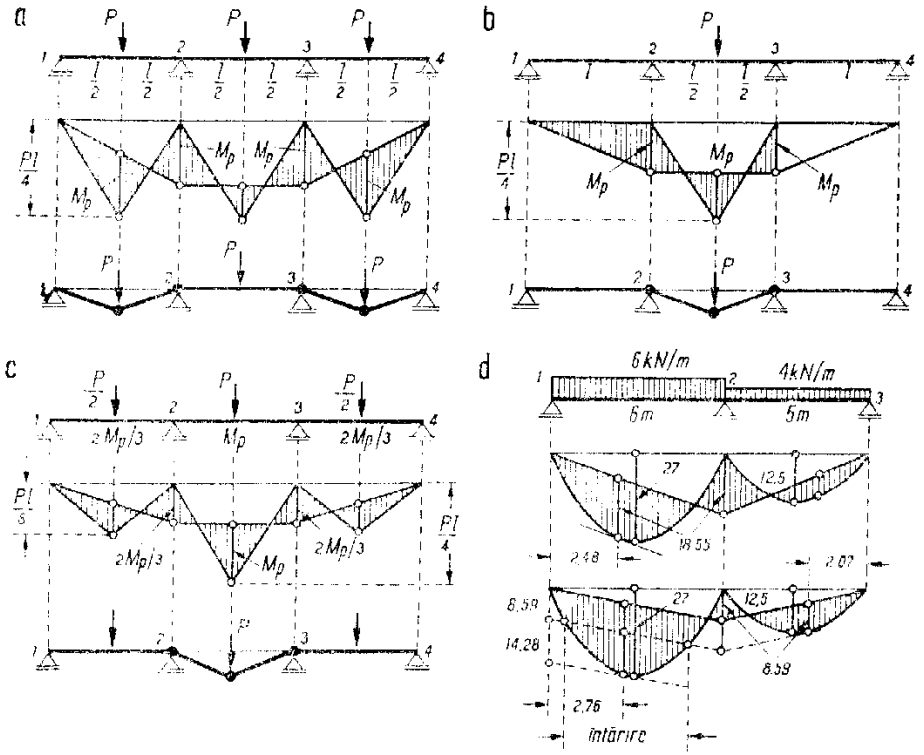


Fig. 274

mecanismul de cedare. Trebuie ținut seama că în secțiunea de pe reazem se va considera pentru momentul plastic total valoarea *cea mai mică*, deoarece articulația plastică se formează acolo unde secțiunea este mai slabă (în deschiderile laterale, imediat lîngă reazemele intermediare). Să presupunem că mecanismul de cedare apare în deschiderea centrală, așa cum s-a admis în figură; rezultă $M_p+2M_p/3=Pl/4$, și deci $P_{max}=20\,M_p/3l$. Rămîne de veri-

ficat condiția de plasticitate, determinînd mărimile ordonatelor maxime din deschiderile laterale

$$M = \frac{Pl}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,M_p}{3} = \frac{20}{24} M_p - \frac{1}{3} M_p = \frac{M_p}{2} < \frac{2\,M_p}{3},$$

deci condiția este îndeplinită și mecanismul de cedare considerat este cel corect. Deschiderile laterale rămîn în stadiul elastic. Este ușor de văzut că dacă făceam presupunerea că mecanismul de cedare apare în deschiderile laterale, se ajungea la o diagramă de momente încovoietoare care nu satisfăcea condiția de plasticitate, deci presupunerea nu era corectă.

Din exemplele studiate rezultă că prezența mecanismelor parțiale de cedare este în fond o dovadă de neeconomicitate în alcătuirea grinzii, deoarece unele părți rămîn cu o rezervă de rezistență prea mare, neutilizabilă. Se poate remedia aceasta recurgînd la variația de secțiune a grinzii. În figura 274, *d* este dat un exemplu de grindă continuă pe două deschideri inegale ca mărime și inegal încărcate. În prima diagramă s-a admis că grinda are *secțiune constantă*. Mecanismul de cedare se formează în deschiderea din stînga, comportînd o articulație plastică pe reazemul central și una în cuprinsul deschiderii. Situația este în totul similară celei din figura 274, *e*, astfel că se pot aplica expresiile (16.4). Pe această bază se ajunge la ordonatele maxime de 18,55 kNm din figură; rezultă totodată că deschiderea din dreapta este supradimensionată.

În a doua diagramă s-a admis o grindă de *secțiune minimă*, corespunzătoare formării mecanismului de cedare în deschiderea din dreapta. Procedînd în același mod, se obțin de data aceasta ordonate maxime de 8,59 kNm. În deschiderea din stînga apare însă o porțiune de grindă pentru care condiția de plasticitate nu este îndeplinită (linia punctată lasă dedesubt porțiunea de diagramă ce rămîne neacoperită). Pentru aceasta se recurge la întărirea grinzii prin mărirea secțiunii (de exemplu, prin adăugarea de plantbande la grinzi metalice); întărirea se face numai pe porțiunea necesară, pentru un surplus maxim de moment încovoietor de 14,28 kNm. Se ajunge astfel la un mecanism total de cedare, alcătuirea grinzii fiind făcută cu un consum minim de material.

2. Cadre simple

Procedeul utilizat la grinzi static nedeterminate poate fi aplicat și la cadre, dar rămîne avantajos numai în cazuri simple. Pentru exemplificare, fie cadrul dublu articulat din figura 275, *a*, care este acționat de sarcini oarecare P_1 și P_2 aplicate ca în figură. Cadrul are o singură nedeterminare statică, deci mecanismul de cedare comportă *două* articulații plastice. Considerînd separat cele două sarcini, diagramele M respective în domeniul elastic se văd în figurile 275, *b* și *c*. Rezultă că sînt în total trei ordonate maxime, în secțiunile *2*, *3* și *4*, deci numai acolo pot apărea articulații plastice. Din combinarea diagramelor se vede că în secțiunea *4* ordonatele se adună, deci acolo va apărea una dintre articulațiile plastice; cealaltă poate apărea în secțiunile *2* sau *3*, după cum este dominantă mărimea sarcinii P_1 sau P_2. Rezultă că sînt două mecanisme

de cedare posibile şi anume cele arătate în figura 275, *d*. Apare astfel o imagine calitativă a problemei.

Pentru rezolvare, se trece la un sistem static determinat suprimînd o legătură, de exemplu legătura corespunzătoare împingerii H_1, care devine necunoscuta suplimentară (fig. 275, *e*). Pe acest sistem se trasează diagramele de momente încovoietoare date de fiecare dintre sarcini, precum şi de necunoscuta

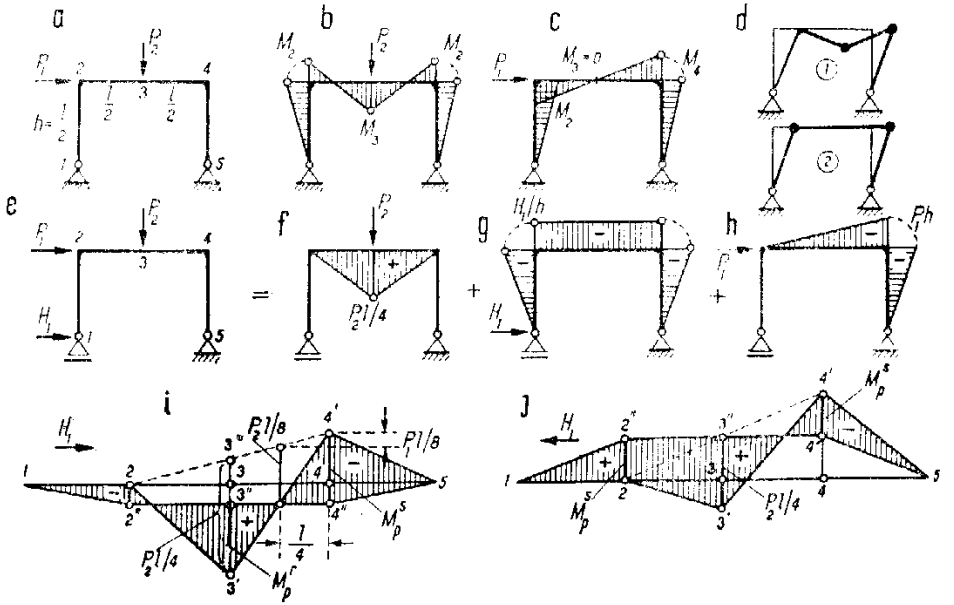


Fig. 275

suplimentară, cum se vede în figurile 275, *f-h*. Fiecare dintre aceste diagrame satisface condiţia de echilibru static şi este o parte componentă din diagrama totală, care rezultă prin combinarea lor. Admiţînd că sarcinile cresc proporţional, ca variabile apar raportul P_1/P_2 şi împingerea H_1. La combinare se va ţine seama că H_1 poate avea sens stînga-dreapta sau dreapta-stînga, conducînd la diagrame cu semne contrare. Combinarea diagramelor trebuie făcută astfel ca să rezulte ordonatele corespunzătoare unui mecanism de cedare. Se va ţine seama că pentru aceasta nu este suficient să se considere numai *mărimea* ordonatelor respective, ci şi *semnele* lor, care trebuie să corespundă sensurilor de funcţionare ale articulaţiilor plastice din mecanismul de cedare.

Cînd mărimea sarcinii P_2 domină, H_1 are sens stînga-dreapta; combinarea diagramelor este arătată în figura 275, *i*, unde axele celor trei bare ale cadrului au fost rabătute pe orizontală. Diagrama dată de sarcini — suprapuse — este mărginită de conturul *2-3'-4'*, unde $\overline{3''3'} = P_2l/4$ şi $\overline{4'4''} = P_1h = P_1l/2$, iar diagrama dată de H_1 este mărginită de conturul *1-2''-4''-5*, unde $\overline{22''} = \overline{44''} = H_1h = H_1l/2$. Din combinare rezultă diagrama haşurată, care corespunde

mecanismului (1) de cedare plastică. Se admite că momentele plastice totale pe riglă și pe stîlpi sînt egale (cadru de secțiune constantă, cu $M_p^r = M_p^s$); înseamnă că trebuie egalate ordonatele $\overline{3''3'}$ și $\overline{4'4''}$, deci dreapta $3'$-$4'$ se anulează la sfertul deschiderii. Prin corelații geometrice rezultă

$$M_p^r = M_p^s = P_2 l/8 + P_1 l/8 = (P_1 + P_2) l/8,$$

relație care permite dimensionarea secțiunilor cadrului în funcție de sarcinile maxime pe care trebuie să le suporte. Analog se poate proceda și pentru un alt raport M_p^r/M_p^s.

Cînd mărimea sarcinii P_1 domină, H_1 are sensul dreapta-stînga; combinarea diagramelor este arătată în figura 275, *j*, unde sînt aceleași contururi, dar diagrama dată de H_1 apare acum de cealaltă parte a axei de referință. Realizarea mecanismului (2) de cedare plastică conduce la mărimea $M_p^s = P_1 l/4$, iar satisfacerea condiției de plasticitate cere ca $M_p^r \geq P_2 l/4$; cînd $M_p^r = P_2 l/4$, se realizează soluția economică.

La stabilirea diagramei de momente încovoietoare, corespunzătoare unui mecanism de cedare plastică dat, trebuie remarcat că articulațiile plastice consecutive rezultă cu sensuri opuse, deci ordonatele respective din diagrama M trebuie să aibă semne contrare.

Exemplele tratate arată că, prin impunerea concomitentă a celor trei condiții ce caracterizează cedarea plastică, se ajunge direct la diagrama M corespunzătoare. Cînd structura este mai complicată, aplicarea acestui procedeu devine însă laborioasă și nu mai poate fi utilă în practică. Esența calculului în domeniul plastic constă dintr-o operație de triere a diferitelor soluții posibile, spre a identifica soluția corectă; pentru aceasta sînt necesare procedee mai eficiente. Stabilirea unor asemenea procedee necesită o bază teoretică mai închegată privind cedarea plastică.

C. TEOREME ȘI CRITERII FUNDAMENTALE PRIVITOARE LA CEDAREA PLASTICĂ

1. Premisele calculului în domeniul plastic

Abordarea sub formă generală a determinării capacității portante la cedarea plastică, pentru structuri solicitate dominant la încovoiere, trebuie să pornească de la o schematizare a relației dintre momentul încovoietor M și încovoierea specifică ω în secțiunea curentă a structurii. Această schematizare este dată în figura 276 (linie plină), considerînd pentru M și ω convenții de semne concordante (pentru ambele să rezulte același sens de deformare a elementului ds). Cît timp $-M_c < M < +M_c$, secțiunea se găsește în domeniul elastic, și deci între M și ω există legea proporționalității. Cînd M depășește valoarea M_c, proprietatea se pierde și creșterea încovoierii specifice este tot mai accentuată față de creșterea momentului încovoietor. Cînd $M \to M_p$, încovoierea specifică crește nelimitat sub moment încovoietor constant. Această ul-

timă situație corespunde intrării în funcțiune a articulației plastice la structuri realizate din material cu palier lung de curgere (oțel moale).

Pentru un element ds de bară, în stadiul elastic sau în stadiul elasto-plastic, rotirea relativă dintre fețe este la un moment dat ωds; în articulația plastică, admisă punctuală, rotirea relativă devine finită și — pentru diferențiere — se notează cu θ. Schematizarea din figura 276 stabilește că variațiile lui M și ω se produc totdeauna în același sens; se exclude astfel în mod expres posibilitatea ca o creștere de încovoiere specifică să fie însoțită de o scădere de moment încovoietor. Rezultă deci condițiile:

— în toate secțiunile unde

$$|M_x| < M_p \qquad dM_x/d\omega > 0,$$

— în articulațiile plastice

$$|M| = M_p \qquad dM/d\theta = 0. \qquad (16.5)$$

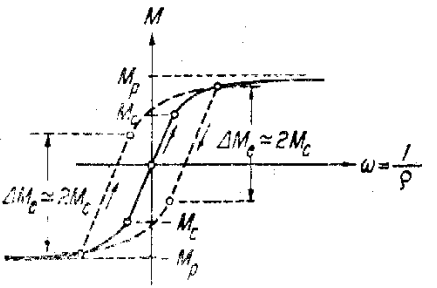


Fig. 276

Trebuie acum definită cedarea plastică prin anumite elemente concrete, spre a putea fi recunoscută în demonstrații. Această definire se face astfel: *o structură se consideră ajunsă la cedarea plastică, cînd cel puțin într-o parte a ei pot surveni deformări finite fără o variație a mărimii sarcinilor.* Notînd sarcinile cu P și deplasările liniare cu δ, înseamnă că în secțiunea curentă poate apărea $d\delta \neq 0$, iar în articulația plastică $d\theta \neq 0$, cînd $dP = 0$. De remarcat că definirea dată se referă numai la starea limită de pierdere a capacității portante, fără nici o referire asupra modului cum a evoluat comportarea structurii pînă la această situație.

Se poate stabili următoarea teoremă a cedării plastice: *la o structură ajunsă la cedarea plastică, momentele încovoietoare rămîn constante, în timp ce structura se deformează în continuare.* Pentru aceasta se consideră două situații succesive de la începutul cedării plastice:

	sarcini	*secțiune curentă*	*artic. plastice*
— situația limită			
forțe	P_i	M_x	M_k
deplasări	δ_i	ω	θ_k
— situația imediat următoare			
forțe	P_i	$M_x + dM_x$	$M_k + dM_k$
deplasări	$\delta_i + d\delta_i$	$\omega + d\omega$	$\theta_k + d\theta_k$

Ambele sînt situații de echilibru; deoarece sarcinile rămîn aceleași, rezultă că variațiile de momente încovoietoare dM_x și dM_k reprezintă de asemenea o situație de echilibru. Exprimînd acest echilibru cu ajutorul deplasărilor virtuale, se consideră drept configurație de deplasare virtuală compatibilă trecerea de la deformata primei situații la deformata celei de-a doua situații. Se obține ecuația de echilibru

$$\int dM_x\, d\omega\, ds + \sum dM_k\, d\theta_k = 0, \text{ sau } \int \frac{dM_x}{d\omega}(d\omega)^2 ds + \sum \frac{dM_k}{d\theta_k}(d\theta_k)^2 = 0,$$

unde, ținînd seama de a doua relație (16.5), rezultă condiția

$$\int \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}\omega}(\mathrm{d}\omega)^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Prima condiție (16.5) arată că $\mathrm{d}M_x/\mathrm{d}\omega \geqslant 0$ în orice secțiune, și deci condiția este îndeplinită numai dacă în secțiunea curentă $\mathrm{d}\omega = 0$. Conform schematizării din figura 276, cînd încovoierea specifică nu variază, nu poate varia nici momentul încovoietor; rezultă că $M_x = \text{const.}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema cedării plastice are consecințe însemnate, scoțînd în evidență fenomenul cedării plastice. Faptul că momentele încovoietoare încetează de a mai varia, arată că diagrama de momente încovoietoare — la care s-a ajuns cînd cedarea plastică devine iminentă — *„îngheață" în această formă*, iar porțiunile de structură cuprinse între articulațiile plastice încetează de a se mai deforma în continuare, *devenind asimilabile unor corpuri rigide*. Conform definiției, structura continuă totuși să se deformeze; rezultă că aceasta nu poate proveni decît de la *rotirile relative din articulațiile plastice*. Înseamnă că cedarea plastică se produce numai atunci cînd se formează articulații plastice, *care ca număr, poziție și sens să conducă la formarea unui mecanism de cedare*, total sau parțial; structura își pierde capacitatea portantă prin intrarea în funcțiune a acestui mecanism.

Această concluzie fundamentează *condiția de mecanism*, drept condiție specifică cedării plastice. Exprimarea condiției se face considerînd echilibrul mecanismului în situația limită, sub acțiunea sarcinilor P_i și a momentelor M_k din articulațiile plastice; admitem ca deplasare virtuală începutul infinit mic al funcționării mecanismului. Se obține

$$\sum P_i \delta_i - \sum M_k \theta_k = 0 \quad \text{sau} \quad \sum P_i \delta_i = \sum M_p |\theta_k|, \tag{16.6}$$

unde s-a ținut seama că $M_k = M_p$, de asemenea că totdeauna sensul momentului M_p dintr-o articulație plastică este contrar sensului de producere a rotirii relative θ_k. Este deci suficient ca, în a doua formă a condiției (16.6), să se introducă *valoarea* M_p și rotirile θ_k în valoare absolută.

În ceea ce privește reprezentarea mecanismului de cedare, porțiunile de structură cuprinse între articulațiile plastice se consideră drept corpuri rigide, și deci apar cu poziția lor inițială, cum s-a văzut în figurile 272—275.

Pe baza examinării făcute apar acum fundamentate cele *trei* condiții pe care trebuie să le îndeplinească diagrama M la cedarea plastică:

(1) Condiția de *echilibru static* dintre sarcini și eforturi. Aceasta se exprimă pe căile uzuale, folosind fie ecuații de proiecții și momente, fie deplasări virtuale date unor sisteme cinematice, obținute prin introducerea unui număr suficient de *articulații obișnuite* în anumite secțiuni j ale structurii. Lucrul virtual dat de sarcini și de momentele încovoietoare puse în evidență trebuie să fie nul; condiția are deci forma

$$\sum P_i \delta_i - \sum M_j \theta_j = 0. \tag{16.7}$$

De reținut că această condiție se scrie pentru un mecanism *oarecare*, ales de proiectant, spre deosebire de condiția (16.6), care se aplică mecanismului de cedare ca atare.

(2) *Condiția de mecanism.* Diagrama M trebuie să aibă un număr suficient de ordonate egale cu M_p spre a corespunde unui mecanism de cedare plastică. Orice secțiune unde $M=\pm M_p$ este o articulație plastică posibilă; *semnele* momentelor încovoietoare trebuie să concorde cu *sensurile* rotirilor relative cerute de funcționarea mecanismului. Condiția de mecanism se exprimă sub forma (16.6).

(3) *Condiția de plasticitate.* În nici o altă secțiune, ordonatele diagramei M nu trebuie să depășească valoarea M_p, deci $-M_p \leqslant M_x \leqslant +M_p$.

Premisele expuse în acest paragraf au caracter general și se aplică indiferent care este legea după care se produce creșterea sarcinilor aplicate pe structură. Se poate merge mai departe particularizînd această lege.

2. Structuri supuse la sarcini proporționale

Creșterea *proporțională* a sarcinilor este definită printr-un singur *factor de încărcare*. Dacă sarcinile date sînt P_i, creșterea lor se exprimă sub forma λP_i, unde $\lambda \geqslant 1$; la cedare se ajunge la $\lambda_c P_i$, unde λ_c este *factorul de încărcare la cedarea plastică*.

În cazul sarcinilor proporționale, pornind de la proprietatea de unicitate a soluției, se poate stabili un criteriu deosebit de important pentru fundamentarea unor metode sistematizate de determinare a mărimii factorului λ_c și implicit a diagramei de momente încovoietoare la cedarea plastică: *criteriul de minimum sau de maximum al factorului de încărcare.*

a. **Unicitatea factorului de încărcare.** Aceasta rezultă din următoarea teoremă: „Dacă, pentru o structură supusă la sarcini proporționale, se poate găsi o diagramă M corespunzătoare unui factor de încărcare λ, care să satisfacă *toate cele trei condiții*, atunci $\lambda=\lambda_c$ și reprezintă o soluție unică, în sensul că pentru nici o altă valoare a lui λ nu se mai poate găsi o diagramă M care să satisfacă de asemenea cele trei condiții".

Pentru justificare, se admite — contrar teoremei — că ar fi *doi* factori de încărcare λ_1 și λ_2, care conduc la diagramele M_1 și M_2 corespunzătoare la *două* mecanisme diferite de cedare. Pentru *prima* diagramă se scrie *condiția de mecanism* (16.6) sub forma

$$\lambda_1 \sum P_i \delta_i^{(1)} = \sum M_k^{(1)} \theta_k^{(1)} = \sum M_p |\theta_k^{(1)}|.$$

Pentru *a doua* diagramă se exprimă *condiția de echilibru static* sub forma (16.7), folosind o deplasare virtuală impusă unui sistem cinematic ales cu *aceeași* alcătuire ca mecanismul de cedare din prima situație; rezultă

$$\lambda_2 \sum P_i \delta_i^{(1)} = \sum M_k^{(2)} \theta_k^{(1)}.$$

În prima situație $|M_k^{(1)}| = M_p$, deoarece ne referim la articulațiile plastice, în timp ce în a doua situație $|M_k^{(2)}| \leqslant M_p$ conform *condiției de plasticitate*; rezultă $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$.

Procedînd acum *invers* cu cele două situații, anume folosind condiția de mecanism pentru a doua situație și condiția de echilibru static pentru prima, se găsește $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Considerînd împreună ambele alternative, pentru fiecare

dintre diagramele M_1 și M_2 s-au impus toate cele trei condiții. Din comparația inegalităților rezultă în mod necesar $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_c$, deci unicitatea soluției.

În legătură cu unicitatea factorului de încărcare la cedarea plastică, trebuie observat că la o structură de n ori static nedeterminată pot apărea două situații:

— Cînd mecanismul de cedare este *total* (fig. 277, *a*), se formează $n+1$ articulații plastice și deci cunoașterea a $n+1$ ordonate în diagrama M permite

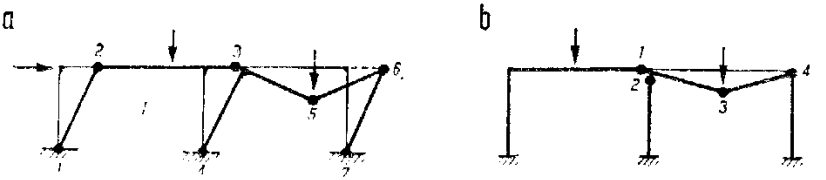


Fig. 277

determinarea celor n cantități static nedeterminate și a factorului λ_c; diagrama rezultă astfel complet determinată și este unică.

— Cînd mecanismul de cedare este *parțial* (fig. 277, *b*), se formează mai puțin de $n+1$ articulații plastice; cedarea are caracter local, iar pe restul structurii se menține situația de nedeterminare statică. Înseamnă că, din punct de vedere al celor trei condiții ce caracterizează cedarea plastică, pentru același λ_c pot fi mai multe diagrame M, toate avînd aceleași ordonate în porțiunea mecanismului de cedare. Numai folosind și condiția de compatibilitate a deformatei pe partea rămasă static nedeterminată, se poate găsi diagrama reală, în funcție de rigiditățile barelor.

b. **Criteriul de minimum sau de maximum al factorului de încărcare.** Acest criteriu esențial, care determină specificul calculului în domeniul plastic pentru cazul sarcinilor proporționale, urmărește să ajungă la identificarea valorii corecte a factorului λ_c prin trierea mai multor soluții posibile. După modul cum se efectuează operația de triere, criteriul capătă *două* variante. Justificarea acestora se face în mod asemănător ca la teorema unicității; pentru aceasta se consideră structura în trei situații diferite, care apoi se grupează cîte două:

— situația limită, în care sarcinile sînt $\lambda_c P_i$ și le corespunde diagrama M care satisface concomitent *toate cele trei condiții*;

— o situație în care sarcinile sînt $\lambda' P_i$ și le corespunde diagrama M' care satisface numai condițiile de *echilibru static* și de *mecanism*;

— o situație în care sarcinile sînt $\lambda'' P_i$ și le corespunde diagrama M'' care satisface numai condițiile de *echilibru static* și de *plasticitate*.

(1) *Criteriul factorului de încărcare minim* se enunță astfel: „Dacă la o structură supusă la sarcini proporționale se găsește un factor de încărcare $\lambda'>0$, corespunzător unei diagrame M' care satisface numai condițiile de *echilibru static* și de *mecanism*, atunci $\lambda'\geqslant\lambda_c$.

Să comparăm prima situație cu a doua. Pentru *a doua* situație, *condiția de mecanism* se scrie sub forma

$$\lambda' \sum P_i \delta_i' = \sum M_k' \theta_k' = \sum M_p \,|\, \theta_k' \,| \,.$$

Se exprimă acum condiția de echilibru static a *primei* situații prin deplasări virtuale, folosind un sistem cinematic avînd chiar schema mecanismului de cedare din a doua situație; rezultă

$$\lambda_c \sum P_i \delta_i' = \sum M_h \theta_h'.$$

Deoarece în prima situație $|M_h| \leqslant M_p$, pe baza condiției de plasticitate, rezultă $\lambda' \geqslant \lambda_c$.

Criteriul poate fi enunțat și într-o formă mai sugestivă pentru aplicarea practică: *Factorul de încărcare este cel mai mic dintre factorii ce se obțin considerînd toate mecanismele de cedare posibile pentru structura și sarcinile date.* Diagrama de momente încovoietoare ce corespunde acestui λ_{minim} trebuie să îndeplinească și condiția de plasticitate; se dispune astfel de mijlocul de *verificare* a soluției.

(2) *Criteriul factorului de încărcare maxim* se enunță astfel: „Dacă la o structură supusă la sarcini proporționale se găsește un factor de încărcare $\lambda'' > 0$, corespunzător unei diagrame M'' care satisface numai condițiile de *echilibru static* și de *plasticitate*, atunci $\lambda'' \leqslant \lambda_c$.

Să comparăm prima situație cu a treia. Pentru *prima* situație, condiția de mecanism se scrie sub forma

$$\lambda_c \sum P_i \delta_i = \sum M_k \theta_k = \sum M_p |\theta_k|.$$

Se exprimă acum condiția de echilibru static a celei de-a treia situații prin deplasări virtuale, folosind un sistem cinematic avînd chiar schema mecanismului de cedare din prima situație; rezultă

$$\lambda'' \sum P_i \delta_i = \sum M_k^* |\theta_k|.$$

Deoarece în a treia situație condiția de plasticitate este $|M_k^*| \leqslant M_p$, rezultă $\lambda'' \leqslant \lambda_c$.

Criteriul poate fi enunțat și astfel: *Factorul de încărcare λ_c este cel mai mare dintre factorii ce pot fi obținuți pentru structura și sarcinile date, considerînd toate diagramele M ce satisfac condițiile de echilibru static și de plasticitate.* Pentru acest λ_{max}, de pe diagrama M trebuie să rezulte și îndeplinirea condiției de mecanism; aceasta constituie verificarea soluției.

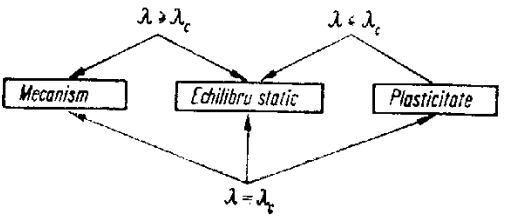


Fig. 278

Rezumînd cele ce preced, se ajunge la reprezentarea sintetică arătată în figura 278, din care rezultă posibilitățile de utilizare a celor trei condiții ce caracterizează cedarea plastică. În cazuri simple se aplică concomitent cele trei condiții, obținînd direct valoarea λ_c. La structuri mai complicate, se utilizează numai cîte două dintre condiții, obținînd astfel mai multe soluții posibile, care sînt apoi triate cu ajutorul criteriului de minimum sau de maximum a factorului de încărcare.

c. **Exemplificări.** Pentru lămurirea diferitelor aspecte care intervin în cele expuse mai sus, vom examina aici modul de aplicare la cadrul-portal din fi-

gura 279, *g*, care are secțiune constantă, considerînd mai întîi un raport P_1/P_2 dat, iar apoi admițînd că acest raport poate varia.

Exemplul 1. Cadrul este încărcat cu sarcinile arătate în figura 279, *a*. Se începe cu identificarea mecanismelor de cedare posibile pentru aceste sarcini, ținînd seama că sînt cinci secțiuni în care pot apărea articulații plastice (cele numerotate); cadrul este de trei ori static nedeterminat. Se vede ușor că mecanismele posibile sînt cele arătate în figura 279, *b*; primul și ultimul sînt mecanisme totale, în timp ce al doilea este un mecanism local (de riglă).

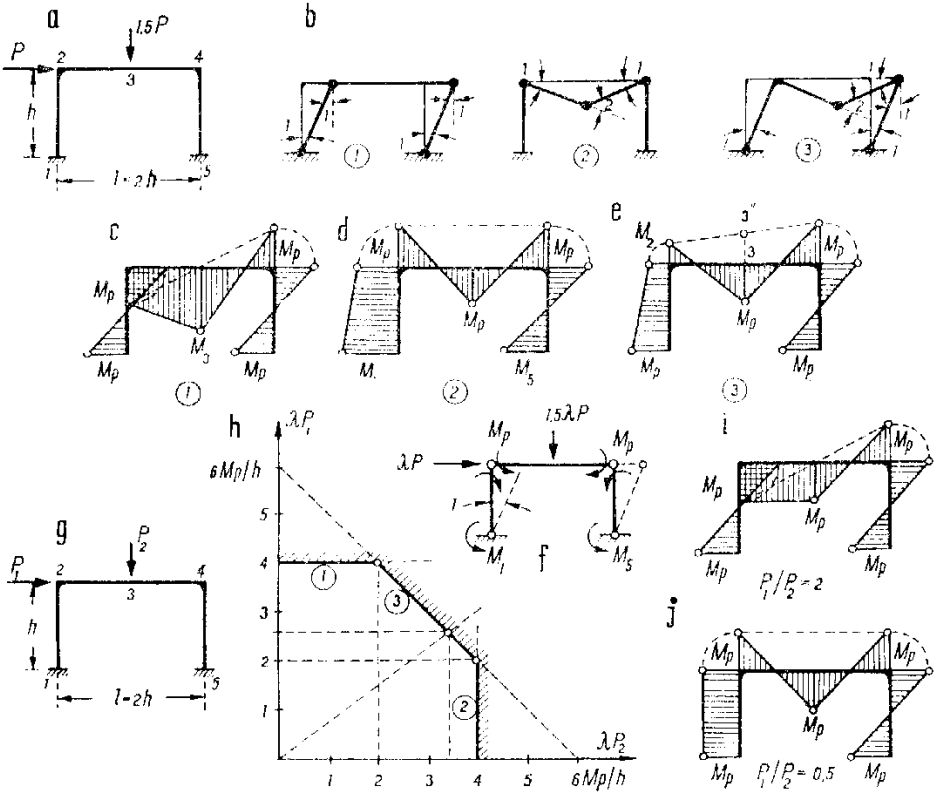


Fig. 279

Aplicînd condiția de mecanism (16.6), se obține pentru fiecare dintre cele trei cazuri factorul de încărcare corespunzător. Pe figură s-au însemnat mărimile rotirilor relative din articulațiile plastice, stabilite considerînd că una dintre ele este egală cu unitatea. Aici, corelațiile dintre mărimile rotirilor relative se văd direct; în cazuri mai complicate se recurge la centre instantanee și diagrame de deplasări. Urmărind deplasările care intervin în fiecare mecanism, rezultă:

Mecanism (1)	$\lambda_1 P \cdot h = 4M_p$,	deci $\lambda_1 P = 4M_p/h$.
Mecanism (2)	$1{,}5\lambda_2 P \cdot h = 4M_p$,	deci $\lambda_2 P = 2{,}67M_p/h$.
Mecanism (3)	$\lambda_3 P \cdot h + 1{,}5\lambda_3 P \cdot h = 6M_p$,	deci $\lambda_3 P = 2{,}4M_p/h = \lambda_{minim}$

Pe baza criteriului factorului de încărcare minim, se ajunge la concluzia că mecanismul (3) este acel după care se produce cedarea plastică a cadrului, atunci cînd sarcinile aplicate ating mărimile $P_1 = 2{,}4M_p/h$ și $P_2 = 3{,}6\ M_p/h$.

Să controlăm acum îndeplinirea condiției de plasticitate. Pentru claritate, se trasează diagramele de momente încovoietoare ce corespund celor trei mecanisme de cedare posibile, introducînd la fiecare factorul de încărcare respectiv. Operația este făcută în figurile 279, *c-e*; se începe prin construirea părților de diagramă care rezultă direct, înscriind ordonatele cunoscute (de mărime M_p) din dreptul articulațiilor plastice, cu respectarea sensului de funcționare al acestora. Restul ordonatelor se obțin prin condiția de echilibru static, după cum urmează:

— La mecanismul (1) trebuie aflată ordonata M_3; deoarece linia de referință (punctată) pentru diagrama corespunzătoare barei simplu rezemate *2-4* trece chiar prin secțiune, se obține

$$M_3=1{,}5\lambda_1 P\cdot\frac{l}{4}=1{,}5\,\frac{4M_p}{h}\cdot\frac{2h}{4}=3\,M_p>M_p.$$

— La mecanismul (2) sînt de aflat două ordonate, anume M_1 și M_5, care nu pot fi calculate direct datorită nedeterminării statice rămase. Se poate găsi numai mărimea *sumei* lor, aplicînd condiția de echilibru static (16.7) cu ajutorul deplasării virtuale din figura 279, *f*, unde s-au indicat sensurile momentelor care intervin; se găsește

$$\lambda_2 P\cdot h\quad(M_1+M_5)\cdot M_p+M_p=0,\ \text{deci}\ M_1+M_5=2{,}67M_p>2\,M_p.$$

— La mecanismul (3), mărimea ordonatei M_2 rezultă dacă se cunoaște porțiunea de ordonată $\overline{33''}$ din figura 279, *e*; aceasta este

$$\overline{33''}=1{,}5\lambda_3 P\cdot\frac{l}{4}-M_p=1{,}5\cdot 2{,}4\,\frac{M_p}{h}\cdot\frac{2h}{4}-M_p=0{,}8\,M_p,$$

și deci $M_2=0.6M_p<M_p$.

Din diagramele completate rezultă că *numai ultima satisface condiția de plasticitate*, verificînd astfel rezultatul obținut prin stabilirea factorului de încărcare minim. Dacă în celelalte două cazuri se reduce totul proporțional, astfel ca ordonata care depășește valoarea M_p să fie adusă la această valoare, spre a fi îndeplinită condiția de plasticitate, se găsesc următoarele valori reduse pentru factorii de încărcare:

— la mecanismul (1), prin împărțire cu 3 : $\lambda_1'=\lambda_1/3=1{,}33M_p/h$,

— la mecanismul (2), prin împărțire cu 2,67/2 : $\lambda_2'=2\ \lambda_2/2{,}67=2M_p/h$.

Desigur, după această operație diagramele reduse nu mai îndeplinesc condiția de mecanism. Dispunem acum de trei diagrame, care toate satisfac condițiile de echilibru static și de plasticitate; comparînd mărimile factorilor de încărcare, rezultă că $\lambda_3'=\lambda_3=2{,}4\ M_p/h=\lambda_{maxim}$, astfel că, utilizînd de data aceasta criteriul factorului de încărcare maxim, se regăsește concluzia că cedarea plastică se produce după mecanismul (3). Drept verificare, numai diagrama M din figura 279, *e* îndeplinește și condiția de mecanism.

Exemplul 2. Fie același cadru, dar încărcat cu sarcini oarecare P_1 și P_2, urmînd să se examineze influența raportului P_1/P_2 asupra cedării plastice. Mecanismele de cedare posibile sînt tot cele din figura 279, *b*; din condiția de mecanism rezultă:

Mecanism (1)	$\lambda P_1 h=4M_p.$	deci $\lambda P_1=4M_p/h,$
Mecanism (2)	$\lambda P_2 h=4M_p.$	deci $\lambda P_2=4M_p/h,$
Mecanism (3)	$\lambda(P_1+P_2)h=6M_p,$	deci $\lambda(P_1+P_2)=6M_p/h.$

Aceste relații permit să se facă o construcție grafică sugestivă, cum se arată în figura 279, *h*, reprezentînd pe cele două axe variațiile sarcinilor P_1 și P_2. Înseamnă că, pentru anumite mărimi ale sarcinilor, rezultă un punct în plan; pentru un anumit *raport* P_1/P_2 se obține o dreaptă, datorită creșterii proporționale a sarcinilor.

Pentru fiecare condiție de mecanism corespunde o dreaptă, care se obține făcînd să varieze mărimile sarcinilor. Astfel, la primul mecanism intervine numai sarcina P_1, și deci pentru orice valoare λP_2 rezultă $\lambda P_1=4M_p/h$, obținînd o dreaptă paralelă cu axa orizontală. Asemănător, mecanismului (2) îi corespunde o dreaptă paralelă cu axa verticală. La mecanismul (3) intervin ambele sarcini; pentru $\lambda P_1=0$ corespunde $\lambda P_2=6M_p/h$, iar pentru $\lambda P_2=0$ corespunde $\lambda P_1=6M_p/h$, definind dreapta înclinată din figură.

Aceste trei drepte determină pe diagramă un cîmp (contur haşurat), care are următoarele proprietăți:

- pentru orice punct de pe contur este îndeplinită una dintre condițiile de mecanism, deci se produce cedarea plastică după mecanismul respectiv;
- pentru orice punct din interiorul conturului, cadrul nu a ajuns încă în stadiul limită.

Pentru un raport dat P_1/P_2 se duce în diagramă dreapta respectivă (care trece prin origine) pînă ce intersectează conturul; punctul respectiv indică mecanismul după care se produce cedarea plastică, precum și mărimile corespunzătoare ale sarcinilor. Această indicație are la bază criteriul factorului de încărcare *minim*. Într-adevăr, dreapta raportului P_1/P_2 intersectează toate cele trei drepte ale mecanismelor de cedare posibile; utilizarea conturului haşurat este echivalentă cu a alege punctul de intersecție *cel mai apropiat de origine*.

Vîrfurile conturului corespund unor raporate P_1/P_2 care dau același λ_c pentru *două mecanisme de cedare diferite*, conducînd însă la *aceeași* diagramă de momente încovoietoare. Din figură rezultă că cele trei mecanisme de cedare se realizează pentru următoarele mărimi ale raportului P_1/P_2:

$$\text{Mecanismul (1)} \quad P_1/P_2 \geqslant 2, \qquad \text{Mecanismul (2)} \quad P_1/P_2 \leqslant 0{,}5,$$

$$\text{Mecanismul (3)} \quad 0{,}5 \leqslant P_1/P_2 \leqslant 2.$$

Cele două vîrfuri corespund rapoartelor $P_1/P_2=2$ și $P_1/P_2=0{,}5$, în primul caz intervenind mecanismele (1) și (3), iar în al doilea caz — mecanismele (2) și (3). Pentru raportul $P_1/P_2=2$, cedarea apare cînd $P_1=4M_p/h$ și $P_2=2M_p/h$, iar pentru raportul $P_1/P_2=0{,}5$ cedarea apare cînd $P_1=2M_p/h$ și $P_2=4M_p/h$. Diagramele de momente încovoietoare pentru aceste două cazuri sînt date în figurile 279, *i* și *j*, fiecare dintre ele avînd cîte cinci ordonate de mărime M_p, ceea ce explică de ce se ajunge la aceleași rezultate prin două mecanisme diferite de cedare.

D. METODE DE DETERMINARE A CEDĂRII PLASTICE

1. Metoda combinării mecanismelor

Această metodă are la bază criteriul factorului de încărcare *minim* și constă în sistematizarea operației de triere a diferitelor mecanisme de cedare posibile pentru sarcinile date, spre a găsi pe λ_{minim}. În acest scop se identifică mai întîi mecanismele *diferite* care pot apărea, alegîndu-le cu configurații cît mai simple; prin combinarea acestora se obțin apoi toate celelalte mecanisme posibile.

Se începe cu stabilirea *numărului* de mecanisme diferite. Pe baza alcătuirii cadrului și a sarcinilor aplicate rezultă secțiunile în care diagrama M are ordonate maxime: în primul rînd sînt secțiunile din dreptul sarcinilor concentrate, cît și cîte o secțiune în cuprinsul deschiderilor încărcate cu sarcini distribuite; de asemenea, secțiunile de capăt ale barelor legate rigid în noduri (pentru nod cu două bare — o singură secțiune, pentru nod cu mai multe bare — toate secțiunile), precum și cele din reazeme încastrate. Se obține astfel numărul p al secțiunilor în care *pot* apărea articulații plastice. Acest număr trebuie comparat cu gradul de nedeterminare statică n. Admițînd că se introduc articulații obișnuite în toate cele p secțiuni ($p>n$), rezultă un sistem cinematic cu un număr de $m=p-n$ grade de libertate, care poate deci căpăta m deplasări *diferite*. Acestea sînt echivalente cu cele m mecanisme diferite de cedare plastică care pot apărea în cazul considerat. Relația $m=p-n$ servește la stabilirea directă a numărului de mecanisme diferite.

Se trece apoi la identificarea — pe tipuri — a acestor mecanisme, considerîndu-se în acest scop configurații simple și cu semnificație distinctă. În acest sens se pot distinge:

— *Mecanism de bară încărcată* (fig. 280, *b*), care corespunde pentru o sarcină concentrată sau distribuită aplicată pe bară. Acest tip de mecanism se compune din *trei* articulații plastice coliniare, dintre care două apar la extre-

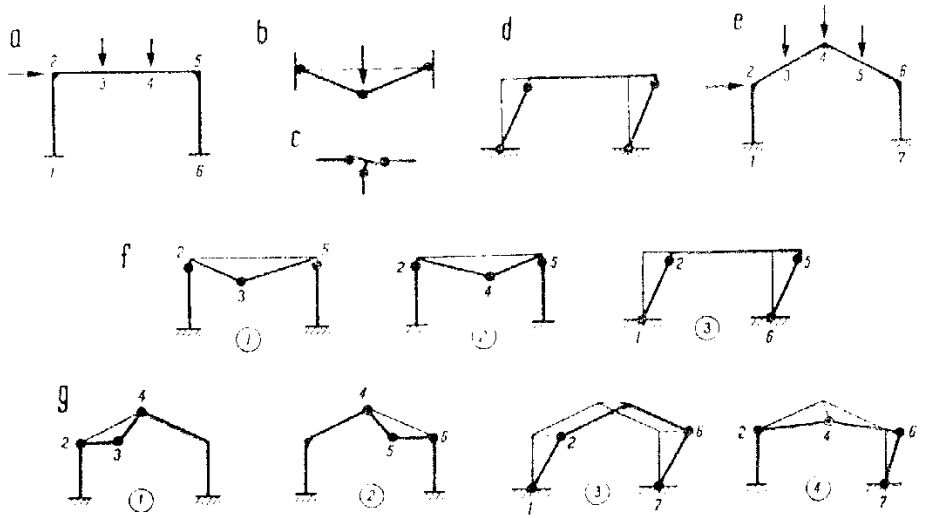


Fig. 280

mitățile barei, iar cea de-a treia sub sarcina concentrată sau în cuprinsul sarcinii distribuite; situația este analoagă cu cea din figura 272. Cînd pe bară calcă mai multe sarcini concentrate, fiecăreia îi corespunde cîte un mecanism de bară.

— *Mecanism de grad de libertate* (fig. 280, *d*), care corespunde la fiecare dintre gradele de libertate elastică a cadrului dat și constă din formarea numărului necesar de articulații plastice, ca gradul de libertate cinematic să poată funcționa.

— *Mecanism de nod cu mai mult de două bare* (fig. 280, *c*), care este un mecanism auxiliar ce constă din formarea de articulații plastice în toate capetele de bare din jurul nodului; acest mecanism se referă la crearea posibilității de rotire a nodului.

Aceste tipuri de mecanisme simple (numite uneori și mecanisme elementare) se pot identifica cu ușurință pentru orice cadru, în raport cu sarcinile aplicate. Unele exemple sînt date în figura 280. Astfel, cadrul din figura 280, *a* are șase secțiuni în care pot apărea articulații plastice (numerotate) și este de trei ori static nedeterminat. Rezultă $m = 6 - 3 = 3$, deci sînt trei mecanisme elementare, și anume două mecanisme de bară și un mecanism de grad de libertate, arătate în figura 280, *f*. Cadrul din figura 180, *e* are șapte secțiuni în care pot apărea articulații plastice și este tot de trei ori static nedeterminat. Sînt deci

$m=7-3=4$ mecanisme elementare, arătate în figura 280, *g* și anume două mecanisme de bară și două mecanisme de grad de libertate.

După identificarea mecanismelor *diferite*, se calculează pentru fiecare factorul de încărcare λ folosindu-se condiția de mecanism (mecanismul de nod nu are factor de încărcare), apoi se începe operația de combinare *urmărindu-se sistematic reducerea mărimii* λ. Din condiția de mecanism, care are forma

$$\lambda \sum P_i \delta_i = \sum M_p |\theta_k|,$$

rezultă că pentru micșorarea factorului λ trebuie în genere căutată o reducere a valorii membrului al doilea, care se poate realiza în principal prin:

(1) Menținerea în mecanism a cît mai puține articulații plastice, cel mult $n+1$ (mecanism total); cînd mecanismele elementare care se combină au într-o secțiune articulații plastice de sens contrar, acestea se vor elimina la combinare prin multiplicare cu constante convenabil alese.

(2) Efectuarea combinării astfel ca în articulațiile plastice rămase rotirile relative să fie cît mai mici; deseori, la aceasta poate contribui și introducerea mecanismului de nod.

Desigur, și membrul întîi variază, astfel că sînt necesare încercări. Combinarea mecanismelor elementare nu trebuie făcută în mod mecanic, deoarece deseori sînt multe combinări posibile și procedeul devine laborios dacă se iau toate în considerare. Este util să se aprecieze cu discernămînt comportarea cadrului sub acțiunea sarcinilor date, deoarece în acest mod pot fi eliminate ca improbabile unele încercări. De asemenea, cînd unul din mecanismele elementare are un factor de încărcare mult mai mare decît celelalte, acesta poate fi lăsat deoparte la efectuarea combinărilor.

Cînd, pe baza operației de combinare, se apreciază că s-a ajuns la un factor de încărcare destul de redus, și deci la mecanismul de cedare probabil, controlul se efectuează trasînd diagrama de momente încovoietoare; dacă este îndeplinită și condiția de plasticitate, s-a ajuns la soluția corectă. În caz contrar, chiar din diagramă rezultă o indicație pentru combinarea următoare, în sensul de a introduce articulații plastice acolo unde apar ordonate ce depășesc valoarea M_p.

Pentru exemplificarea aplicării metodei, fie cadrul din figura 281, *a*, unde alături de bare s-au înscris valorile M_p respective; riglele sînt deci mai puternice decît stîlpii, astfel că în nodurile extreme articulațiile plastice vor apărea totdeauna pe stîlpi. Ținîndu-se seama de sarcinile date, se găsește $p=10$, $n=6$ și deci numărul mecanismelor elementare este $m=p-n=10-6=4$. Aceste mecanisme sînt arătate în figura 281, *c*: două mecanisme de bară, corespunzătoare sarcinilor concentrate aplicate pe rigle, un mecanism de grad de libertate și un mecanism auxiliar de nod. Aplicînd condiția de mecanism pentru primele trei cazuri, se obțin următorii factori de încărcare:

Mecanism (1) $8\lambda \cdot 1 \cdot 3 = 1 \cdot 8 + 3 \cdot 12 = 44$, deci $\lambda_1 = 44/24 = 1{,}83$.

Mecanism (2) $10\lambda \cdot 1 \cdot 2{,}5 = 3 \cdot 12 + 1 \cdot 8 = 44$, deci $\lambda_2 = 44/25 = 1{,}76$.

Mecanism (3) $6\lambda \cdot 1 \cdot 4 = 6 \cdot 8 = 48$. deci $\lambda_3 = 48/24 = 2{,}00$.

Pentru reducerea mărimii factorului de încărcare λ se fac combinări de mecanisme, ținînd seama de indicațiile date mai înainte și urmărind să rămînă cel mult $n+1=7$ articulații plastice. În figura 281, *d* se vede mecanismul (5), care a rezultat din combinarea mecanismelor (1) și (3); cele două articulații plastice, de sens contrar, din partea superioară a primului stîlp, au dispărut

prin combinare. În figura 281, *e* este arătat mecanismul (6), obținut din combinarea mecanismelor (2) și (3), la care s-a adăugat și mecanismul auxiliar (4); este ușor de văzut că dacă nodul ar rămîne nerotit, prin combinare apar în jurul său două articulații plastice (pe stîlp și pe rigla din dreapta), pe care rotirea le elimină înlocuindu-le cu o singură articulație plastică pe rigla din stînga. Situația este similară și în figura 281, *f*, unde în combinare intră toate cele patru mecanisme elementare.

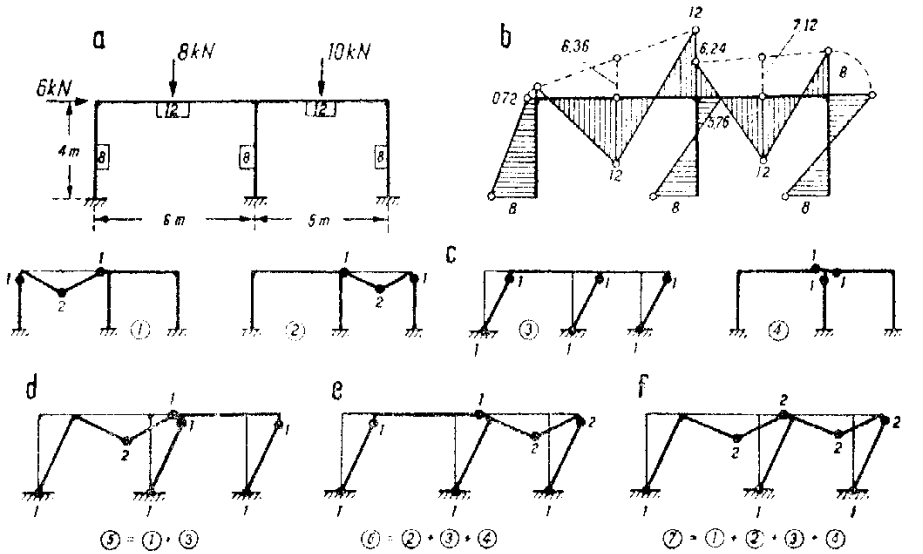


Fig. 281

Scriind și pentru aceste trei cazuri condiția de mecanism, se găsește:

Mecanism (5) $6\lambda \cdot 1 \cdot 4 + 8\lambda \cdot 1 \cdot 3 = 5 \cdot 8 + 3 \cdot 12 = 76$, deci $\lambda = 76/48 = 1{,}58$,

Mecanism (6) $6\lambda \cdot 1 \cdot 4 + 10\lambda \cdot 1 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot 8 + 3 \cdot 12 = 84$, deci $\lambda = 84/49 = 1{,}72$,

Mecanism (7) $6\lambda \cdot 1 \cdot 4 + 8\lambda \cdot 1 \cdot 3 + 10\lambda \cdot 1 \cdot 2{,}5 = 5 \cdot 8 + 6 \cdot 12 = 112$, deci $\lambda = 112/73 = 1{,}53$.

Se constată că cel mai mic factor de încărcare corespunde mecanismului (7). Controlul soluției se face construind diagrama de momente încovoietoare din figura 281, *b*. Sînt cunoscute șapte ordonate, astfel că restul diagramei rezultă din condiția de echilibru static, folosind ordonatele punctate din secțiunile de mijloc ale celor două rigle. Diagrama obținută respectă integral condiția de plasticitate ($M \leq M_p$), și deci cedarea plastică a cadrului se produce după mecanismul (7), cînd mărimile sarcinilor cresc cu 53% față de valorile indicate în figura 214, a.

Observație. În exemplificările date s-a considerat că pe cadru acționează numai sarcini concentrate; se cunosc astfel de la început secțiunile din cuprinsul barelor în care pot apărea articulații plastice. Acest lucru nu este posibil în cazul sarcinilor distribuite (fig. 282, *a*), astfel că efectuarea operației de triere pentru căutarea mecanismului de cedare se complică considerabil. Această situație poate fi evitată, admițîndu-se că sarcina distribuită este înlocuită prin sarcini concentrate *echivalente*, anume o sarcină concentrată aplicată în secțiunea de la mijlocul deschiderii barei, precum și două sarcini aplicate la extremități (fig. 282, *b*). Mărimea sarcinii echivalente rezultă din condiția ca ambele situații de încărcare să dea același lucru mecanic parcurgînd mecanismul de bară. Astfel, pentru cazul din figura 282, *c*, se obține $P_{echiv} = pl/2$

urmînd ca restul sarcinii distribuite să se concentreze în componente la extremitățile barei.

Aplicarea metodei combinării mecanismelor se face considerînd sarcinile echivalente și cu ajutorul acestora se identifică mecanismul de cedare și factorul de încărcare corespunzător λ_c'. Se trece apoi la trasarea diagramei de momente încovoietoare, folosind ordonatele cunoscute din mecanismul de cedare;

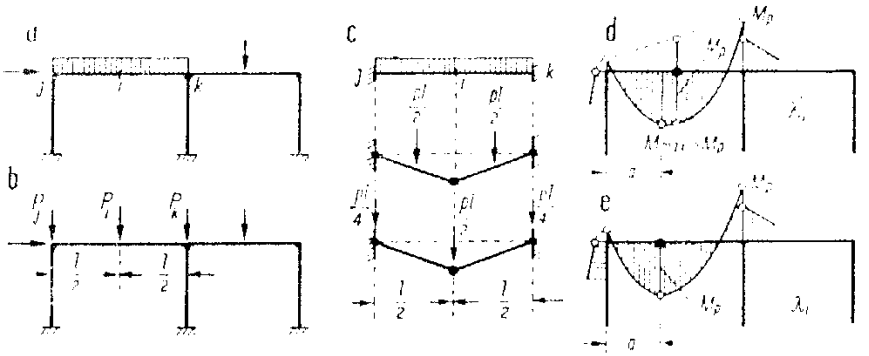


Fig. 282

pentru completarea diagramei se revine însă la sarcina distribuită (fig. 282, *d*). Deoarece soluția găsită prin aproximarea făcută nu este cea corectă, înseamnă că $\lambda_c' > \lambda_c$, aceasta oglindindu-se în diagramă prin faptul că ordonata maximă din dreptul sarcinii distribuite apare în altă secțiune decît cea unde s-a format articulația plastică în ipoteza sarcinilor concentrate. Rămîne să se deplaseze articulația plastică în dreptul ordonatei maxime și cu acest mecanism corectat să se determine un nou factor de încărcare $\lambda_c'' > \lambda_c' > \lambda_c$. Acesta este în genere foarte apropiat de cel corect, și deci diagrama M corespunzătoare (fig. 282, *e*) caracterizează stadiul de cedare plastică.

2. Cuprinderea între limite a factorului de încărcare

La structuri mai complicate, metoda combinării mecanismelor elementare poate deveni foarte laborioasă, datorită dificultății de a aprecia pe parcurs care sînt combinările cele mai indicate, față de numărul mare de combinări posibile. Totodată, pentru cerințe practice este deseori suficient să se cunoască numai o valoare aproximativă a factorului de încărcare la cedarea plastică. De exemplu, la verificarea unei structuri existente, pentru a se determina în ce măsură poate suporta anumite majorări ale sarcinilor, nu interesează de fapt mărimea însăși a factorului de încărcare, ci numai dacă aceasta este mai mare de o anumită valoare, respectiv dacă se găsește într-un anumit interval de valori.

În asemenea situații se poate recurge la un procedeu care permite să se situeze valoarea factorului de încărcare între anumite limite, mergînd cu reducerea intervalului atît cît este util în problema care se studiază. Acest pro-

cedeu folosește concomitent ambele laturi ale criteriului de minimum sau de maximum a factorului de încărcare, ținînd seama că:

— o diagramă M care satisface condițiile de echilibru static și de mecanism dă o valoare $\lambda \geqslant \lambda_c$, deci o limită superioară;

— o diagramă M care satisface condițiile de echilibru static și de plasticitate dă o valoare $\lambda \leqslant \lambda_c$, deci o limită inferioară.

Să presupunem că, pentru determinarea capacității portante a unui cadru, se aplică metoda combinării mecanismelor și că la un moment dat s-a ajuns prin combinări la un anumit mecanism (i), pentru care s-a găsit $\lambda_i \geqslant \lambda_c$. Dacă acesta nu este mecanismul de cedare, există cel puțin o secțiune j în care $|M_j^{(i)}| > M_p$. Reducînd toate ordonatele diagramei prin multiplicare cu constanta $\mu_i = M_p / |M_j^{(i)}|$, se ajunge la o diagramă care satisface condițiile de echilibru static și de plasticitate, deci $\mu_i \lambda_i \leqslant \lambda_c$. Rezultă

$$\mu_i \lambda_i < \lambda_c < \lambda_i, \tag{16.8}$$

astfel că factorul de încărcare este prins între limite. Totodată, diagrama $M^{(i)}$ indică un alt mecanism de cedare posibil, la care în secțiunea j să fie o articulație plastică, de exemplu mecanismul (k) pentru care se găsește $\lambda_k \geqslant \lambda_c$; procedînd analog, se obține

$$\mu_k \lambda_k < \lambda_c < \lambda_k. \tag{16.8'}$$

Se continuă astfel pînă cînd intervalul rezultă suficient de strîns pentru scopul urmărit.

Pentru exemplificare, se reia cadrul din figura 281 și se presupune că prin combinarea mecanismelor elementare s-a ajuns la mecanismul (6), care are un factor de încărcare $\lambda_6 = 21{,}7$ acesta reprezintă o limită superioară a intervalului în care se găsește λ_c. Pentru a găsi și limita inferioară, trebuie determinată diagrama M corespunzătoare mecanismului; aceasta este construită în figura 283, a și arată că $M_3 = 18{,}64$ kNm > 12 kNm. Satisfacerea condiției de plasti-

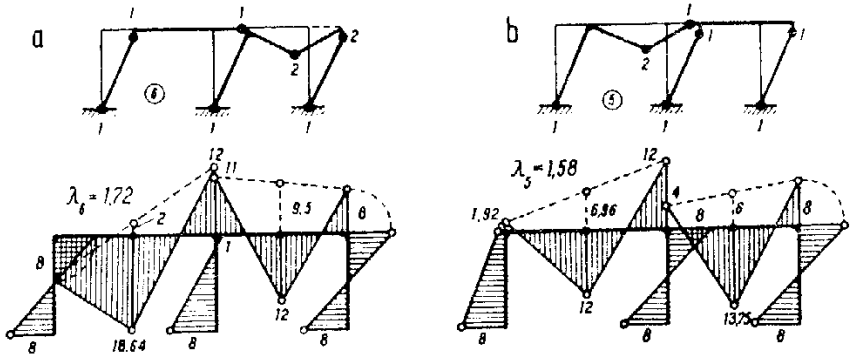


Fig. 283

citate implică reducerea ordonatelor în raportul $\mu_6 = 12/18{,}64 = 0{,}644$, deci $\mu_6 \lambda_6 = 0{,}644 \cdot 1{,}72 = 1{,}11$; rezultă

$$1{,}11 < \lambda_c < 1{,}72.$$

Intervalul fiind prea larg, se continuă cu combinarea mecanismelor, ținînd seama de indicația că în secțiunea 3 trebuie să apară o articulație plastică. Se încearcă astfel mecanismul (5), care are un factor de încărcare $\lambda_5 = 1{,}58$; diagrama respectivă de momente încovoietoare se vede în figura 283, b, unde $M_6 = 13{,}75$ kNm > 12 kNm. Ordonatele trebuie deci reduse în raportul

$\mu_5=12/13{,}75=0{,}873$, factorul de încărcare devenind $\mu_5\lambda_5=0{,}873\cdot 1{,}58=1{,}38$; se obține astfel un interval mai strîns, anume

$$1{,}38<\lambda_c<1{,}58.$$

Dacă dorim să mergem mai departe, se folosește indicația că și în secțiunea *6* trebuie să apară o articulație plastică; se ajunge la mecanismul (7) cu factor de încărcare $\lambda=1{,}53$, pentru care diagrama M (fig. 281, *b*) satisface condiția de plasticitate, și deci cele două limite ale intervalului coincid.

3. Metoda corectării succesive a momentelor plastice

Această metodă are la bază criteriul factorului de încărcare *maxim*. Pornind de la o diagramă de momente încovoietoare care satisface condițiile de echilibru static și de plasticitate, se urmărește ca prin corectări succesive ale ordonatelor principale să se ajungă și la îndeplinirea condiției de mecanism. În timpul operațiilor, proiectantul are mereu în față situația repartiției eforturilor în structură, putînd interveni asupra acesteia în modul dorit.

Efectuarea corecțiilor în diagrama M se face pe baza *condiției de echilibru static* și urmărește menținerea permanentă a acestui echilibru. Apare astfel necesară o sistematizare a operației de corectare pentru barele încărcate, stabilind o relație generală de echilibru între ordonatele principale din diagramă.

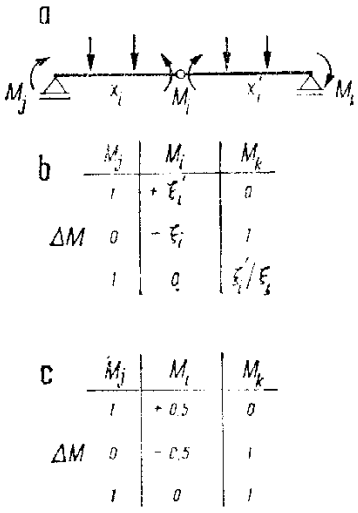


Fig. 284

În figura 284, *a* este reprezentată o bară *j-k* acționată de sarcini oarecare, la care au fost puse în evidență momentele de continuitate M_j și M_k de la capete, precum și momentul încovoietor M_i dintr-o secțiune oarecare *i*. Vom admite convenția de semne din metoda deplasărilor, considerînd pozitive momentele pe capăt de bară care rotesc în sens orar; pentru secțiunea curentă, convenția se referă la momentul de pe fața *din dreapta*.

Exprimînd echilibrul static al barei, se ajunge la relația

$$M_i=M_i^0+M_j\xi_i'-M_k\xi_i,$$

unde M_i^0 este dat de acțiunea sarcinilor. Dacă, pentru *aceleași sarcini* intervin *variații* ΔM ale momentelor, menținerea condiției de echilibru static a barei cere să fie respectată relația

$$\Delta M_i=\Delta M_j\xi_i'-\Delta M_k\xi_i. \qquad (16.9)$$

Admițînd că variază concomitent numai *două* din cele trei ordonate, se obțin corecțiile din figura 284, *b*: înseamnă că introducerea unei corectări la o anumită ordonată obligă să se efectueze și corectarea uneia dintre celelalte două ordonate, la alegere, în raportul dat de tabelă. Dacă secțiunea *i* este la mijlocul barei ($\xi_i=\xi_i'=0{,}5$), corecțiile ΔM iau forma din figura 284, *c*. Corectarea

poate fi făcută în diferite moduri, după cum apare necesar din conducerea calculului, cu singura condiție de a se asigura permanent echilibrul static.[1]

Aplicarea metodei comportă următoarele etape:

(1) Se pornește de la o diagramă de momente încovoietoare care să satisfacă condiția de echilibru statie pentru sarcinile date. Alegerea diagramei poate fi făcută în orice mod, chiar pornind de la un sistem static determinat. Mai avantajos este să se considere o situație mai apropiată de stadiul de cedare, cum ar fi momentele încovoietoare care corespund mecanismelor elementare. Se efectuează mai întîi suprapunerea acestora, apoi se fac corectări de echilibrare pentru noduri și pentru bare, spre a se asigura echilibrul static al ansamblului. Aceasta este diagrama M cu care se începe calculul propriu-zis.

(2) Se efectuează operațiile de corectări succesive, urmărindu-se reducerea ordonatelor mari ale diagramei, în ideea de a mări mereu factorul de încărcare λ față de valorile M_p ale barelor. În același timp se urmărește ca într-un număr suficient de secțiuni să se ajungă la același raport M/M_p, spre a forma un mecanism de cedare.

(3) Procedeul se simplifică dacă la un moment dat, pe baza valorilor ordonatelor la care s-a ajuns, se poate aprecia un mecanism de cedare probabil. Se fac atunci corectările necesare astfel ca diagrama M să-i corespundă, apoi se verifică condiția de plasticitate; dacă verificarea nu reușește, apare implicit indicația pentru un nou mecanism.

Metoda corectării succesive a momentelor plastice prezintă mai multă suplețe în aplicare decît metoda combinării mecanismelor elementare, deoarece se pretează la fel de bine ambelor alternative care pot apărea (verificarea sau dimensionarea structurii):

– se pornește de la un cadru *dat*, pentru care se caută mecanismul de cedare și factorul de încărcare ce corespund unui anumit grup de sarcini;

– se pornește de la sarcinile date și se stabilește dimensionarea cadrului în anumite condiții (un anumit factor de încărcare, anumite rapoarte ale valorilor M_p pe bare).

Pentru exemplificare, în figura 285, *a* este reluat cadrul studiat anterior prin metoda combinării mecanismelor; se cere să se dimensioneze astfel ca $M_p^r/M_p^s=1{,}5$ și $\lambda_c\simeq 1{,}50$. Se începe cu determinarea momentelor ce corespund mecanismelor elementare. În figurile 285, *b* și *c* se văd cele două mecanisme de bară, pentru care $M_g^s=8\cdot 6/4=12$ kNm și $M_g^g=10\cdot 5/4=12{,}50$ kNm; axele de referință ale diagramelor trec pe la jumătatea acestor ordonate. Mecanismul de grad de libertate este arătat în figura 285, *d*, rezultînd că pentru echilibru momentele din secțiunile unde apar articulații plastice trebuie să fie egale cu $M=6\cdot 1\cdot 4/6=4$ kNm. Momentele indicate în figuri asigură echilibrul fiecărui mecanism în parte. Ele sînt centralizate în figura 285, *e*, cu indicarea semnelor corespunzătoare în convenția de semne admisă.

Se trece acum la asigurarea echilibrului pe ansamblul structurii. Calculul se poate conduce chiar pe schema cadrului, cum se vede în figura 285, *g*, deschizînd coloane de calcul pentru toate extremitățile de bară și pentru secțiunile de mijloc ale riglelor, în care se înscriu momentele din figura 285, *e* (multiplicate cu 100). Se mai deschide și o coloană pentru gradul de libertate (ansamblul stîlpilor), în care se va ține evidența momentelor repartizate la stîlpi din echilibrări de noduri, acestea formînd un moment de etaj.

[1] Acest specific trebuie bine reținut, deoarece deseori se consideră în mod eronat că metoda corectării succesive a momentelor plastice este asemănătoare metodelor iterative folosite în stadiul elastic (acolo corectările se fac ținîndu-se seama de rigiditatea barelor structurii).

Se începe cu echilibrarea nodurilor, repartizînd momentele neechilibrate capetelor de bare din jur după o normă oarecare, de exemplu proporțional cu momentele plastice ale barelor respective. Astfel, în nodul *2*, din momentul neechilibrat $+600+400=+1\,000$ se repartizează $+600$ la riglă și $+400$ la stîlp; în nodul *4*, din momentul neechilibrat $-600+625+400=+425$ se repartizează cîte $+160$ la cele două rigle și $+105$ la stîlp; în nodul *7*, din momentul neechilibrat $-625+400=-225$ se repartizează -135 la riglă și -90 la stîlp. Toate aceste valori se înscriu în coloanele respective. Echilibrarea nodurilor a dezechilibrat însă riglele, pentru care

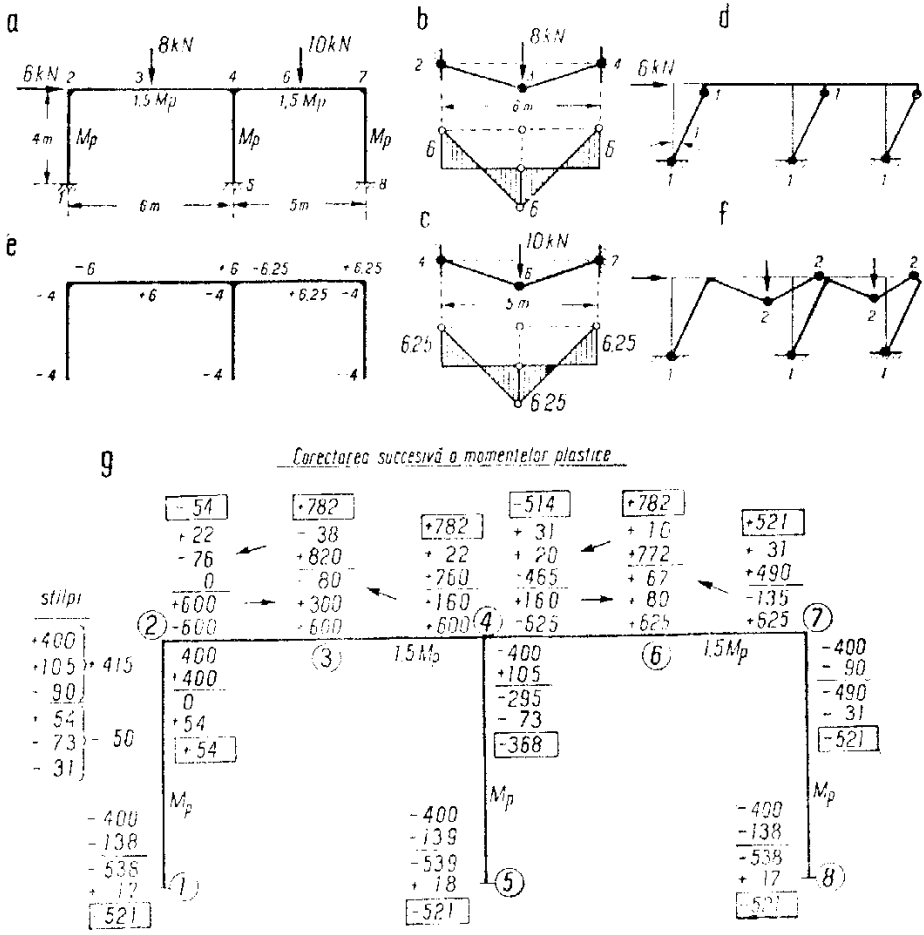


Fig. 285

trebuie acum făcute corectări în concordanță cu datele din figura 284, *c*. La riglă *2-3-4*, corecțiilor $+600$ și $+160$ apărute la extremități le corespund corecțiile $+300$ și -80 în secțiunea centrală *3*; la riglă *4-6-7*, corecțiilor $+160$ și -135 apărute la extremități le corespund corecțiile $+80$ și $+67$ în secțiunea centrală *6*. Dezechilibrul a apărut și pe direcția gradului de libertate, acumulîndu-se un moment de etaj $+400+105-90=+415$, care trebuie echilibrat prin corecții introduse la stîlpi (cîte -138 la fiecare); pentru a nu dezechilibra din nou nodurile, aceste corecții se introduc la extremitățile interioare. Acum, ansamblul cadrului este în echilibru; se mar-

chează aceasta prin liniuțe trase în toate cotoanele, deasupra cărora se înscriu (prin sumare) valorile totale la care s-a ajuns. S-a obținut o diagramă de momente încovoietoare care satisface condiția de echilibru static.

Examinînd mărimile ordonatelor la care s-a ajuns, se desprinde o indicație pentru un mecanism de cedare posibil, anume acela din figura 285, *f*; într-adevăr, au apărut două grupe de ordonate cu mărimi aproape egale, și anume în secțiunile *3*, *4* (stînga) și *6*, respectiv în secțiunile *1*, *5*, *7* și *8*, iar aceste mărimi sînt aproximativ în raportul 1,5 fixat la început. Este deci firesc să se efectueze în continuare corecții pentru acest mecanism. Pentru aceasta se scrie mai întîi condiția de mecanism sub forma

$$6\lambda \cdot 1 \cdot 4 + 8\lambda \cdot 1 \cdot 3 + 10\lambda \cdot 1 \cdot 2{,}5 = 5M_p^s + 6M_p^r,$$

unde introducînd $M_p^s = M_p$ și $M_p^r = 1{,}5M_p$, de asemenea $\lambda = 1{,}5$, rezultă

$$M_p = 73 \cdot 1{,}5/14 = 7{,}82 \text{ kNm}$$

și deci mărimile *necesare* ale momentelor plastice sînt $M_p^s = 7{,}82$ kNm și $M_p^r = 1{,}5 \cdot 7{,}82 = 11{,}73$ kNm. Dacă se aleg pentru cadru dimensiuni de secțiuni astfel ca $M_p^s = 8$ kNm și $M_p^r = 12$ k Nm atunci

$$\lambda = 14 \cdot 8/73 = 1{,}534, \quad 12/\lambda = 7{,}82 \text{ kNm} \quad \text{și} \quad 8/\lambda = 5{,}21 \text{ kNm};$$

acestea sînt mărimile de ordonate la care trebuie să se ajungă în secțiunile indicate de mecanismul de cedare.

Se efectuează deci un nou ciclu de corecții, corectînd în primul rînd ordonatele din cele șapte secțiuni pentru a ajunge la valorile de mai sus, după care urmează echilibrarea nodurilor, a riglelor și a stîlpilor, asemănător ca în primul ciclu; corecțiile necesare se fac în *celelalte* secțiuni. Operațiile pot fi urmărite direct pe schemă, ajungîndu-se la noile ordonate înscrise acolo; se constată că peste tot este îndeplinită condiția de plasticitate, ceea ce înseamnă că s-a ajuns la soluția corectă.

E. ALTE ASPECTE ALE CALCULULUI ÎN DOMENIUL PLASTIC

1. Calculul prin etape succesive

Fundamentarea teoretică și metodele de calcul examinate în paragrafele precedente se referă la fenomenul cedării plastice ca atare și pornesc de la faptul că stadiul de cedare poate fi studiat și identificat *independent* de evoluția comportării structurii pe parcursul creșterii sarcinilor. Mecanismul de cedare, mărimea factorului de încărcare λ_c și diagrama corespunzătoare de momente încovoietoare pot fi găsite cercetînd direct și exclusiv momentul cedării plastice, stadiu în care structura static nedeterminată inițială și-a pierdut legăturile suplimentare. Aceasta explică simplitatea metodelor, care se limitează în fapt la operații elementare de echilibru static; numai cînd numărul de soluții posibile ce trebuie triate crește, se ajunge la o complicare a rezolvării.

Determinarea capacității portante la cedarea plastică nu epuizează în genere cerințele proiectării. Pot apărea frecvent cazuri cînd este de dorit să se dispună și de elemente privitoare la unele stadii intermediare. Astfel, s-ar putea să intereseze care este rezerva de rezistență a structurii față de stadiul cînd se formează o anumită articulație plastică, sau față de cel al apariției unei ar-

ticulații plastice într-o anumită poziție pe structură, spre a utiliza numai parțial — dar în condiții sigure — surplusul de capacitate portantă. De data aceasta aspectul problemei se schimbă, deoarece interesează chiar evoluția comportării structurii cînd sarcinile cresc, anume ordinea de formare a articulațiilor plastice și factorii de încărcare corespunzători.

Un studiu de acest fel implică efectuarea unui calcul prin etape succesive, pornind de la limita stadiului elastic și pînă la cedarea plastică. Prin natura sa, un asemenea calcul este mai laborios, și deci mai greu de aplicat în practica curentă. Devin necesare ipoteze simplificatoare, care să schematizeze fenomenul astfel ca să fie posibilă aplicarea metodelor uzuale de calcul. Principala ipoteză simplificatoare constă în a admite că articulațiile plastice sînt punctuale și *se formează instantaneu*, de îndată ce în secțiunea respectivă momentul încovoietor a atins valoarea M_p. Prin aceasta, limita stadiului de comportare elastică coincide cu formarea primei articulații plastice, iar cedarea plastică devine iminentă cînd apare ultima articulație plastică. Între aceste două limite, evoluția comportării structurii rezultă împărțită într-o serie de etape, bine diferențiate între ele și care corespund intervalelor dintre formarea succesivă a articulațiilor plastice[1].

Comportarea materialului apare astfel net diferențiată: în articulațiile plastice materialul se comportă perfect plastic, ceea ce înseamnă că pentru surplusul de sarcină situația este analogă prezenței unei articulații obișnuite; în restul barelor, materialul se comportă perfect elastic. Rezultă că în intervalul dintre formarea a două articulații plastice consecutive se admite comportarea perfect elastică a structurii sub acțiunea sarcinilor care cresc și a momentelor încovoietoare care rămîn constante în articulațiile plastice intrate în funcțiune. Sînt deci întrunite condițiile pentru aplicarea metodelor cunoscute din statica liniară, aplicare bineînțeles limitată la fiecare interval în parte. Prin trecerea de la un interval la altul structura se modifică, datorită pierderii unei legături de continuitate, anume în secțiunea care corespunde articulației plastice a cărei formare separă cele două intervale. Înseamnă că se poate face uz de metoda eforturilor sau de metoda deplasărilor, în raport cu alcătuirea structurii.

Se începe prin a se considera structura în stadiul elastic, determinînd diagrama M corespunzătoare, după care ordonatele se măresc proporțional, pînă cînd în secțiunea cea mai solicitată se atinge valoarea M_p. Se cunoaște astfel poziția primei articulații plastice și mărimea factorului de încărcare. Se trece apoi la etapele următoare; la fiecare etapă se consideră numai surplusul de încărcare și se urmărește corecția factorului de încărcare față de etapa precedentă. În secțiunile unde s-au format anterior articulații plastice se consideră articulații obișnuite, iar pe structură se aplică sarcinile date afectate de corecția $\Delta\lambda$ a factorului de încărcare. Identificarea secțiunii în care apare noua articulație plastică rezultă din condiția ca, pentru cel mai mic $\Delta\lambda$, să se acopere

[1] Formarea unei articulații plastice este caracterizată prin faptul că momentul încovoietor atinge valoarea M_p, dar *continuitatea subzistă încă în secțiune*; apariția rotirii relative intervine numai în etapa următoare.

acolo diferența dintre momentul încovoietor total corespunzător etapei precedente și valoarea M_p respectivă.

Din cele expuse rezultă specificul calculului prin etape succesive, care constă în efectuarea repetată a rezolvării pe o structură ce se modifică de la o etapă la alta, pierzînd succesiv cîte o legătură; cînd s-a format și articulația plastică n, structura ajunge static determinată. Deoarece un asemenea calcul oglindește

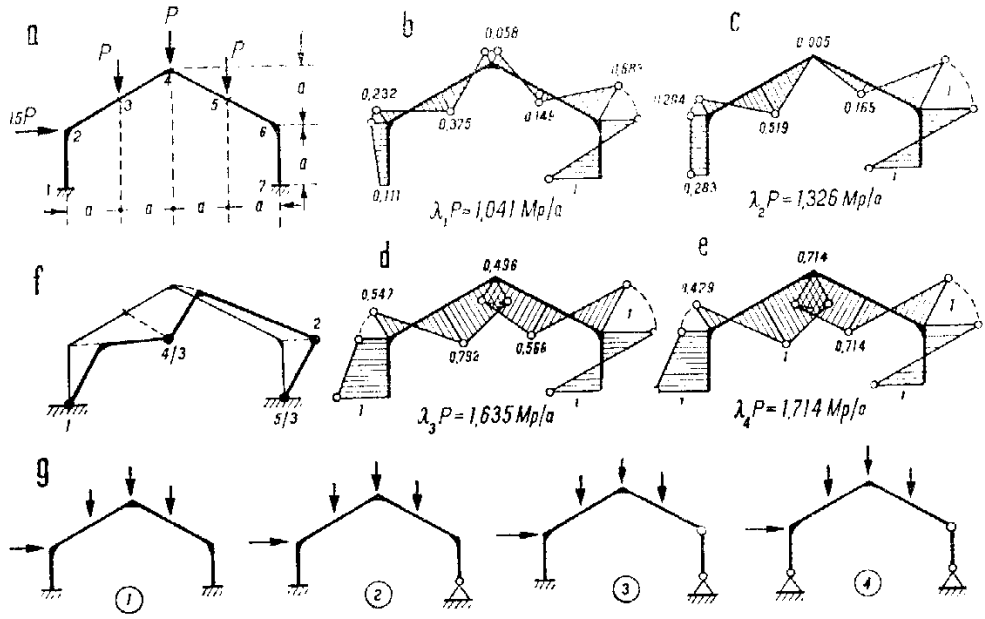


Fig. 286

întreaga evoluție a stării de eforturi din structură, pe măsura creșterii sarcinilor, i se dă obișnuit numele de calcul „biografic".

Pentru exemplificare, în figura 286 s-a considerat un cadru de trei ori static nedeterminat, avînd M_p=const., la care sarcinile cresc proporțional.

Rezolvarea s-a efectuat prin metoda eforturilor în fiecare etapă; modul cum structura pierde succesiv cîte o legătură se vede în figura 286, *g*, după care se ajunge la mecanismul de cedare din figura 286, *f*. Diagramele de momente încovoietoare care corespund formării celor patru articulații plastice sînt date în figurile 286, *b-e* (ordonatele trebuie multiplicate cu constanta M_p); se poate urmări astfel cu claritate evoluția stării de eforturi. Rezultatele obținute se pot sintetiza astfel:

— articulația plastică	I	II	III	IV
— secțiunea	7	6	1	3
— factor de încărcare	1,041	1,326	1,635	1,714 · M_p/Pa
λ_i/λ_1	1	1,27	1,57	1,65

de unde rezultă că, pentru sarcinile date, cadrul are o rezervă de rezistență de 65% față de limita stadiului de comportare perfect elastică.

În cele ce preced s-a expus forma clasică a calculului „biografic", pentru lămurirea ideii de bază. Desigur, de îndată ce structura este mai complicată, calculul devine foarte laborios. Există posibilitatea de a se ajunge la aceleași rezultate pe căi mai simple[1].

2. Calculul deplasărilor

Calculul în domeniul plastic se referă în principal la *rezistența* structurii, căutînd să determine capacitatea portantă la cedarea plastică. Sînt însă și cazuri cînd trebuie luată în considerare, ca un criteriu important, deformabilitatea structurii. Desigur, problema limitării deformabilității la anumite construcții se ridică în primul rînd pentru condițiile de exploatare, cînd structura se comportă în întregime elastic și calculul deplasărilor se face pentru acest stadiu. Totuși, chiar cînd mărimile deplasărilor calculate în acest fel apar corespunzătoare, rămîne deschisă întrebarea dacă o creștere în continuare a sarcinilor nu ar putea duce la o puternică accentuare a deformării, astfel ca structura să devină improprie mai înainte de a-și epuiza capacitatea portantă. Cunoașterea deplasărilor ce caracterizează poziția deformată în stadiul limită este utilă și pentru aprecierea măsurii în care se justifică ipoteza simplificatoare, ca la exprimarea echilibrului static să se raporteze ansamblul forțelor la poziția inițială a structurii. Apare astfel necesar să se poată calcula deplasări și pentru stadiul cînd cedarea plastică devine iminentă.

Vom reține în continuare simplificările și schematizările arătate în paragraful precedent, care conduc la considerarea comportării perfect elastice a structurii în fiecare dintre intervalele delimitate de apariția articulațiilor plastice. Calculul deplasărilor se va face, pentru orice asemenea interval, aplicînd metodele cunoscute din statica liniară și anume expresia Maxwell-Mohr

$$\Delta_i = \int M_x \, m_{xi} \, ds/EI,$$

rămînînd de precizat care sînt în acest caz condițiile particulare de aplicare.

Expresia arată că trebuie cunoscută diagrama M_x corespunzătoare cedării plastice, pe care o obținem cu ajutorul metodelor examinate mai înainte, identificînd mecanismul de cedare și factorul de încărcare corespunzător. În ceea ce privește situația auxiliară de încărcare, trebuie ținut seama că în momentul cînd cedarea plastică devine iminentă sînt formate și funcționează primele n articulații plastice, *dar în secțiunea care corespunde ultimei articulații plastice continuitatea subzistă încă*. Înseamnă că pentru situația auxiliară trebuie considerat sistemul static determinat ce rezultă introducînd articulații obișnuite în secțiunile din dreptul *primelor n articulații plastice*. Pe acest sistem se aplică sarcina-unitate corespunzătoare deplasării și se trasează diagrama m_{xi}. Apare limpede că pentru alcătuirea situației auxiliare trebuie

[1] Un procedeu care elimină necesitatea de a mai rezolva sisteme de ecuații la fiecare etapă este expus în lucrarea: Gheorghiu, A.L., Pacoste, C., *Determinarea directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice la cadre încărcate cu sarcini proporționale*, „Studii și cercetări de mecanică aplicată", nr. 4/1966, București.

cunoscut *care este ultima articulație plastică* ce se formează. Identificarea acesteia reprezintă o problemă esențială și prealabilă pentru calculul deplasărilor. Dacă s-a făcut un calcul „biografic", este cunoscută toată succesiunea articulațiilor plastice; cînd stadiul de cedare plastică a fost determinat direct, există posibilitatea de a identifica ultima articulație plastică prin procedee speciale[1].

Calculul deplasărilor se poate face și pentru un anumit stadiu intermediar, dacă diagrama respectivă de momente încovoietoare este cunoscută dintr-un calcul efectuat prin etape succesive. Considerînd stadiul de formare a articulației plastice i, situația auxiliară de încărcare se obține aplicînd sarcina-unitate pe sistemul care rezultă din structura dată, introducînd articulații obișnuite în secțiunile ce corespund primelor $(i-1)$ articulații plastice. Acest sistem este însă static nedeterminat, astfel că se poate face uz de expresia (9.19), care permite ca diagrama din situația auxiliară să fie trasată pe un sistem static determinat. Înseamnă că, în afara celor $(i-1)$ articulații introduse obligatoriu, mai trebuie suprimate încă $n-i+1$ legături, alese după voință, astfel ca trasarea diagramei m_{xi} să fie cît mai simplă.

Pentru exemplificare, ne referim la calculul prin etape succesive efectuat asupra cadrului din figura 286, a, urmînd să se calculeze deplasările v_4 și u_6 atît pentru limita domeniului elastic, cît și la cedarea plastică. Vor interveni diagramele $M_x^{(1)}$ și $M_x^{(4)}$ din figurile 286, b și c, care sînt reproduse în figurile 287, a și b. Situațiile auxiliare de încărcare se văd în figurile 287, c

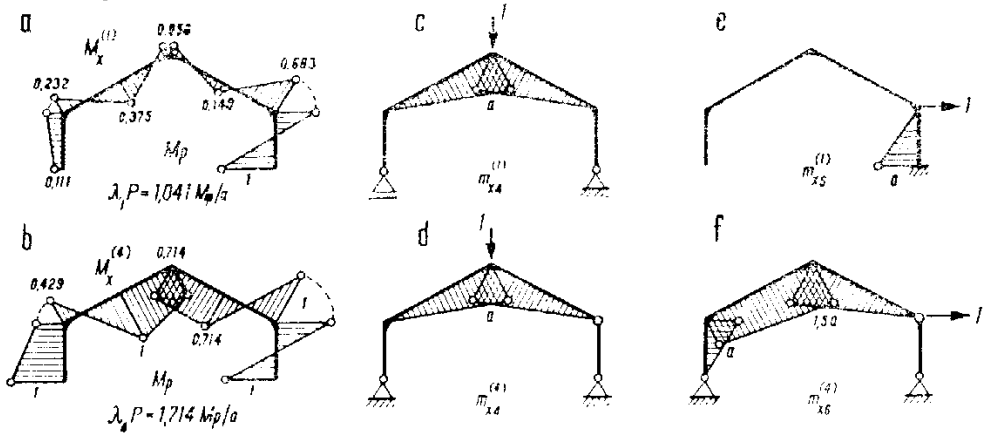


Fig. 287

și d pentru deplasarea v_4, respectiv în figurile 287, e și f pentru deplasarea u_6. Efectuînd calculul după normele cunoscute, rezultă

$$v_1^{(1)}=0{,}15a^2M_p/EI, \qquad v_4^{(4)}=1{,}50a^2M_p/EI, \qquad v_4^{(4)}/v_4^{(1)}=10,$$

$$u_6^{(1)}=0{,}22a^2M_p/EI, \qquad u_6^{(4)}=2{,}36a^2M_p/EI, \qquad u_6^{(4)}/u_6^{(1)}=10{,}7,$$

valori care scot în evidență accentuarea deformării structurii în stadiul elasto-plastic.

[1] v. lucrarea menționată la pag. 620.

Extinderea aplicabilității expresiei Maxwell-Mohr la calculul deplasărilor în domeniul elasto-plastic oferă un mijloc simplu pentru controlul deformabilității structurii la cedarea plastică sau în anumite stadii intermediare. Acest control trebuie de obicei făcut cînd se urmărește identificarea stadiului limită de pierdere a capacității portante. Pot fi cazuri cînd condiția de limitare a deformabilității să fie cea care determină stadiul limită. Această condiție poate fi exprimată, de exemplu, prin limitarea la o anumită valoare maximă a raportului δ_{pl}/δ_{el} pentru deplasările din secțiunile principale ale structurii. Se vede de aici necesitatea de a cunoaște și starea de eforturi la limita domeniului elastic.

Chiar atunci cînd determinarea cedării plastice se face direct, independent de comportarea structurii pe parcursul creșterii sarcinilor, raportarea rezultatelor la limita domeniului elastic nu poate fi în genere evitată. Astfel, literatura de specialitate recomandă ca, atunci cînd dimensionarea structurii se face pe baza cedării plastice, să se controleze totuși ca pentru sarcinile de exploatare structura să aibă în întregime comportare elastică.

3. Considerații finale

În acest capitol s-au expus numai unele elemente orientative privind calculul structurilor în domeniul plastic, în primul rînd cele legate de determinarea directă a stadiului de cedare plastică printr-un calcul de ordinul I și considerînd cazul sarcinilor proporționale. Înțelegerea mai completă a acestor probleme implică și alte aspecte; unele dintre acestea sînt menționate în continuare, ca sugestii pentru o documentare ulterioară.

a. Efecte de ordinul II în condiția de mecanism. Forma (16.6) a condiției de mecanism este scrisă raportînd ansamblul forțelor în echilibru la poziția inițială a structurii; se admite deci că deformata din situația limită se încadrează în domeniul micilor deplasări. Această ipoteză simplificatoare apare mai greu de acceptat la calculul în domeniul plastic al structurilor cu noduri deplasabile, datorită deplasărilor sensibil mai mari ce caracterizează stadiul cînd cedarea devine iminentă, față de deformata din domeniul elastic, cum s-a văzut în legătură cu figura 287. Cînd structura are și bare puternic comprimate, este indicat să se introducă efectul de ordinul II în condiția de mecanism.

O cale simplă pentru aceasta este de a considera ansamblul forțelor în echilibru raportat la poziția deformată din situația limită, stabilită printr-un calcul de ordinul I. Astfel, pentru cadrul din figura 288, *a*, este necesar să se determine deplasările Δ ce corespund barelor puternic comprimate (fig. 288, *b*), urmînd calea indicată în paragraful precedent, care are la bază identificarea prealabilă a ultimei articulații plastice. De la această poziție deformată, se admite drept deplasare virtuală o funcționare infinit mică a mecanismului de cedare (fig. 288, *c*), rezultînd relația de echilibru

$$\lambda[\sum P_i \delta_i + \sum P \Delta \alpha] = \sum M_p |\theta|, \qquad (16.10)$$

mecanism cedare

care reprezintă noua formă a condiției de mecanism, ce conduce la o valoare *mai mică* a factorului de încărcare. Rezultatul este firesc, deoarece considerarea deformării structurii reprezintă un element dezavantajos, oglindit într-o capacitate portantă mai redusă decît cea rezultată dintr-un calcul de ordinul I.

O apropiere mai bună de realitate se poate obține introducînd în expresia (16.10) și un element avantajos, reprezentat de efectul autoconsolidării mate-

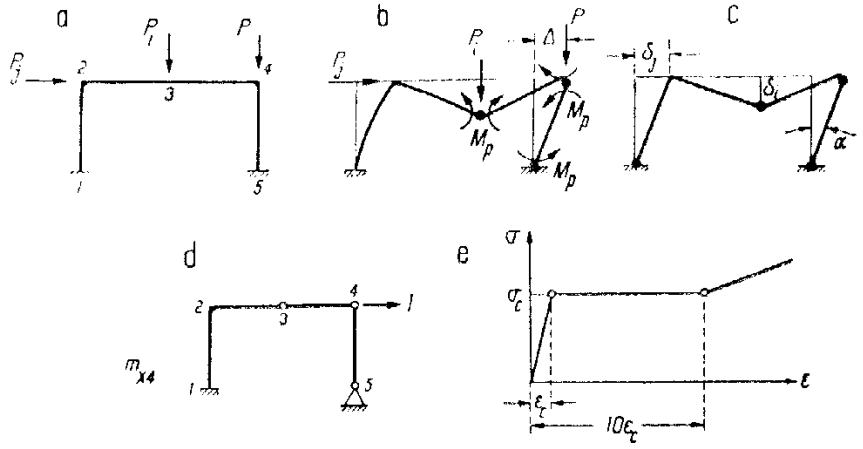


Fig. 288

rialului. Într-adevăr, membrul al doilea al expresiei este stabilit admițînd că în articulațiile plastice rotirea relativă este liberă sub moment încovoietor constant (M_p). De fapt, palierul de curgere al materialului este limitat (fig. 288, *e*), după care urmează autoconsolidarea reprezentată schematizat printr-o dreaptă cu o anumită înclinare față de orizontală. Înseamnă că, în timp ce rotirea relativă din articulația plastică se mărește, M_p nu mai rămîne constant ci crește și deci în al doilea membru al relației trebuie adăugat un nou termen care să exprime surplusul de lucru mecanic datorat acestei creșteri. Se ajunge astfel la o mărire a factorului de încărcare.

În măsura în care se admite o compensare între aceste două fenomene cu efecte contrare, se justifică și forma simplă (16.6) a condiției de mecanism utilizată în paragrafele precedente.

b. Sarcini repetate variind independent. Admiterea sarcinilor proporționale corespunde unui singur proces de încărcare a structurii de la stadiul de exploatare pînă la cedarea plastică. În realitate, diferitele sarcini ce acționează pe o structură pot varia fiecare într-un anumit interval, iar aplicarea lor poate interveni în mod repetat. Cît timp structura se comportă elastic, interesează numai combinațiile defavorabile de sarcini; în domeniul plastic intervin deformații remanente, care pot influența comportarea structurii la încărcări ulterioare.

În figura 276 este arătată corelația dintre momentul încovoietor și curbura din secțiunea curentă a unei bare, în cursul unui proces de încărcare-descărcare;

linia plină corespunde unei singure încărcări. Cînd, după atingerea unei valori $M > M_e$, se produce o descărcare și în continuare încărcarea în sens contrar, acestea au caracter *perfect elastic* pe un interval $\Delta M_e \simeq 2 M_e$, după care reapare comportarea elasto-plastică. Deosebirea dintre diagrama de încărcare și cea de descărcare face ca pe secțiune să rezulte distribuții de eforturi unitare diferite în cele două etape, a căror diferență conduce la menținerea unui anumit moment încovoietor *rezidual* după descărcare completă. Asemenea momente reziduale rămîn în toate secțiunile unde în timpul procesului de încărcare au apărut zone plasticizate. Înseamnă că, după descărcare, cînd pe structură nu mai acționează sarcini, distribuția de momente reziduale trebuie să fie *autoechilibrată* pe ansamblul structurii.

Schematizarea unei încărcări cu sarcini repetate variind independent se obține admițînd pentru fiecare sarcină în parte un interval prescris de variație, între o valoare minimă și o valoare maximă, în condițiile de exploatare. Factorul de încărcare se aplică asupra mărimii intervalelor și este același pentru toate sarcinile. În loc de a fi un multiplicator unic al mărimii sarcinilor de exploatare, ca în cazul admiterii sarcinilor proporționale, acum factorul de încărcare este un multiplicator unic al limitelor intervalelor de variație a sarcinilor. Trebuie determinat factorul de încărcare la cedarea plastică, care — în cazul sarcinilor repetate — se poate produce în două moduri diferite:

— Cedare prin *deformare plastică alternată*, care poate apare cînd variația mărimii sarcinilor are caracter alternativ, de la valori maxime într-un sens, la valori maxime în sensul opus. În porțiunile unde domeniul de comportare elastică este depășit, se produc fenomene de plasticizare alternată: structura internă a materialului (aranjarea cristalelor) se modifică de fiecare dată, fără a reveni la descărcare. Cînd factorul de încărcare depășește o anumită valoare λ_a, în unele secțiuni se poate ajunge la rupere datorită suprapunerii repetate a deformațiilor plastice alternate. Este un fenomen asemănător oboselii elastice, dar numărul de cicluri la care se produce este mult mai mic (zeci-sute de cicluri, față de sute de mii-milioane).

— Cedare prin *deformare plastică progresivă*, care poate apare cînd variația mărimii sarcinilor este caracterizată de maxime ce se repetă în același sens. Datorită prezenței eforturilor reziduale, într-o secțiune unde a apărut de exemplu o articulație plastică pot interveni două fenomene diferite, în raport cu mărimea factorului de încărcare. Cît timp $\lambda < \lambda_s$, fiecare ciclu nou de încărcare adaugă cîte o variație a rotirii relative, toate în același sens dar cu mărimi descrescînd de la ciclu la ciclu. După un timp se ajunge la *stabilizarea* deformării structurii, în sensul că rotirile relative din articulațiile plastice rămîn constante și în rest comportarea capătă caracter elastic. Pentru $\lambda > \lambda_s$ comportarea este diferită, fiecare nou ciclu adăugînd cîte o rotire relativă de mărime constantă, astfel că prin suprapunere deformarea structurii se accentuează continuu, pînă ce capacitatea portantă se pierde.

Cercetarea acestor două forme de cedare plastică, pentru determinarea factorilor de încărcare λ_a sau λ_s, se face impunînd condiția ca în timpul încărcărilor și descărcărilor ulterioare comportarea structurii să se mențină elastică. Notînd cu M_i^{max} și M_i^{min} eforturile cele mai defavorabile într-o secțiune i,

obținute printr-un calcul elastic și suprapunîndu-le momentului rezidual $\overline{M}_i$ existent în secțiune, intervin condițiile

$$\begin{aligned} \overline{M}_i + M_i^{max} &\leqslant M_p^{(i)} \\ \overline{M}_i + M_i^{min} &\geqslant -M_p^{(i)} \end{aligned} \qquad \text{și} \qquad M_i^{max} - M_i^{min} \leqslant 2M_c^{(i)}, \tag{16.11}$$

primele două relații reprezentînd *noua formă a condiției de plasticitate*, iar ultima condiționînd variația sarcinilor de menținerea în intervalul $\Delta M_c = 2\,M_c$ indicat pe figura 276. Această din urmă condiție stă la baza determinării factorului de încărcare λ_a, iar cele dintîi — a factorului de încărcare λ_s.

Din cele arătate rezultă că un studiu complet al stadiului de cedare plastică ar trebui să comporte trei verificări diferite, determinînd pe λ_c pentru cazul unei singure încărcări cu sarcini proporționale, precum și pe λ_a și λ_s corespunzători aplicării repetate a sarcinilor, admise variind independent. Numeroase studii efectuate în această direcție au arătat că, ținînd seamă de caracterul încărcărilor uzuale și de prezența sarcinii permanente, probabilitatea cedării plastice în ultimele două moduri este în genere foarte redusă, astfel că obișnuit se consideră concludentă verificarea pe baza valorii λ_c a factorului de încărcare.